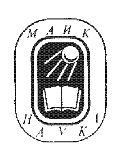
СБОРНИК ЗАДАЧ ПО АЛГЕБРЕ

Под редакцией А.И. Кострикина

ИЗДАНИЕ ТРЕТЬЕ,
ИСПРАВЛЕННОЕ И ДОПОЛНЕННОЕ



МОСКВА
ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКАЯ
ЛИТЕРАТУРА
2001

УДК 512 (075.8)
ББК 22.143
З-15

СОСТАВИТЕЛИ:

В.А. Артамонов, Ю.А. Бахтурин, Э.Б. Винберг, Е.С. Голод, В.А. Исковских, А.И. Кострикин, В.Н. Латышев, А.В. Михалев, А.П. Мишина, А.Ю. Ольшанский, А.А. Панчишкин, И.В. Проскуряков, А.Н. Рудаков, Л.А. Скорняков, А.Л. Шмелькин,

Сборник задач по алгебре / Под. ред. А.И. Кострикина: Учебник для вузов. — Изд. 3-е, испр. и доп.— М.: ФИЗМАТЛИТ, 2001. — 464 с. — ISBN 5-9221-0020-3.

Задачник составлен применительно к учебнику А.И. Кострикина “Введение в алгебру” (Т. 1. “Основы алгебры”, Т. 2. “Линейная алгебра”, Т. 3. “Основные структуры алгебры”) и учебному пособию А.И. Кострикина, Ю.И. Манина “Линейная алгебра и геометрия”.

Цель книги — обеспечить семинарские занятия сразу по двум обязательным курсам: “Высшая алгебра” и “Линейная алгебра и геометрия”, а также предоставить студентам материал для самостоятельной работы.

Для студентов первых двух курсов математических факультетов университетов и педагогических институтов.

Библиогр. 20 назв.

ISBN 5-9221-0020-3

ОГЛАВЛЕНИЕ

ЧАСТЬ I
ОСНОВЫ АЛГЕБРЫ

ЧАСТЬ III
ОСНОВНЫЕ АЛГЕБРАИЧЕСКИЕ СТРУКТУРЫ

ПРЕДИСЛОВИЕ К ТРЕТЬЕМУ ИЗДАНИЮ *)

Вышедшее в 1995 году достаточно большим тиражём второе издание задачника [16] стало уже библиографической редкостью. В 1996 году был опубликован его английский перевод [17].

К сожалению, в [16] содержится достаточно много опечаток. Надеюсь, что все они устранены в предлагаемом читателю третьем издании, и, разумеется, в нём не возникли новые неточности. В настоящем издании сохранена структура, созданная в [16], устранён ряд опечаток и добавлены новые задачи, в основном в главы 13 и 14.

Третье издание подготовлено В.А. Артамоновым с участием авторского коллектива, сотрудников кафедры высшей алгебры Московского государственного университета, а также Е.В. Панкратьева.

Публикация настоящего издания приурочена к выходу учебного пособия А. И. Кострикина “Введение в алгебру” в трех частях [3–5].

А.И. Кострикин

ИЗ ПРЕДИСЛОВИЯ КО ВТОРОМУ ИЗДАНИЮ

Поставленные перед сборником задач по алгебре цели, о которых говорилось в предисловии к первому изданию, в основном достигнуты. Об этом можно судить по поступившим отзывам и по опыту работы членов кафедры (т.е. авторов сборника) со студентами. Вместе с тем, почти сразу же выявились существенные изъяны первого издания: недостаточное количество задач числового характера; отсутствие ряда типовых задач; неудобная нумерация задач и ответов; близкое соседство разнокалиберных по трудности задач.

---

*) Данное предисловие подготовлено титульным редактором книги, членом-корреспондентом Российской академии наук, профессором, заведующим кафедрой высшей алгебры Московского государственного университета А.И. Кострикиным. К сожалению, Алексей Иванович умер в сентябре 2000 года, не дождавшись выхода в свет этого издания.

Настоящее издание, подготовленное, главным образом, В.А. Артамоновым (но с участием практически тех же авторов), призвано устранить указанные недостатки. Объём сборника существенно увеличился не только за счёт стандартных задач. Возник специальный раздел задач повышенной, а иногда и весьма высокой трудности; эти задачи, частично извлечённые из журнальной и монографической литературы, помогут в определённой степени удовлетворить запросы сильных студентов и подсказать темы курсовых работ. Эти задачи расположены в конце параграфа после знака $* * *$.

ИЗ ПРЕДИСЛОВИЯ К ПЕРВОМУ ИЗДАНИЮ

Существующие сборники задач по курсам "Высшей алгебры", "Линейной алгебры и геометрии" (см., например, [8, 9] и др.) зарекомендовали себя с самой лучшей стороны. Поэтому выпуск ещё одного учебного пособия аналогичного жанра нуждается в пояснении. Составители предлагаемого сборника задач руководствовались простыми соображениями. Изменившаяся за последние годы структура указанных курсов, появление новых разделов, упразднение или частичное сокращение ряда традиционных тем — все это привело к тому, что преподаватели, ведущие семинарские занятия, вынуждены ориентироваться на большое число разнородных источников. Чтобы исправить сложившееся положение вещей, кафедра высшей алгебры МГУ решила подготовить новый сборник задач, который охватывал бы все разделы трехсеместрового курса.

Труд с самого начала приобрёл коллективный характер. Сотрудник, ответственный за ту или иную главу, придерживался выработанного опытным путём критерия полноты и разнообразия материала, проявляя разумную умеренность в его подборе. Фактически это означало определённое сокращение количества шаблонных численных примеров и выделение в массиве задач наиболее характерных представителей. Таким образом, в сборник вошли в основном те задачи, которые реально предлагались студентам. Сравнительно небольшую долю, особенно в первом семестре, составляют задачи повышенной трудности. Все они снабжены указаниями. Роль таких задач, однако, возрастает к концу курса. Наиболее трудные задачи могут предлагаться на дополнительных занятиях по алгебре.

Количество теоретических пояснений сведено к минимуму, однако соображения автономности играли всё более значительную роль по

мере продвижения к дополнительным главам алгебры. При составлении настоящего пособия было использовано значительное число задач из сборников, указанных в списке литературы.

В конце книги приводятся список обозначений и определения основных понятий, используемых в книге, к которым следует обращаться в случае затруднений при понимании условия задачи. Определения, отсутствующие в последнем списке, можно найти в разделе "Теоретические сведения", где кратко изложены основные утверждения, необходимые для решения задач.

Авторы выражают благодарность В.В. Батырёву, много поработавшему над текстом сборника. Особая благодарность — сотрудникам кафедры высшей алгебры и теории чисел Санкт-Петербургского университета и кафедры алгебры и математической логики Киевского университета. Они провели тщательное рецензирование сборника и сделали большое число конкретных замечаний.

Авторы благодарны редактору книги Г.В. Дорофееву, который обратил самое серьезное внимание на принципы упорядочения материала и унификацию обозначений, устранив излишний параллелизм, о котором говорилось выше.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Кострикин А.И.* Введение в алгебру. — М.: Наука, 1977.
2. *Кострикин А.И.*, *Манин Ю.И.* Линейная алгебра и геометрия. — М.: Наука, 1986.
3. *Кострикин А.И.* Введение в алгебру. Ч. I. — М.: Физматлит, 1999.
4. *Кострикин А.И.* Введение в алгебру. Ч. II. — М.: Физматлит, 1999.
5. *Кострикин А.И.* Введение в алгебру. Ч. III. — М.: Физматлит, 2000.
6. *Курош А.Г.* Курс высшей алгебры. — М.: Наука, 1971.
7. *Скорняков Л.А.* Элементы алгебры. — М.: Наука, 1980.
8. *Фаддеев Д.К.*, *Соминский И.С.* Сборник задач по высшей алгебре. — М.: Наука, 1975.
9. *Проскуряков И.В.* Сборник задач по линейной алгебре. – М.: Лаборатория базовых знаний, 1999.
10. *Икрамов Х.Д.* Задачник по линейной алгебре. — М.: Наука, 1975.
11. *Цубербиллер О.Н.* Задачи и упражнения по аналитической геометрии. — М.: Наука, 1970.
12. *Хорн Р.*, *Джонсон И.* Матричный анализ. — М.: Наука, 1989.

13. *Barbeau E.J.* Polynomials. — N.Y.: Springer-Verlag, 1989.
14. *Латышев В.Н.* Выпуклые многогранники и линейное программирование. — Ульяновск: Филиал МГУ, 1992.
15. Сборник задач по алгебре / Под. ред. А.И. Кострикина. — М.: Наука, 1987.
16. Сборник задач по алгебре / Под. ред. А.И. Кострикина. — М.: Факториал, 1995.
17. Exercices in algebra: a collection of exercises in algebra, linear algebra and geometry / Ed. A. I. Kostrikin. — Gordon and Breach Publ., 1996.
18. *Дыбкова Е.В.*, *Жуков И.Б.*, *Семенов А.А.*, *Щмидт Р.А.* Задачи по алгебре. Основы теории групп. — С.-Пб.: Изд-во С.-Пб. ун-та, 1996.
19. *Генералов А.И.*, *Дыбкова Е.В.*, *Жуков И.Б.*, *Меркурьев А.С.*, *Семёнов А.А.*, *Щмидт Р.А.* Задачи по алгебре. Основы теории колец. — С.-Пб.: Изд-во С.-Пб. ун-та, 1998.
20. *Винберг Э.Б.* Курс алгебры. — М.: Факториал, 2001.

ЧАСТЬ I

ОСНОВЫ АЛГЕБРЫ

Глава I

МНОЖЕСТВА И ОТОБРАЖЕНИЯ

§ 1. Операции над подмножествами. Подсчет числа элементов

1.1. Пусть A_i $(i \in I)$, B — подмножества в X. Доказать равенства:

а) $\left(\bigcup\limits_{i\in I} A_i\right) \cap B = \bigcup\limits_{i\in I}(A_i \cap B)$; б) $\left(\bigcap\limits_{i\in I} A_i\right) \cup B = \bigcap\limits_{i\in I}(A_i \cup B)$;

в) $\overline{\bigcup\limits_{i\in I} A_i} = \bigcap\limits_{i\in I} \overline{A_i}$; г) $\overline{\bigcap\limits_{i\in I} A_i} = \bigcup\limits_{i\in I} \overline{A_i}$.

1.2. Пусть X — произвольное множество, 2^X — множество всех его подмножеств. Доказать, что операция $\triangle$ *симметрической разности*

$$A \triangle B = (A \cap \overline{B}) \cup (\overline{A} \cap B)$$

на множестве 2^X обладает следующими свойствами:

а) $A \triangle B = B \triangle A$;

б) $(A \triangle B) \triangle C = A \triangle (B \triangle C)$;

в) $A \triangle \varnothing = A$;

г) для любого подмножества $A \subset X$ существует подмножество $B \subset X$ такое, что $A \triangle B = \varnothing$;

д) $(A \triangle B) \cap C = (A \cap B) \triangle (A \cap C)$;

е) $A \triangle B = (A \cup B) \setminus (A \cap B)$;

ж) $A \triangle B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$.

1.3. Доказать, что для любых конечных множеств $A_1, \ldots, A_n$

$$\left|\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right| = \sum_{i=1}^{n} |A_i| - \sum_{1\leqslant i<j\leqslant n} |A_i \cap A_j| + \ldots$$
$$\ldots + (-1)^{k-1} \sum_{1\leqslant i_1<\ldots<i_k\leqslant n} |A_{i_1} \cap \ldots \cap A_{i_k}| + \ldots$$
$$\ldots + (-1)^{n-1}|A_1 \cap \ldots \cap A_n|.$$

1.4. Доказать, что для любого натурального числа $n > 1$

$$\varphi(n) = n\left(1 - \frac{1}{p_1}\right)\left(1 - \frac{1}{p_2}\right)\ldots\left(1 - \frac{1}{p_r}\right).$$

где $p_1, p_2, \ldots, p_r$ — все различные простые делители числа n, $\varphi(n)$ — *функция Эйлера.*

1.5. Какое максимальное число подмножеств можно образовать из данных n подмножеств фиксированного множества с помощью операций пересечения, объединения и дополнения?

1.6. Пусть A, B, C — подмножества в некотором множестве. Доказать, что $A \cap B \subseteq C$ тогда и только тогда, когда $A \subseteq \overline{B} \cup C$.

§ 2. Число отображений и подмножеств, биномиальные коэффициенты

2.1. Пусть X — множество людей в некотором помещении, Y — множество стульев в этом помещении и пусть:

а) каждому человеку поставлен в соответствие стул, на котором он сидит;

б) каждому стулу поставлен в соответствие человек, который на нём сидит.

В каких случаях а) и б) определяют отображения $X \to Y$ и $Y \to X$? В каких случаях эти отображения инъективны, сюръективны, биективны?

2.2. Доказать, что если множество X бесконечно, а его подмножество Y конечно, то существует биективное отображение $X \setminus Y \to X$.

2.3. Пусть $f : X \to Y$ — отображение. Отображение $g : Y \to X$ называется *левым* (соответственно *правым*) *обратным* для f, если $g \circ f = 1_X$ (соответственно $f \circ g = 1_Y$). Доказать, что:

а) отображение f инъективно в том и только том случае, если оно обладает левым обратным;

б) отображение f сюръективно в том и только том случае, если оно обладает правым обратным.

2.4. Установить биективное соответствие между множеством всех отображений множества X во множество $\{0, 1\}$ и множеством 2^X (см. 1.2) и найти $|2^X|$, если $|X| = n$.

2.5. Пусть $|X| = m$, $|Y| = n$. Найти число:

а) отображений;

б) инъективных отображений;

в) биективных отображений;

г) сюръективных отображений;

множества X во множество Y.

2.6. Пусть $|X| = n$. Найти число $\binom{n}{m}$ всех подмножеств в X, состоящих из m элементов (это число называется также *числом сочетаний из n элементов по m* и часто обозначается символом C_n^m).

2.7. Пусть $|X| = n$. Найти число всех подмножеств в X, состоящих из чётного числа элементов.

2.8. Доказать формулу *бинома Ньютона*

$$(a + b)^n = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} a^i b^{n-i}, \qquad n \in \mathbb{N}.$$

2.9. Пусть $|X| = n$ и $m_1 + \ldots + m_k = n$ $(m_i \geqslant 0)$. Найти число $\binom{n}{m_1, \ldots, m_k}$ упорядоченных разбиений множества X на k подмножеств, содержащих соответственно $m_1, \ldots, m_k$ элементов.

2.10. Доказать равенства:

а) $(x_1 + \ldots + x_k)^n = \sum\limits_{\substack{(m_1,\ldots,m_k) \\ m_1+\ldots+m_k=n,\ m_i\geqslant 0}} \binom{n}{m_1, \ldots, m_k} x_1^{m_1} \ldots x_k^{m_k}$;

б) $\sum\limits_{\substack{(m_1,\ldots,m_k) \\ m_1+\ldots+m_k=n,\ m_i\geqslant 0}} \binom{n}{m_1, \ldots, m_k} = k^n$.

2.11. Доказать равенства:

а) $\binom{n}{m} = \binom{n}{n-m}$; б) $\sum\limits_{i=0}^{n} \binom{n}{i} = 2^n$;

в) $\sum_{i=0}^{n}(-1)^i\binom{n}{i} = 0;$ г) $\sum_{i=1}^{n} i\binom{n}{i} = n2^{n-1};$

д) $\sum_{i=1}^{n}(-1)^i i\binom{n}{i} = 0, \quad n > 1;$

е) $\sum_{i=0}^{m}\binom{p}{i}\binom{q}{m-i} = \binom{p+q}{m};$

ж) $\binom{n}{k-1} + \binom{n}{k} = \binom{n+1}{k}, \quad 1 \leqslant k \leqslant n;$

з) $\sum_{i=1}^{r}\binom{r+1}{i}(1^i + 2^i + \ldots + n^i) = (n+1)^{r+1} - (n+1);$

и) $\binom{k}{k} + \binom{k+1}{k} + \ldots + \binom{n+k}{k} = \binom{n+k+1}{k+1};$

к) $\sum_{i=0}^{n}\frac{p(p+1)\ldots(p+i-1)}{i!} = \frac{(p+1)\ldots(p+n)}{n!};$

л) $\sum_{i=k}^{n-l}\binom{i}{k}\binom{n-i}{l} = \binom{n+1}{k+l+1}, \quad n \geqslant k+l \geqslant 0.$

2.12. Доказать, что $x^m + x^{-m}$ является многочленом степени m от $x + x^{-1}$.

2.13. Найти число разбиений числа n в упорядоченную сумму из k неотрицательных слагаемых.

§ 3. Перестановки

3.1. Перемножить перестановки в указанном и обратном порядках:

а) $\begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 4 & 5\\ 3 & 4 & 1 & 5 & 2\end{pmatrix} \times \begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 4 & 5\\ 5 & 3 & 1 & 2 & 4\end{pmatrix};$

б) $\begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6\\ 3 & 6 & 4 & 5 & 2 & 1\end{pmatrix} \times \begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6\\ 2 & 4 & 1 & 5 & 6 & 3\end{pmatrix};$

в) $\begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 4 & 5\\ 2 & 1 & 3 & 5 & 4\end{pmatrix} \times \begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 4 & 5\\ 4 & 5 & 3 & 2 & 1\end{pmatrix};$

г) $\begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6\\ 3 & 5 & 1 & 6 & 2 & 4\end{pmatrix} \times \begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6\\ 6 & 3 & 4 & 2 & 1 & 5\end{pmatrix}.$

3.2. Записать в виде произведения независимых циклов перестановки:

а) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 5 & 4 & 1 & 7 & 3 & 6 & 2 \end{pmatrix}$;

б) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 3 & 1 & 6 & 7 & 5 & 2 & 4 \end{pmatrix}$;

в) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 3 & 7 & 6 & 5 & 1 & 2 & 4 \end{pmatrix}$;

г) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 4 & 3 & 6 & 7 & 1 & 5 & 2 \end{pmatrix}$;

д) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & \ldots & 2n-1 & 2n \\ 2 & 1 & 4 & 3 & \ldots & 2n & 2n-1 \end{pmatrix}$;

е) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & \ldots & n & n+1 & n+2 & \ldots & 2n \\ n+1 & n+2 & \ldots & 2n & 1 & 2 & \ldots & n \end{pmatrix}$.

3.3. Записать в виде таблицы перестановки:

а) $(1\,3\,6)(2\,4\,7)(5)$;

б) $(1\,6\,5\,4\,2\,3\,7)$;

в) $(1\,3\,5\ldots 2n-1)(2\,4\,6\ldots 2n)$.

3.4. Перемножить перестановки:

а) $[(1\,3\,5)(2\,4\,6\,7)]\cdot[(1\,4\,7)(2\,3\,5\,6)]$;

б) $[(1\,3)(5\,7)(2\,4\,6)]\cdot[(1\,3\,5)(2\,4)(6\,7)]$.

3.5. Определить число инверсий в последовательностях:

а) 2, 3, 5, 4, 1;

б) 6, 3, 1, 2, 5, 4;

в) 1, 9, 6, 3, 2, 5, 4, 7, 8;

г) 7, 5, 6, 4, 1, 3, 2;

д) $1, 3, 5, 7, \ldots, 2n-1, 2, 4, 6, 8, \ldots, 2n$;

е) $2, 4, 6, \ldots, 2n, 1, 3, 5, \ldots, 2n-1$;

ж) $k, k+1, \ldots, n, 1, 2, \ldots, k-1$;

з) $k, k+1, \ldots, n, k-1, k-2, \ldots, 2, 1$.

3.6. Определить четность перестановок:

а) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 5 & 6 & 4 & 7 & 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$;

б) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 3 & 5 & 2 & 1 & 6 & 4 & 8 & 7 \end{pmatrix}$;

в) $\begin{pmatrix} 3 & 5 & 6 & 4 & 2 & 1 & 7 \\ 2 & 4 & 1 & 7 & 6 & 5 & 3 \end{pmatrix}$;

г) $\begin{pmatrix} 2 & 7 & 5 & 4 & 8 & 3 & 6 & 1 \\ 3 & 5 & 8 & 7 & 2 & 6 & 1 & 4 \end{pmatrix}$;

д) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \multicolumn{4}{c}{\dots\dots\dots\dots\dots\dots} & n-1 & n \\ 2 & 4 & 6 & \dots & 1 & 3 & 5 & \multicolumn{2}{c}{\dots\dots\dots\dots} \end{pmatrix}$;

е) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \multicolumn{4}{c}{\dots\dots\dots\dots\dots\dots} & n-1 & n \\ 1 & 3 & 5 & \dots & 2 & 4 & 6 & \multicolumn{2}{c}{\dots\dots\dots\dots} \end{pmatrix}$;

ж) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & n-1 & n \\ n & n-1 & n-2 & \dots & 2 & 1 \end{pmatrix}$;

з) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & \dots & n-1 & n \\ n & 1 & n-1 & 2 & \multicolumn{3}{c}{\dots\dots\dots\dots} \end{pmatrix}$.

3.7. Определить четность перестановок:

а) $(1\,2\,3\dots k)$;

б) $(i_1\,i_2\dots i_k)$;

в) $(1\,4\,7\,3)(6\,7\,2\,4\,8)(3\,2)$;

г) $(i_1\,i_2)(i_3\,i_4)(i_5\,i_6)\dots(i_{2k-1}\,i_{2k})$;

д) $(i_1\dots i_p)(j_1\dots j_q)(k_1\dots k_r)(l_1\dots l_s)$.

3.8. Число инверсий в нижней строке перестановки

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ a_1 & a_2 & \dots & a_n \end{pmatrix}$$

равно k. Найти число инверсий в нижней строке перестановки

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ a_n & a_{n-1} & \dots & a_1 \end{pmatrix}.$$

3.9. Рассматриваются перестановки

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ a_1 & a_2 & \dots & a_n \end{pmatrix}$$

степени n.

а) В какой строке $(a_1, \dots, a_n)$ число инверсий наибольшее?

б) Сколько инверсий образует число 1, стоящее в нижней строке на k-м месте?

в) Сколько инверсий образует число n, стоящее в нижней строке на k-м месте?

3.10. Пусть в последовательности $a_1, \ldots, a_n$ чисел $1, 2, \ldots, n$ переставлены два числа, q и $q+1$, где $1 \leqslant q \leqslant n-1$. Доказать, что число инверсий изменится на ± 1.

3.11. Пусть задана перестановка

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \ldots & n \\ a_1 & a_2 & \ldots & a_n \end{pmatrix},$$

причём число инверсий в нижней строке равно k. Доказать, что:

а) σ является произведением k транспозиций вида $(q, q+1)$, где $1 \leqslant q \leqslant n-1$;

б) σ нельзя представить в виде произведения менее k транспозиций указанного вида.

3.12. Пусть $\pi, \sigma \in \mathbf{S}_n$, причём σ является циклом длины k. Доказать, что $\pi\sigma\pi^{-1}$ также является циклом длины k.

3.13. Выяснить, как изменяется разложение перестановки в произведение независимых циклов при умножении её на некоторую транспозицию. Что происходит при этом с декрементом перестановки?

3.14. Доказать, что всякая перестановка $\sigma \in \mathbf{S}_n$ может быть представлена как произведение транспозиций вида:

а) $(1\,2), (1\,3), \ldots, (1, n)$;

б) $(1\,2), (2\,3), \ldots, (n-1, n)$.

3.15. Доказать, что всякая перестановка $\sigma \in \mathbf{S}_n$ может быть представлена как произведение нескольких сомножителей, равных циклам $(1\,2)$ и $(1\,2\,3 \ldots n)$.

3.16. Доказать, что всякая чётная перестановка может быть представлена как:

а) произведение тройных циклов;

б) произведение циклов вида $(123), (124), \ldots, (12n)$.

3.17. Пусть f_{ij} — однин из двучленов $x_i - x_j$ или $x_j - x_i$, где i и j — произвольные натуральные числа от 1 до n, $i < j$, и пусть $f(x_1, \ldots, x_n)$ — произведение всех этих двучленов. Доказать, что для любой перестановки $\sigma \in \mathbf{S}_n$

$$f(x_{\sigma(1)}, \ldots, x_{\sigma(n)}) = (\operatorname{sgn} \sigma) \cdot f(x_1, \ldots, x_n).$$

* * *

3.18. Пусть T — некоторый набор транспозиций из $\mathbf{S}_n$ и Γ — граф со множеством вершин $1, 2, \ldots, n$ и множеством рёбер T. Доказать, что:

а) всякая перестановка из $\mathbf{S}_n$ представляется в виде произведения транспозиций из T тогда и только тогда, когда граф Γ связный;

б) при $|T| < n-1$ существует перестановка из $\mathbf{S}_n$, не представимая в виде произведения транспозиций из набора T.

3.19. Пусть задано число k, причём $1 \leqslant k \leqslant \binom{n}{2}$. Доказать, что в $\mathbf{S}_n$ существует перестановка

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & \ldots & n \\ i_1 & i_2 & \ldots & i_n \end{pmatrix},$$

число инверсий в нижней строке которой равно k.

3.20. Найти сумму числа инверсий нижних строк во всех перестановках

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & \ldots & n \\ i_1 & i_2 & \ldots & i_n \end{pmatrix}.$$

3.21. Пусть $|X| = m$, $|Y| = n$, $\sigma \in S_X$, $\tau \in S_Y$. Определим $\xi \in$ $\in S_{X \times Y}$, полагая

$$\xi(x, y) = (\sigma(x), \tau(y)), \qquad x \in X, \quad y \in Y.$$

Найти:

а) $\operatorname{sgn} \xi$, если заданы $\operatorname{sgn} \sigma$ и $\operatorname{sgn} \tau$;

б) длины независимых циклов в разложении перестановки ξ, если известны длины $k_1, \ldots, k_s$ и $l_1, \ldots, l_t$ независимых циклов в разложениях перестановок σ и τ (с учетом циклов длины 1). Получить отсюда ещё одно решение задачи а).

3.22. Пусть $d = d(\sigma)$ — декремент перестановки σ. Доказать, что:

а) $\operatorname{sgn} \sigma = (-1)^d$;

б) перестановку σ можно представить в виде произведения d транспозиций;

в) перестановку σ нельзя представить в виде произведения менее, чем d транспозиций.

3.23. Пусть $\sigma \in \mathbf{S}_n$. Доказать, что $\sigma = \alpha\beta$, где $\alpha, \beta \in \mathbf{S}_n$ и $\alpha^2 =$ $= \beta^2 = \varepsilon$.

§ 4. Рекуррентные соотношения. Математическая индукция

4.1. Пусть $f(x) = x^2 - ax - b$ — характеристический многочлен рекуррентного уравнения

$$u(n) = au(n-1) + bu(n-2) \quad (n \geqslant n_0 + 2).$$

Доказать, что:

а) функция $u(n) = \alpha^n$ является решением данного уравнения, если α — корень $f(x)$;

б) функция $u(n) = n\alpha^n$ является решением данного уравнения, если α — двойной корень $f(x)$;

в) если $f(x)$ имеет различные ненулевые корни α_1 и α_2, то всякое решение данного уравнения имеет вид

$$u(n) = C_1\alpha_1^n + C_2\alpha_2^n,$$

причём постоянные C_1 и C_2 определяются однозначно;

г) если $f(x)$ имеет двойной корень α, то всякое решение данного уравнения имеет вид

$$u(n) = C_1\alpha^n + C_2 n\alpha^n,$$

причём постоянные C_1 и C_2 определяются однозначно, если $\alpha \neq 0$.

4.2. Решить рекуррентные уравнения ($n_0 = 0$):

а) $u(n) = 3u(n-1) - 2u(n-2), \quad u(0) = -2, \quad u(1) = 1$;

б) $u(n) = -2u(n-1) - u(n-2), \quad u(0) = -1, \quad u(1) = -1$.

4.3. Доказать, что при $a \neq 1$

$$1 + 2a + 3a^2 + \ldots + na^{n-1} = \frac{na^{n+1} - (n+1)a^n + 1}{(a-1)^2}.$$

4.4. Вычислить $u(0) + u(1) + \ldots + u(n)$, где $n \geqslant 2$ и:

а) $u(n) = 5u(n-1) - 4u(n-2), \quad u(0) = 0, \quad u(1) = 3$;

б) $u(n) = 2u(n-1) - u(n-2), \quad u(0) = 1, \quad u(1) = -1$;

в) $u(n) = 4u(n-1) - 4u(n-2), \quad u(0) = -2, \quad u(1) = 0$.

4.5. Пусть $u(0) = 0$, $u(1) = 1$ и $u(n) = u(n-1) + u(n-2)$, где $n \geqslant 2$. Числа $u(n)$ называются *числами Фибоначчи*. Вычислить $u(n)$.

4.6. Пусть $a \geqslant -1$. Доказать, что для любого натурального числа n справедливо неравенство $(1+a)^n \geqslant 1+na$.

4.7. Доказать, что для любого натурального числа $n \geqslant 2$ справедливо неравенство
$$\frac{4^n}{n+1} < \frac{(2n)!}{(n!)^2}.$$

4.8. Доказать, что для любого натурального числа n:

а) $(n+1)(n+2)\ldots(n+n) = 2^n \cdot 1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \ldots \cdot (2n-1)$;

б) $1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + \ldots + (n-1) \cdot n = \dfrac{(n-1)n(n+1)}{3}$;

в) $1 \cdot 2 \cdot 3 + 2 \cdot 3 \cdot 4 + \ldots + n(n+1)(n+2) = \dfrac{n(n+1)(n+2)(n+3)}{4}$;

г) $\dfrac{1}{4 \cdot 5} + \dfrac{1}{5 \cdot 6} + \dfrac{1}{6 \cdot 7} + \ldots + \dfrac{1}{(n+3)(n+4)} = \dfrac{n}{4(n+4)}$;

д) $\left(1 - \dfrac{1}{4}\right)\left(1 - \dfrac{1}{9}\right)\ldots\left(1 - \dfrac{1}{(n+1)^2}\right) = \dfrac{n+2}{2n+2}$;

е) $1 - \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{3} - \dfrac{1}{4} + \ldots + \dfrac{1}{2n-1} - \dfrac{1}{2n} = \dfrac{1}{n+1} + \dfrac{1}{n+2} + \ldots + \dfrac{1}{2n}$;

ж) $\dfrac{1}{1{\cdot}2{\cdot}3} + \dfrac{1}{2{\cdot}3{\cdot}4} + \ldots + \dfrac{1}{n(n+1)(n+2)} = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{(n+1)(n+2)}\right)$.

4.9. Доказать, что при любом натуральном n:

а) число $n^3 + 5n$ делится на 6;

б) число $2n^3 + 3n^2 + 7n$ делится на 6;

в) число $n^5 - n$ делится на 30;

г) число $2^{2n} - 1$ делится на 3;

д) число $11^{6n+3} + 1$ делится на 148;

е) число $n^3 + (n+1)^3 + (n+2)^3$ делится на 9;

ж) число $7^{2n} - 4^{2n}$ делится на 33.

4.10. Доказать, что для любого натурального числа n выполнены неравенства
$$\frac{n}{2} < 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{2^n - 1} \leqslant n.$$

* * *

4.11. Пусть $u(n)$ — последовательность чисел Фибоначчи. Доказать, что:

а) $u(1) + \ldots + u(n) = u(n+2) - 1$;

б) $u(1)^2 + \ldots + u(n)^2 = u(n)u(n+1)$;

в) $u(n+1)^2 - u(n-1)^2 = u(2n)$;

г) $u(1)^3 + \ldots + u(n)^3 = \dfrac{1}{10}[u(3n+2) + (-1)^{n+1}6u(n-1) + 5]$;

д) $u(m+n) = u(m)u(n-1) + u(m+1)u(n)$;

е) если n делит m, то $u(n)$ делит $u(m)$;

ж) $(u(n), u(m)) = u((n,m))$.

4.12. Пусть $u_0(t) = 0$, $u_1(t) = 1$ и $u_n(t) = tu_{n-1}(t) - u_{n-2}(t)$. Доказать, что:

а) $u_n(t) = t^{n-1} - \binom{n-2}{1}t^{n-3} + \binom{n-3}{2}t^{n-5} + \ldots$;

б) если $t = 2\cos\theta$, то $u_n(t) = \dfrac{\sin n\theta}{\sin\theta}$;

в) $u_n(t)^2 - u_k(t)^2 = u_{n-k}(t)u_{n+k}(t)$, где $k = 0, 1, \ldots, n$;

г) $u_{n+1}(t)^2 - u_n(t)^2 = u_{2n+1}(t)$.

4.13. Пусть r и $\cos r\pi$ — рациональные числа. Доказать, что $\cos r\pi = 0, \pm 1/2, \pm 1$.

4.14. На сколько частей разбивают плоскость n прямых, находящихся в общем положении (т.е. никакие две из них не параллельны и никакие три не пересекаются в одной точке)?

§ 5. Суммирование

5.1. Найти суммы:

а) $1^2 + 2^2 + \ldots + n^2$; б) $1^3 + 2^3 + \ldots + n^3$.

5.2. Доказать, что сумма $1^k + 2^k + \ldots + n^k$ представляет собой многочлен от n степени $k+1$.

* * *

5.3. Пусть $N(\sigma) = |\{i \mid \sigma(i) = i\}|$ — число неподвижных элементов перестановки $\sigma \in \mathbf{S}_n$ и

$$\sum_{\sigma \in \mathbf{S}_n} (N(\sigma))^s = \gamma(s)n!, \qquad 1 \leqslant s \leqslant n.$$

Доказать, что $\gamma(1) = 1$, $\gamma(s)$ не зависит от n и

$$\gamma(s+1) = \gamma(s) + \binom{s}{1}\gamma(s-1) + \ldots + \binom{s}{k}\gamma(s-k) + \ldots + \binom{s}{s-1}\gamma(1) + 1.$$

5.4. Доказать, что

$$\sum_{d|n} \mu(d) = \begin{cases} 1 & \text{при} \quad n = 1, \\ 0 & \text{при} \quad n > 1, \end{cases}$$

где $\mu(n)$ — функция Мёбиуса.

5.5. Пусть $f(n)$ и $g(n)$ — две функции $\mathbb{N} \to \mathbb{N}$. Доказать, что эквивалентны равенства:

а) $g(n) = \sum_{d|n} f(d), \qquad f(n) = \sum_{d|n} \mu(d) g\left(\frac{n}{d}\right);$

б) $g(n) = \prod_{d|n} f(d), \qquad f(n) = \prod_{d|n} g\left(\frac{n}{d}\right)^{\mu(d)}.$

5.6. Доказать, что функция Эйлера $\varphi(n)$ и функция Мёбиуса $\mu(n)$ связаны соотношением

$$\sum_{d|n} \frac{\mu(d)}{d} = \frac{\varphi(n)}{n}.$$

Глава II

АРИФМЕТИЧЕСКИЕ ПРОСТРАНСТВА И ЛИНЕЙНЫЕ УРАВНЕНИЯ

§ 6. Арифметические пространства

6.1. Найти линейную комбинацию $3a_1 + 5a_2 - a_3$ векторов

$$a_1 = (4, 1, 3, -2), \qquad a_2 = (1, 2, -3, 2), \qquad a_3 = (16, 9, 1, -3).$$

6.2. Найти вектор x из уравнений:

а) $a_1 + 2a_2 + 3a_3 + 4x = 0$, где $a_1 = (5, -8, -1, 2)$,
$a_2 = (2, -1, 4, -3)$, $a_3 = (-3, 2, -5, 4)$;

б) $3(a_1 - x) + 2(a_2 + x) = 5(a_3 + x)$, где $a_1 = (2, 5, 1, 3)$,
$a_2 = (10, 1, 5, 10)$, $a_3 = (4, 1, -1, 1)$.

6.3. Выяснить, являются ли следующие системы векторов линейно независимыми:

а) $a_1 = (1, 2, 3)$, $a_2 = (3, 6, 7)$;

б) $a_1 = (4, -2, 6)$, $a_2 = (6, -3, 9)$;

в) $a_1 = (2, -3, 1)$, $a_2 = (3, -1, 5)$, $a_3 = (1, -4, 3)$;

г)$a_1 = (5, 4, 3)$, $a_2 = (3, 3, 2)$, $a_3 = (8, 1, 3)$;

д) $a_1 = (4, -5, 2, 6)$, $a_2 = (2, -2, 1, 3)$, $a_3 = (6, -3, 3, 9)$,
$a_4 = (4, -1, 5, 6)$;

е) $a_1 = (1, 0, 0, 2, 5)$, $a_2 = (0, 1, 0, 3, 4)$, $a_3 = (0, 0, 1, 4, 7)$,
$a_4 = (2, -3, 4, 11, 12)$.

6.4. Из координат каждого вектора данной системы векторов одного и того же числа измерений выберем координаты, стоящие на определённых (одних и тех же для всех векторов) местах, и сохраним их порядок; полученную систему векторов будем называть *укороченной* для первой системы, а первую систему будем называть *удлинённой* для второй.

Доказать, что:

а) укороченная система любой линейно зависимой системы векторов линейно зависима;

б) удлинённая система любой линейно независимой системы векторов линейно независима.

6.5. Доказать, что если векторы a_1, a_2, a_3 линейно зависимы и вектор a_3 не выражается линейно через векторы a_1 и a_2, то a_1 и a_2 различаются между собой лишь числовым множителем.

6.6. Доказать, что если векторы $a_1, a_2, \ldots, a_k$ линейно независимы, а векторы $a_1, a_2, \ldots, a_k, b$ линейно зависимы, то вектор b линейно выражается через $a_1, a_2, \ldots, a_k$.

6.7. Пусть задана линейно независимая система векторов $a_1, \ldots \ldots, a_k$. Выяснить, являются ли линейно зависимыми системы векторов:

а) $b_1 = 3a_1 + 2a_2 + a_3 + a_4, \quad b_2 = 2a_1 + 5a_2 + 3a_3 + 2a_4, \quad b_3 = 3a_1 + 4a_2 + 2a_3 + 3a_4;$

б) $b_1 = 3a_1 + 4a_2 - 5a_3 - 2a_4 + 4a_5, \quad b_2 = 8a_1 + 7a_2 - 2a_3 + 5a_4 - 10a_5, \quad b_3 = 2a_1 - a_2 + 8a_3 - a_4 + 2a_5;$

в) $b_1 = a_1, \quad b_2 = a_1 + a_2, \quad b_3 = a_1 + a_2 + a_3, \quad \ldots, \quad \ldots, \quad b_k = a_1 + a_2 + \ldots + a_k;$

г) $b_1 = a_1, \quad b_2 = a_1 + 2a_2, \quad b_3 = a_1 + 2a_2 + 3a_3, \quad \ldots, \quad \ldots, \quad b_k = a_1 + 2a_2 + 3a_3 + \ldots + ka_k;$

д) $b_1 = a_1 + a_2, \quad b_2 = a_2 + a_3, \quad b_3 = a_3 + a_4, \quad \ldots, \quad \ldots, \quad b_{k-1} = a_{k-1} + a_k, \quad b_k = a_k + a_1;$

е) $b_1 = a_1 - a_2, \quad b_2 = a_2 - a_3, \quad b_3 = a_3 - a_4, \quad \ldots, \quad \ldots, \quad b_{k-1} = a_{k-1} - a_k, \quad b_k = a_k - a_1.$

6.8. Даны векторы

$$a_1 = (0,1,0,2,0), \quad a_2 = (7,4,1,8,3), \quad a_3 = (0,3,0,4,0), \quad a_4 = (1,9,5,7,1), \quad a_5 = (0,1,0,5,0).$$

Существуют ли числа c_{ij} такие, что векторы

$$b_i = \sum_{j=1}^{5} c_{ij} a_j, \qquad i = 1,2,3,4,5,$$

линейно независимы?

6.9. Найти все значения λ, при которых вектор b линейно выражается через векторы a_1, a_2, a_3:

а) $a_1 = (2,3,5)$, $a_2 = (3,7,8)$, $a_3 = (1,-6,1)$, $b = (7,-2,\lambda)$;

б) $a_1 = (4,4,3)$, $a_2 = (7,2,1)$, $a_3 = (4,1,6)$, $b = (5,9,\lambda)$;

в) $a_1 = (3,4,2)$, $a_2 = (6,8,7)$, $a_3 = (15,20,11)$, $b = (9,12,\lambda)$;

г) $a_1 = (3,2,5)$, $a_2 = (2,4,7)$, $a_3 = (5,6,\lambda)$, $b = (1,3,5)$;

д) $a_1 = (3,2,6)$, $a_2 = (5,1,3)$, $a_3 = (7,3,9)$, $b = (\lambda,2,5)$.

6.10. Найти все базисы системы векторов:

а) $a_1 = (1,2,0,0)$, $a_2 = (1,2,3,4)$, $a_3 = (3,6,0,0)$;

б) $a_1 = (4,-1,3,-2)$, $a_2 = (8,-2,6,-4)$, $a_3 = (3,-1,4,-2)$, $a_4 = (6,-2,8,-4)$;

в) $a_1 = (1,2,3,4)$, $a_2 = (2,3,4,5)$, $a_3 = (3,4,5,6)$, $a_4 = (4,5,6,7)$;

г) $a_1 = (2,1,-3,1)$, $a_2 = (2,2,-6,2)$, $a_3 = (6,3,-9,3)$, $a_4 = (1,1,1,1)$;

д) $a_1 = (3,2,3)$, $a_2 = (2,3,4,)$, $a_3 = (3,2,3)$, $a_4 = (4,3,4)$, $a_5 = (1,1,1)$.

6.11. В каком случае система векторов обладает единственным базисом?

6.12. Найти какой-нибудь базис системы векторов и выразить через этот базис остальные векторы системы:

а) $a_1 = (5,2,-3,1)$, $a_2 = (4,1,-2,3)$, $a_3 = (1,1,-1,-2)$, $a_4 = (3,4,-1,2)$, $a_5 = (7,-6,-7,0)$;

б) $a_1 = (2,-1,3,5)$, $a_2 = (4,-3,1,3)$, $a_3 = (3,-2,3,4)$, $a_4 = (4,-1,-15,17)$;

в) $a_1 = (1,2,3,-4)$, $a_2 = (2,3,-4,1)$, $a_3 = (2,-5,8,-3)$, $a_4 = (5,26,-9,-12)$, $a_5 = (3,-4,1,2)$;

г) $a_1 = (2,3,-4,-1)$, $a_2 = (1,-2,1,3)$, $a_3 = (5,-3,-1,8)$, $a_4 = (3,8,-9,-5)$;

д) $a_1 = (2,2,7,-1)$, $a_2 = (3,-1,2,4)$, $a_3 = (1,1,3,1)$;

е) $a_1 = (3,2,-5,4)$, $a_2 = (3,-1,3,-3)$, $a_3 = (3,5,-13,11)$;

ж) $a_1 = (2,1)$, $a_2 = (3,2)$, $a_3 = (1,1)$, $a_4 = (2,3)$;

з) $a_1 = (2,1,-3)$, $a_2 = (3,1,-5)$, $a_3 = (4,2,-1)$, $a_4 = (1,0,-7)$;

и) $a_1 = (2,3,5,-4,1)$, $a_2 = (1,-1,2,3,5)$, $a_3 = (3,7,8,-11,-3)$, $a_4 = (1,-1,1,-2,3)$;

к) $a_1 = (2, -1, 3, 4, -1)$, $a_2 = (1, 2, -3, 1, 2)$,
$a_3 = (5, -5, 12, 11, -5)$, $a_4 = (1, -3, 6, 3, -3)$;

л) $a_1 = (4, 3, -1, 1, -1)$, $a_2 = (2, 1, -3, 2, -5)$,
$a_3 = (1, -3, 0, 1, -2)$, $a_4 = (1, 5, 2, -2, 6)$.

6.13. Пусть векторы $a_1, a_2, \ldots, a_k$ линейно независимы. Найти все базисы системы векторов

$$b_1 = a_1 - a_2, \quad b_2 = a_2 - a_3, \quad b_3 = a_3 - a_4, \quad \ldots$$
$$\ldots, \quad b_{k-1} = a_{k-1} - a_k, \quad b_k = a_k - a_1.$$

6.14. Пусть дана система векторов

$$a_i = (a_{i1}, a_{i2}, \ldots, a_{in}) \quad \text{где} \quad i = 1, 2, \ldots, s; \quad s \leqslant n.$$

Доказать, что если

$$|a_{jj}| > \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^{s} |a_{ij}|$$

для всякого $j = 1, \ldots, s$, то данная система векторов линейно независима.

6.15. Доказать, что если целочисленные векторы $a_1, a_2, \ldots, a_k \in \in \mathbb{Z}^n$ линейно зависимы над полем $\mathbb{Q}$, то найдутся такие целые числа λ_1, λ_2, ..., λ_k, взаимно простые в совокупности, что

$$\lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 + \ldots + \lambda_k a_k = 0.$$

6.16. Доказать,что если система целочисленных векторов линейно независима над полем вычетов по модулю p для некоторого простого числа p, то данная система векторов линейно независима и над полем рациональных чисел.

6.17. Пусть система целочисленных векторов линейно независима над полем $\mathbb{Q}$. Доказать, что найдется лишь конечное число (возможно, нуль) простых чисел p таких, что векторы данной системы линейно зависимы по модулю p.

6.18. Для данных систем целочисленных векторов указать все простые числа p, по модулю которых эти системы линейно зависимы:

а) $a_1 = (0, 1, 1, 1)$, $a_2 = (1, 0, 1, 1)$, $a_3 = (1, 1, 0, 1)$,
$a_4 = (1, 1, 1, 0)$;

б) $a_1 = (1, 0, 1, 1)$, $a_2 = (2, 3, 4, 3)$, $a_3 = (1, 3, 1, 1)$.

§ 7. Ранг матрицы

7.1. Найти ранг следующих матриц с помощью окаймления миноров и элементарных преобразований:

а) $\begin{pmatrix} 8 & 2 & 2 & -1 & 1 \\ 1 & 7 & 4 & -2 & 5 \\ -2 & 4 & 2 & -1 & 3 \end{pmatrix}$; б) $\begin{pmatrix} 1 & 7 & 7 & 9 \\ 7 & 5 & 1 & -1 \\ 4 & 2 & -1 & -3 \\ -1 & 1 & 3 & 5 \end{pmatrix}$;

в) $\begin{pmatrix} 4 & 1 & 7 & -5 & 1 \\ 0 & -7 & 1 & -3 & -5 \\ 3 & 4 & 5 & -3 & 2 \\ 2 & 5 & 3 & -1 & 3 \end{pmatrix}$; г) $\begin{pmatrix} 8 & -4 & 5 & 5 & 9 \\ 1 & -3 & -5 & 0 & -7 \\ 7 & -5 & 1 & 4 & 1 \\ 3 & -1 & 3 & 2 & 5 \end{pmatrix}$;

д) $\begin{pmatrix} -6 & 4 & 8 & -1 & 6 \\ -5 & 2 & 4 & 1 & 3 \\ 7 & 2 & 4 & 1 & 3 \\ 2 & 4 & 8 & -7 & 6 \\ 3 & 2 & 4 & -5 & 3 \end{pmatrix}$; е) $\begin{pmatrix} 77 & 32 & 6 & 5 & 3 \\ 32 & 14 & 3 & 2 & 1 \\ 6 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 5 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 4 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$;

ж) $\begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 2 & -1 & 1 & 2 \\ 4 & 3 & 2 & -1 & 1 \\ 12 & 9 & 8 & -7 & 3 \\ -12 & -5 & -8 & 5 & 1 \end{pmatrix}$; з) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$;

и) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$; к) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \\ 1 & 4 & 1 & 1 \\ 5 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$;

л) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ \multicolumn{7}{c}{\dotfill} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

7.2. Найти ранг следующих матриц при различных значениях параметра λ:

а) $\begin{pmatrix} 7-\lambda & -12 & 6 \\ 10 & -19-\lambda & 10 \\ 12 & -24 & 13-\lambda \end{pmatrix}$;

б) $\begin{pmatrix} 1-\lambda & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1-\lambda & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2-\lambda & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 3-\lambda \end{pmatrix}$;

в) $\begin{pmatrix} 3 & 4 & 2 & 2 \\ 3 & 17 & 7 & 1 \\ 1 & 10 & 4 & \lambda \\ 4 & 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$; г) $\begin{pmatrix} 1 & \lambda & -1 & 2 \\ 2 & -1 & \lambda & 5 \\ 1 & 10 & -6 & 1 \end{pmatrix}$;

д) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2-\lambda^2 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 & 5 \\ 2 & 3 & 1 & 9-\lambda^2 \end{pmatrix}$; е) $\begin{pmatrix} -\lambda & 1 & 2 & 3 & 1 \\ 1 & -\lambda & 3 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & -\lambda & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 1 & -\lambda & 1 \end{pmatrix}$;

ж) $\begin{pmatrix} \lambda & 1 & 2 & \ldots & n-1 & 1 \\ 1 & \lambda & 2 & \ldots & n-1 & 1 \\ 1 & 2 & \lambda & \ldots & n-1 & 1 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 1 & 2 & 3 & \ldots & \lambda & 1 \\ 1 & 2 & 3 & \ldots & n & 1 \end{pmatrix}$; з) $\begin{pmatrix} 1 & \lambda & \lambda^2 & \ldots & \lambda^n \\ 2 & 1 & \lambda & \ldots & \lambda^{n-1} \\ 2 & 2 & 1 & \ldots & \lambda^{n-2} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 2 & 2 & 2 & \ldots & 1 \end{pmatrix}$.

7.3. Доказать, что если ранг матрицы A не изменяется при добавлении к ней любого столбца матрицы B с тем же числом строк, то он не меняется при добавлении к A всех столбцов матрицы B.

7.4. Доказать, что ранг произведения матриц не превосходит ранга каждой матрицы-сомножителя.

7.5. Доказать, что ранг матрицы $(A|B)$, полученной приписыванием к матрице A матрицы B, не превосходит суммы рангов матриц A и B.

7.6. Доказать, что ранг суммы матриц не превосходит суммы рангов этих матриц.

7.7. Доказать, что всякую матрицу ранга r можно представить в виде суммы r матриц ранга 1, но нельзя представить в виде суммы меньшего числа таких матриц.

7.8. Доказать, что если ранг матрицы равен r, то минор, стоящий на пересечении любых r линейно независимых строк и линейно независимых столбцов, отличен от 0.

7.9. Пусть A — квадратная матрица порядка $n > 1$ и r — её ранг. Найти ранг присоединённой матрицы $\hat{A} = (A_{ij})$, где A_{ij} — алгебраическое дополнение элемента a_{ji} матрицы A.

7.10. Пусть A и B — матрицы с вещественными элементами с одинаковым числом строк. Доказать, что

$$r\begin{pmatrix} A & B \\ 2A & -5B \end{pmatrix} = r(A) + r(B).$$

7.11. Пусть A и B — квадратные матрицы одного порядка. Доказать, что

$$r\begin{pmatrix} A & AB \\ B & B + B^2 \end{pmatrix} = r(A) + r(B).$$

7.12. Доказать, что каждая матрица ранга 1 имеет вид

$$\begin{pmatrix} b_1c_1 & b_1c_2 & \ldots & b_1c_n \\ b_2c_1 & b_2c_2 & \ldots & b_2c_n \\ \multicolumn{4}{c}{\dotfill} \\ b_mc_1 & b_mc_2 & \ldots & b_mc_n \end{pmatrix} = {}^tB \cdot C,$$

где $B = (b_1, b_2, \ldots, b_m)$, $C = (c_1, c_2, \ldots, c_n)$.

7.13. Пусть A_1, A_2, …, A_k — матрицы с одинаковым числом строк, $C = (c_{ij})$ — невырожденная матрица порядка k. Доказать, что ранг матрицы

$$\begin{pmatrix} c_{11}A_1 & c_{12}A_2 & \ldots & c_{1k}A_k \\ \multicolumn{4}{c}{\dotfill} \\ c_{k1}A_1 & c_{k2}A_2 & \ldots & c_{kk}A_k \end{pmatrix}$$

равен сумме рангов матриц A_1, A_2, …, A_k.

7.14. Доказать, что прямоугольная матрица $\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$, где A — невырожденная матрица порядка n, имеет ранг n в том и только том случае, когда $D = CA^{-1}B$; при этом

$$\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A \\ C \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_n & A^{-1}B \end{pmatrix}.$$

* * *

7.15. Доказать, что каждую невырожденную матрицу с помощью элементарных преобразований II типа со строками можно привести к виду

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & d \end{pmatrix}.$$

7.16. Доказать, что матрица с определителем, равным 1, является произведением элементарных матриц вида $E + \lambda E_{ij}, \quad i \neq j$.

7.17. Доказать, что если строки (столбцы) матрицы A линейно зависимы, то с помощью элементарных преобразований II типа со строками и столбцами матрицу A можно привести к виду

$$\begin{pmatrix} E_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

где E_r — единичная матрица порядка r.

7.18. Пусть A и B — матрицы размеров $m \times n$, $n \times t$ и рангов $r(A)$, $r(B)$ соответственно. Доказать, что ранг матрицы AB не меньше, чем $r(A) + r(B) - n$.

7.19. Доказать, что всякую матрицу элементарными преобразованиями над строками можно привести к виду

$$\begin{pmatrix}
0 & \dots & 0 & 1 & * & \dots & * & 0 & * & \dots & * & 0 & * & \dots & * & 0 & * & \dots & * \\
0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & * & \dots & * & 0 & * & \dots & * & 0 & * & \dots & * \\
0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & * & \dots & * & 0 & * & \dots & * \\
\dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\
\dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & * & 0 & * & \dots & * \\
0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & * & \dots & * \\
0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\
\dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\
0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0
\end{pmatrix},$$

и такой вид определен однозначно.

§ 8. Системы линейных уравнений

8.1. Найти общее решение и одно частное решение системы линейных уравнений, используя метод Гаусса:

$$\text{а)} \begin{cases} 5x_1 + 3x_2 + 5x_3 + 12x_4 = 10, \\ 2x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 5x_4 = 4, \\ x_1 + 7x_2 + 9x_3 + 4x_4 = 2; \end{cases}$$

б) $\begin{cases} -9x_1 + 6x_2 + 7x_3 + 10x_4 = 3, \\ -6x_1 + 4x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 2, \\ -3x_1 + 2x_2 - 11x_3 - 15x_4 = 1; \end{cases}$

в) $\begin{cases} -9x_1 + 10x_2 + 3x_3 + 7x_4 = 7, \\ -4x_1 + 7x_2 + x_3 + 3x_4 = 5, \\ 7x_1 + 5x_2 - 4x_3 - 6x_4 = 3; \end{cases}$

г) $\begin{cases} 12x_1 + 9x_2 + 3x_3 + 10x_4 = 13, \\ 4x_1 + 3x_2 + x_3 + 2x_4 = 3, \\ 8x_1 + 6x_2 + 2x_3 + 5x_4 = 7; \end{cases}$

д) $\begin{cases} -6x_1 + 9x_2 + 3x_3 + 2x_4 = 4, \\ -2x_1 + 3x_2 + 5x_3 + 4x_4 = 2, \\ -4x_1 + 6x_2 + 4x_3 + 3x_4 = 3; \end{cases}$

е) $\begin{cases} 8x_1 + 6x_2 + 5x_3 + 2x_4 = 21, \\ 3x_1 + 3x_2 + 2x_3 + x_4 = 10, \\ 4x_1 + 2x_2 + 3x_3 + x_4 = 8, \\ 3x_1 + 3x_2 + x_3 + x_4 = 15, \\ 7x_1 + 4x_2 + 5x_3 + 2x_4 = 18; \end{cases}$

ж) $\begin{cases} 2x_1 + 5x_2 - 8x_3 = 8, \\ 4x_1 + 3x_2 - 9x_3 = 9, \\ 2x_1 + 3x_2 - 5x_3 = 7, \\ x_1 + 8x_2 - 7x_3 = 12; \end{cases}$

з) $\begin{cases} 6x_1 + 4x_2 + 5x_3 + 2x_4 + 3x_5 = 1, \\ 3x_1 + 2x_2 - 2x_3 + x_4 = -7, \\ 9x_1 + 6x_2 + x_3 + 3x_4 + 2x_5 = 2, \\ 3x_1 + 2x_2 + 4x_3 + x_4 + 2x_5 = 3. \end{cases}$

8.2. Исследовать систему и найти общее решение в зависимости от значения параметра λ:

а) $\begin{cases} 18x_1 + 6x_2 + 3x_3 + 2x_4 = 5, \\ -12x_1 - 3x_2 - 3x_3 + 3x_4 = -6, \\ 4x_1 + 5x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 3, \\ \lambda x_1 + 4x_2 + x_3 + 4x_4 = 2; \end{cases}$

б) $\begin{cases} -6x_1 + 8x_2 - 5x_3 - x_4 = 9, \\ -2x_1 + 4x_2 + 7x_3 + 3x_4 = 1, \\ -3x_1 + 5x_2 + 4x_3 + 2x_4 = 3, \\ -3x_1 + 7x_2 + 17x_3 + 7x_4 = \lambda; \end{cases}$

в) $\begin{cases} 2x_1 + 5x_2 + x_3 + 3x_4 = 2, \\ 4x_1 + 6x_2 + 3x_3 + 5x_4 = 4, \\ 4x_1 + 14x_2 + x_3 + 7x_4 = 4, \\ 2x_1 - 3x_2 + 3x_3 + \lambda x_4 = 7; \end{cases}$

г) $\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 5, \\ 4x_1 - 2x_2 + 5x_3 + 6x_4 = 7, \\ 6x_1 - 3x_2 + 7x_3 + 8x_4 = 9, \\ \lambda x_1 - 4x_2 + 9x_3 + 10x_4 = 11; \end{cases}$

д) $\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + x_3 + 2x_4 = 3, \\ 4x_1 + 6x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 5, \\ 6x_1 + 9x_2 + 5x_3 + 6x_4 = 7, \\ 8x_1 + 12x_2 + 7x_3 + \lambda x_4 = 9; \end{cases}$ е) $\begin{cases} \lambda x_1 + x_2 + x_3 = 1, \\ x_1 + \lambda x_2 + x_3 = 1, \\ x_1 + x_2 + \lambda x_3 = 1; \end{cases}$

ж) $\begin{cases} \lambda x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 1, \\ x_1 + \lambda x_2 + x_3 + x_4 = 1, \\ x_1 + x_2 + \lambda x_3 + x_4 = 1, \\ x_1 + x_2 + x_3 + \lambda x_4 = 1; \end{cases}$ з) $\begin{cases} (1+\lambda)x_1 + x_2 + x_3 = 1, \\ x_1 + (1+\lambda)x_2 + x_3 = \lambda, \\ x_1 + x_2 + (1+\lambda)x_3 = \lambda^2; \end{cases}$

и) $\begin{cases} (1+\lambda)x_1 + x_2 + x_3 = \lambda^2 + 3\lambda, \\ x_1 + (1+\lambda)x_2 + x_3 = \lambda^3 + 3\lambda^2, \\ x_1 + x_2 + (1+\lambda)x_3 = \lambda^4 + 3\lambda^3. \end{cases}$

8.3. Найти все векторы пространства $\mathbb{R}^n$, переходящие в вектор $b \in \mathbb{R}^m$ при линейном отображении $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, заданном матрицей A:

а) $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -5 \\ 3 & 4 & -9 \\ 5 & 2 & -8 \\ 8 & 1 & -7 \end{pmatrix}, \qquad b = \begin{pmatrix} 7 \\ 9 \\ 8 \\ 12 \end{pmatrix};$

б) $A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & -3 & -14 \\ 2 & -6 & -3 & -1 \\ 3 & -9 & -5 & -6 \end{pmatrix}, \qquad b = \begin{pmatrix} 8 \\ -5 \\ -4 \end{pmatrix};$

в) $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 & -2 & -3 \\ 3 & -6 & -2 & -4 & -5 \\ 3 & -6 & -4 & -8 & -13 \\ 2 & -4 & -1 & -1 & -2 \end{pmatrix}, \qquad b = \begin{pmatrix} -2 \\ -3 \\ -9 \\ -1 \end{pmatrix};$

г) $A = \begin{pmatrix} 1 & 9 & 4 & -5 \\ 3 & 2 & 2 & 5 \\ 2 & 3 & 2 & 2 \\ 1 & 7 & 6 & -1 \\ 2 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}, \qquad b = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \\ 7 \\ 5 \end{pmatrix};$

д) $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 & -2 & 3 \\ 2 & 2 & 4 & -1 & 3 \\ 3 & 3 & 5 & -2 & 3 \\ 2 & 2 & 8 & -3 & 9 \end{pmatrix}, \qquad b = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix};$

е) $A = \begin{pmatrix} 3 & -6 & -1 & 4 \\ 1 & -2 & -3 & 7 \\ 2 & -4 & -14 & 31 \end{pmatrix}, \qquad b = \begin{pmatrix} -7 \\ -5 \\ -10 \end{pmatrix};$

ж) $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 & -2 & 1 \\ 6 & 3 & 5 & -4 & 3 \\ 2 & 1 & 7 & -4 & 1 \\ 4 & 2 & 2 & -3 & 3 \end{pmatrix}, \qquad b = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 11 \\ 6 \end{pmatrix};$

з) $A = \begin{pmatrix} 8 & 6 & 5 & 2 \\ 3 & 3 & 2 & 1 \\ 4 & 2 & 3 & 1 \\ 3 & 5 & 1 & 1 \\ 7 & 4 & 5 & 2 \end{pmatrix}, \qquad b = \begin{pmatrix} 21 \\ 10 \\ 8 \\ 15 \\ 18 \end{pmatrix}.$

8.4. Найти общее решение и фундаментальную систему решений системы уравнений:

а) $\begin{cases} x_1 + x_2 - 2x_3 + 2x_4 = 0, \\ 3x_1 + 5x_2 + 6x_3 - 4x_4 = 0, \\ 4x_1 + 5x_2 - 2x_3 + 3x_4 = 0, \\ 3x_1 + 8x_2 + 24x_3 - 19x_4 = 0; \end{cases}$ б) $\begin{cases} x_1 - x_3 = 0, \\ x_2 - x_4 = 0, \\ -x_1 + x_3 - x_5 = 0, \\ -x_2 + x_4 - x_6 = 0, \\ -x_3 + x_5 = 0, \\ -x_4 + x_6 = 0; \end{cases}$

в) $\begin{cases} x_1 - x_3 + x_5 = 0, \\ x_2 - x_4 + x_6 = 0, \\ x_1 - x_2 + x_5 - x_6 = 0, \\ x_2 - x_3 + x_6 = 0, \\ x_1 - x_4 + x_5 = 0; \end{cases}$ г) $\begin{cases} x_1 + x_2 = 0, \\ x_1 + x_2 + x_3 = 0, \\ x_2 + x_3 + x_4 = 0, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ x_{n-2} + x_{n-1} + x_n = 0, \\ x_{n-1} + x_n = 0. \end{cases}$

8.5. Найти какой-нибудь базис ядра линейного отображения, заданного матрицей:

а) $\begin{pmatrix} 3 & 5 & -4 & 2 \\ 2 & 4 & -6 & 3 \\ 11 & 17 & -8 & 4 \end{pmatrix}$; б) $\begin{pmatrix} 3 & 5 & 3 & 2 & 1 \\ 5 & 7 & 6 & 4 & 3 \\ 7 & 9 & 9 & 6 & 5 \\ 4 & 8 & 3 & 2 & 0 \end{pmatrix}$;

в) $\begin{pmatrix} 6 & 9 & 2 \\ -4 & 1 & 1 \\ 5 & 7 & 4 \\ 2 & 5 & 3 \end{pmatrix}$; г) $\begin{pmatrix} 5 & 7 & 6 & -2 & 2 \\ 8 & 9 & 9 & -3 & 4 \\ 7 & 1 & 6 & -2 & 6 \\ 4 & -1 & 3 & -1 & 4 \end{pmatrix}$;

д) $\begin{pmatrix} 5 & 6 & -2 & 7 & 4 \\ 2 & 3 & -1 & 4 & 2 \\ 7 & 9 & -3 & 5 & 6 \\ 5 & 9 & -3 & 1 & 6 \end{pmatrix}$; е) $\begin{pmatrix} 3 & 4 & 1 & 2 & 3 \\ 5 & 7 & 1 & 3 & 4 \\ 4 & 5 & 2 & 1 & 5 \\ 7 & 10 & 1 & 6 & 5 \end{pmatrix}$.

8.6. С помощью правила Крамера решить систему уравнений:

а) $\begin{cases} 2x_1 - x_2 = 1, \\ x_1 + 16x_2 = 17; \end{cases}$ б) $\begin{cases} 2x_1 + 5x_2 = 1, \\ 3x_1 + 7x_2 = 2; \end{cases}$

в) $\begin{cases} x_1 \cos\alpha + x_2 \sin\alpha = \cos\beta, \\ -x_1 \sin\alpha + x_2 \cos\alpha = \sin\beta; \end{cases}$ г) $\begin{cases} 2x_1 + x_2 + x_3 = 3, \\ x_1 + 2x_2 + x_3 = 0, \\ x_1 + x_2 + 2x_3 = 0; \end{cases}$

д) $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 6, \\ -x_1 + x_2 + x_3 = 0, \\ x_1 - x_2 + x_3 = 2; \end{cases}$ е) $\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + 5x_3 = 10, \\ 3x_1 + 7x_2 + 4x_3 = 3, \\ x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 3. \end{cases}$

8.7. Найти многочлен $f(x)$ второй степени с вещественными коэффициентами, для которого $f(1) = 8$, $f(-1) = 2$, $f(2) = 14$.

8.8. Найти многочлен $f(x)$ третьей степени, для которого $f(-2) = 1$, $f(-1) = 3$, $f(1) = 13$, $f(2) = 33$.

8.9. Найти многочлен $f(x)$ четвертой степени, для которого $f(-3) = -77$, $f(-2) = -13$, $f(-1) = 1$, $f(1) = -1$, $f(2) = -17$.

8.10. Решить систему сравнений:

а) $\begin{cases} 2x + y - z \equiv 1, \\ x + 2y + z \equiv 2, \quad (\text{mod } 5); \\ x + y - z \equiv -1 \end{cases}$

б) $\begin{cases} 3x + 2y + 5z \equiv 1, \\ 2x + 5y + 3z \equiv 1, \quad (\text{mod } 17). \\ 5x + 3y + 2z \equiv 4 \end{cases}$

8.11. Доказать, что если определитель квадратной матрицы (a_{ij}) порядка n с целыми коэффициентами взаимно прост с натуральным числом m, то система сравнений

$$(a_{i1}x_1 + a_{i2} + \ldots + a_{in}) \equiv b_i \pmod{m}, \qquad i = 1, 2, \ldots, n,$$

имеет единственное решение по модулю m.

* * *

8.12. Пусть A — целочисленная матрица и d — наименьший из модулей ее элементов. Доказать, что если при целочисленных элементарных преобразованиях строк и столбцов матрицы A число d не уменьшается, то d делит все элементы этой матрицы A.

8.13. Доказать, что с помощью элементарных преобразований строк и столбцов над кольцом $\mathbb{Z}$ любую целочисленную матрицу можно привести к виду $\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, где $A = \operatorname{diag}\{d_1, \ldots, d_r\}$ и $d_i | d_{i+1}$, $(i = 1, 2, \ldots, r-1)$.

8.14. Доказать, что если квадратная целочисленная система линейных уравнений является определённой по модулю любого простого числа p, то она является определённой и над кольцом целых чисел.

8.15. Выяснить, будет ли квадратная целочисленная система линейных уравнений, совместная по модулю любого простого числа p, совместной над кольцом целых чисел.

8.16. Доказать, что следующие системы уравнений имеют единственное решение по модулю всех простых чисел, кроме конечного их числа. Решить эти системы по модулю остальных простых чисел:

а) $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 2, \\ 2x_1 + x_2 - 2x_3 = 1, \\ 2x_1 - 2x_2 + x_3 = 1; \end{cases}$ б) $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 1, \\ x_1 + x_2 + x_4 = 1, \\ x_1 + x_3 + x_4 = 1, \\ x_2 + x_3 + x_4 = 1; \end{cases}$

в) $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 1, \\ x_1 + x_2 - x_3 - x_4 = 1, \\ x_1 + x_2 + x_3 - x_4 = 1, \\ x_1 - x_2 - x_3 + x_4 = 0. \end{cases}$

8.17. Доказать, что всякую систему линейных уравнений с вещественными коэффициентами можно привести к ступенчатому виду, используя лишь элементарные преобразования II типа.

8.18. Доказать, что при целочисленных элементарных преобразованиях строк и столбцов целочисленной матрицы наибольший общий делитель ее миноров фиксированного порядка k не меняется.

8.19. Доказать, что если целочисленная матрица с помощью целочисленных элементарных преобразований строк и столбцов приведена к виду $\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, где $A = \operatorname{diag}\{d_1, d_2, \ldots, d_r\}$, $d_i \neq 0$ и $d_i | d_{i+1}$, то числа d_1, d_2, ..., d_r определены однозначно (с точностью до знака).

8.20. Два набора неизвестных называются *целочисленно эквивалентными*, если они связаны соотношением

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = U \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix},$$

где U — целочисленная матрица с определителем, равным по модулю единице. Доказать, что система уравнений

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = b_i, \qquad i = 1, 2, \ldots, m,$$

где a_{ij}, b_i — целые числа, эквивалентна над кольцом целых чисел системе уравнений вида

$$d_i y_i = c_i, \qquad i = 1, 2, \ldots, m,$$

причем набор неизвестных $(y_1, \ldots, y_n)$ целочисленно эквивалентен набору $(x_1, \ldots, x_n)$.

8.21. Доказать, что целочисленная система уравнений имеет целочисленное решение в том только том случае, когда для любого натурального числа k наибольшие общие делители всех миноров порядка k в матрице системы и в её расширенной матрице совпадают.

8.22. Доказать, что целочисленная система уравнений имеет целочисленное решение в том и только том случае, когда она имеет решение по любому модулю p.

8.23. Обосновать следующий практический способ нахождения всех целочисленных решений системы уравнений

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j = b_i, \qquad i = 1, 2, \ldots, m,$$

с целыми коэффициентами. Построим матрицу $\begin{pmatrix} A & b \\ E_n & 0 \end{pmatrix}$ размера $(n+m)\times(n+1)$. Затем, используя лишь целочисленные элементарные преобразования первых m строк и n столбцов, приведем эту матрицу к виду $\begin{pmatrix} D & C \\ U & 0 \end{pmatrix}$, где

$$C = \begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_m \end{pmatrix}, \qquad |\det U| = 1, \qquad D = \begin{pmatrix} d_1 & 0 & \ldots & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & d_2 & \ldots & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & d_r & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & \ldots & 0 \end{pmatrix},$$

$$d_i | d_{i+1}, \qquad d_1 \neq 0,\ \ldots,\ d_r \neq 0.$$

Тогда система совместна, если

$$d_i | c_i \quad \text{при} \quad i = 1, \ldots, r,$$
$$c_k = 0 \quad \text{при} \quad k > r,$$

а общее решение дается формулой

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = U \begin{pmatrix} c_1/d_1 \\ \vdots \\ c_r/d_r \\ y_{r+1} \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix},$$

где y_{r+1}, y_{r+2}, $\ldots$, y_n — любые целые числа.

8.24. Найти все целочисленные решения следующих систем уравнений:

а) $2x_1 + 3x_2 + 4x_3 = 5$; б) $\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 - 11x_3 - 15x_4 = 1, \\ 4x_1 - 6x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 2, \\ 2x_1 - 3x_2 + 5x_3 + 7x_4 = 1. \end{cases}$

8.25. Пусть A и B — матрицы одинаковых размеров, причём однородные системы линейных уравнений с матрицами A и B эквивалентны. Доказать, что от A к B можно перейти элементарными преобразованиями строк.

8.26. Пусть задана система линейных комплексных уравнений $AX = b$ с квадратной невырожденной матрицей A. Предположим, что сумма модулей элементов каждой строки матрицы $E + A$ меньше 1. Пусть X_0 — произвольный столбец и индуктивно определим $X_{m+1} = (A + E)X_m - b$. Тогда последовательность столбцов X_m сходится к решению уравнения $AX = b$.

Глава III

ОПРЕДЕЛИТЕЛИ

§ 9. Определители второго и третьего порядков

9.1. Вычислить определители:

а) $\begin{vmatrix} 3 & 5 \\ 5 & 3 \end{vmatrix}$; б) $\begin{vmatrix} ab & ac \\ bd & cd \end{vmatrix}$; в) $\begin{vmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{vmatrix}$;

г) $\begin{vmatrix} \sin\alpha & \sin\beta \\ \cos\alpha & \cos\beta \end{vmatrix}$; д) $\begin{vmatrix} \log_b a & 1 \\ 1 & \log_a b \end{vmatrix}$;

е) $\begin{vmatrix} \cos\alpha + i\sin\alpha & 1 \\ 1 & \cos\alpha - i\sin\alpha \end{vmatrix}$; ж) $\begin{vmatrix} a+bi & c+di \\ -c+di & a-bi \end{vmatrix}$.

9.2. Вычислить определители:

а) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 5 & 1 & 4 \\ 3 & 2 & 5 \end{vmatrix}$; б) $\begin{vmatrix} -1 & 5 & 4 \\ 3 & -2 & 0 \\ -1 & 3 & 6 \end{vmatrix}$; в) $\begin{vmatrix} 0 & 2 & 2 \\ 2 & 0 & 2 \\ 2 & 2 & 0 \end{vmatrix}$;

г) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix}$; д) $\begin{vmatrix} a & b & c \\ b & c & a \\ c & a & b \end{vmatrix}$; е) $\begin{vmatrix} 0 & a & 0 \\ b & c & d \\ 0 & e & 0 \end{vmatrix}$;

ж) $\begin{vmatrix} \sin\alpha & \cos\alpha & 1 \\ \sin\beta & \cos\beta & 1 \\ \sin\gamma & \cos\gamma & 1 \end{vmatrix}$; з) $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1+i \\ 0 & 1 & i \\ 1-i & -i & 1 \end{vmatrix}$;

и) $\begin{vmatrix} 1 & \varepsilon & \varepsilon^2 \\ \varepsilon^2 & 1 & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon^2 & 1 \end{vmatrix}$ $\left(\varepsilon = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$;

к) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & \varepsilon & \varepsilon^2 \\ 1 & \varepsilon^2 & \varepsilon \end{vmatrix}$ $\left(\varepsilon = \cos\frac{4}{3}\pi + i\sin\frac{4}{3}\pi\right)$.

§ 10. Выражение определителя. Индуктивное определение

10.1. Выяснить, какие из следующих произведений входят в развёрнутое выражение определителей соответствующих порядков и с какими знаками:

а) $a_{13}a_{22}a_{31}a_{46}a_{55}a_{64}$; б) $a_{31}a_{13}a_{52}a_{45}a_{24}$;

в) $a_{34}a_{21}a_{46}a_{17}a_{73}a_{54}a_{62}$.

10.2. Выбрать значения i, j, k так, чтобы произведение

$$a_{51}a_{i6}a_{1j}a_{35}a_{44}a_{6k}$$

входило в развёрнутое выражение определителя шестого порядка со знаком минус.

10.3. В развёрнутом выражении определителя

$$\begin{vmatrix} x & 1 & 2 & 3 \\ x & x & 1 & 2 \\ 1 & 2 & x & 3 \\ x & 1 & 2 & 2x \end{vmatrix}$$

найти члены, содержащие x^4 и x^3.

10.4. Пользуясь определением, вычислить следующие определители:

а) $\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 & \dots & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$; в) $\begin{vmatrix} a & 3 & 0 & 5 \\ 0 & b & 0 & 2 \\ 1 & 2 & c & 3 \\ 0 & 0 & 0 & d \end{vmatrix}$;

б) $\begin{vmatrix} 0 & \dots & 0 & 0 & a_{1n} \\ 0 & \dots & 0 & a_{2,n-1} & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & \dots & a_{n,n-2} & a_{n,n-1} & a_{nn} \end{vmatrix}$; г) $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 & a \\ 2 & 0 & b & 0 \\ 3 & c & 4 & 5 \\ d & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$;

д) $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & a_{15} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & a_{25} \\ a_{31} & a_{32} & 0 & 0 & 0 \\ a_{41} & a_{42} & 0 & 0 & 0 \\ a_{51} & a_{52} & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$.

10.5. Представить в виде многочлена, расположенного по убывающим степеням t, определитель

$$\begin{vmatrix} -t & 0 & 0 & \dots & 0 & a_1 \\ a_2 & -t & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -t & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a_n & -t \end{vmatrix}.$$

10.6. Вычислить определитель, у которого все элементы главной диагонали равны 1, а элементы столбца с номером j равны $a_1, a_2, \dots$ $\dots, a_{j-1}, a_{j+1}, \dots, a_n$, а остальные элементы равны 0.

10.7. Пусть

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ i_1 & i_2 & \dots & i_n \end{pmatrix} \in \mathbf{S}_n$$

и A — квадратная матрица размера n с элементами a_{rs}, причём $a_{rs} = 1$, если $s = i_r$, и $a_{rs} = 0$ в противном случае. Доказать, что определитель матрицы A равен знаку подстановки σ.

§ 11. Основные свойства определителя

11.1. Как изменится определитель порядка n, если:

а) у всех его элементов изменить знак на противоположный;

б) каждый его элемент a_{ik} умножить на c^{i-k} $(c \neq 0)$;

в) каждый его элемент заменить элементом, симметричным относительно побочной диагонали;

г) каждый его элемент заменить на симметричный относительно “центра” определителя;

д) его повернуть на 90° вокруг “центра” (против часовой стрелки)?

11.2. Как изменится определитель порядка n, если:

а) его первый столбец поставить на последнее место, а остальные столбцы сдвинуть влево, сохраняя их расположение;

б) его строки записать в обратном порядке?

11.3. Как изменится определитель, если:

а) к каждому столбцу, начиная со второго, прибавить предыдущий столбец;

б) к каждому столбцу, начиная со второго, прибавить все предыдущие столбцы;

в) из каждой строки, кроме последней, вычесть следующую строку, а из последней вычесть прежнюю первую строку;

г) к каждому столбцу, начиная со второго, прибавить предыдущий столбец, а к первому прибавить прежний последний столбец?

11.4. Доказать, что определитель кососимметрической матрицы нечётного порядка равен 0.

11.5. Числа 20604, 53227, 25755, 20927 и 289 делятся на 17. Доказать, что также делится на 17 определитель

$$\begin{vmatrix} 2 & 0 & 6 & 0 & 4 \\ 5 & 3 & 2 & 2 & 7 \\ 2 & 5 & 7 & 5 & 5 \\ 2 & 0 & 9 & 2 & 7 \\ 0 & 0 & 2 & 8 & 9 \end{vmatrix}.$$

11.6. Вычислить, не развёртывая его, определитель

$$\begin{vmatrix} x & y & z & 1 \\ y & z & x & 1 \\ z & x & y & 1 \\ \dfrac{x+z}{2} & \dfrac{x+y}{2} & \dfrac{y+z}{2} & 1 \end{vmatrix}.$$

11.7. Чему равен определитель, у которого сумма строк с чётными номерами равна сумме строк с нечётными номерами?

11.8. Доказать, что любой определитель равен полусумме двух определителей, один из которых получен из данного прибавлением ко всем элементам i-й строки числа b, а другой — аналогичным образом прибавлением числа $-b$.

11.9. Доказать, что если все элементы определителя порядка n являются дифференцируемыми функциями одного переменного, то производная этого определителя является суммой n определителей D_i, где все строки определителя D_i, кроме i-й, те же, что и в определителе D, а i-я строка составлена из производных элементов i-й строки определителя D.

11.10. Вычислить определители:

а) $$\begin{vmatrix} a_1+x & x & \ldots & x \\ x & a_2+x & \ldots & x \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ x & x & \ldots & a_n+x \end{vmatrix};$$

б) $\begin{vmatrix} a_1+x & a_2 & \dots & a_n \\ a_1 & a_2+x & \dots & a_n \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_1 & a_2 & \dots & a_n+x \end{vmatrix}$;

в) $\begin{vmatrix} 1+x_1y_1 & 1+x_1y_2 & \dots & 1+x_1y_n \\ 1+x_2y_1 & 1+x_2y_2 & \dots & 1+x_2y_n \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1+x_ny_1 & 1+x_ny_2 & \dots & 1+x_ny_n \end{vmatrix}$;

г) $\begin{vmatrix} f_1(a_1) & f_1(a_2) & \dots & f_1(a_n) \\ f_2(a_1) & f_2(a_2) & \dots & f_2(a_n) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ f_n(a_1) & f_n(a_2) & \dots & f_n(a_n) \end{vmatrix}$, где $f_i(x)$ — многочлен степени не выше $n-2$ $(i=1,2,\dots,n)$;

д) $\begin{vmatrix} 1+a_1+b_1 & a_1+b_1 & \dots & a_1+b_n \\ a_2+b_1 & 1+a_2+b_2 & \dots & a_2+b_n \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_n+b_1 & a_n+b_1 & \dots & 1+a_n+b_n \end{vmatrix}$;

е) $\begin{vmatrix} 1+x_1y_1 & x_1y_2 & \dots & x_1y_n \\ x_2y_1 & 1+x_2y_2 & \dots & x_2y_n \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ x_ny_1 & x_ny_2 & \dots & 1+x_ny_n \end{vmatrix}$.

§ 12. Разложение определителя по строке и столбцу

12.1. Разлагая по третьей строке, вычислить определитель

$$\begin{vmatrix} 2 & -3 & 4 & 1 \\ 4 & -2 & 3 & 2 \\ a & b & c & d \\ 3 & -1 & 4 & 3 \end{vmatrix}.$$

12.2. Разлагая по второму столбцу, вычислить определитель

$$\begin{vmatrix} 5 & a & 2 & -1 \\ 4 & b & 4 & -3 \\ 2 & c & 3 & -2 \\ 4 & d & 5 & -4 \end{vmatrix}.$$

12.3. Вычислить определители:

а) $\begin{vmatrix} x & y & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & x & y & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & x & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & x & y \\ y & 0 & 0 & \dots & 0 & x \end{vmatrix}$; б) $\begin{vmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & \dots & a_{n-1} & a_n \\ -y_1 & x_1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & -y_2 & x_2 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & x_{n-1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -y_n & x_n \end{vmatrix}$;

в) $\begin{vmatrix} a_0 & -1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ a_1 & x & -1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ a_2 & 0 & x & -1 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n-1} & 0 & 0 & 0 & \dots & x & -1 \\ a_n & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & x \end{vmatrix}$;

г) $\begin{vmatrix} n!a_0 & (n-1)!a_1 & (n-2)!a_2 & \dots & a_n \\ -n & x & 0 & \dots & a_n \\ 0 & -(n-1) & x & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & x \end{vmatrix}$;

д) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & n-1 & n \\ -1 & x & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & -1 & x & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & x & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -1 & x \end{vmatrix}$;

е) $\begin{vmatrix} n & -1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ n-1 & x & -1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ n-2 & 0 & x & -1 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 2 & 0 & 0 & 0 & \dots & x & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & x \end{vmatrix}$;

ж) $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ 1 & a_1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & 1 & a_2 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & a_3 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & a_n \end{vmatrix}$;

з) $\begin{vmatrix} a_1 & 0 & \dots & 0 & b_1 \\ 0 & a_2 & \dots & b_2 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & b_{2n-1} & \dots & a_{2n-1} & 0 \\ b_{2n} & 0 & \dots & 0 & a_{2n} \end{vmatrix}$; и) $\begin{vmatrix} a_0 & 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & a_1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 0 & a_2 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & 0 & 0 & 0 & \dots & a_n \end{vmatrix}$.

12.4. Доказать, что $(n+1)$-й член $u(n+1)$ последовательности чисел Фибоначчи (см. 4.5) равен определителю

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & -1 & 1 \end{vmatrix}$$

порядка n.

§ 13. Определители и элементарные преобразования

13.1. Вычислить определители:

а) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ -3 & 2 & -5 & 13 \\ 1 & -2 & 10 & 4 \\ -2 & 9 & -8 & 25 \end{vmatrix}$; б) $\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 & -2 \\ 1 & 3 & -1 & 3 \\ -1 & -1 & 4 & 3 \\ -3 & 0 & -8 & -13 \end{vmatrix}$;

в) $\begin{vmatrix} 7 & 6 & 9 & 4 & -4 \\ 1 & 0 & -2 & 6 & 6 \\ 7 & 8 & 9 & -1 & -6 \\ 1 & -1 & -2 & 4 & 5 \\ -7 & 0 & -9 & 2 & -2 \end{vmatrix}$; г) $\begin{vmatrix} 4 & 4 & -1 & 0 & -1 & 8 \\ 2 & 3 & 7 & 5 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 5 & 7 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & 2 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 7 & 6 & 6 & 5 & 7 \\ 2 & 1 & 1 & 2 & 2 & 1 \end{vmatrix}$;

д) $\begin{vmatrix} 1 & 5 & 3 & 5 & -4 \\ 3 & 1 & 2 & 9 & 8 \\ -1 & 7 & -3 & 8 & -9 \\ 3 & 4 & 2 & 4 & 7 \\ 1 & 8 & 3 & 3 & 5 \end{vmatrix}$; е) $\begin{vmatrix} -5 & -7 & -2 & 2 & -2 & 16 \\ 0 & 0 & 4 & 0 & -5 & 0 \\ 2 & 0 & -2 & 0 & 2 & 0 \\ 6 & 4 & 6 & -1 & 15 & -5 \\ 5 & -4 & 10 & 1 & 14 & 6 \\ 3 & 0 & -2 & 0 & 3 & 0 \end{vmatrix}$;

ж) $\begin{vmatrix} 1001 & 1002 & 1003 & 1004 \\ 1002 & 1003 & 1001 & 1002 \\ 1001 & 1001 & 1001 & 999 \\ 1001 & 1000 & 998 & 999 \end{vmatrix}$; з) $\begin{vmatrix} 27 & 44 & 40 & 55 \\ 20 & 64 & 21 & 40 \\ 13 & -20 & -13 & 24 \\ 46 & 45 & -55 & 84 \end{vmatrix}$;

и) $\begin{vmatrix} 30 & 20 & 15 & 12 \\ 20 & 15 & 12 & 15 \\ 15 & 12 & 15 & 20 \\ 12 & 15 & 20 & 30 \end{vmatrix}$; к) $\begin{vmatrix} 1/2 & 1/3 & 1/2 & 1 \\ 1/3 & 1/2 & 1 & 1/2 \\ 1/2 & 1 & 1/2 & 1/3 \\ 1 & 1/2 & 1/3 & 1/2 \end{vmatrix}$;

л) $\begin{vmatrix} 1 & 10 & 100 & 1000 & 10000 & 100000 \\ 0,1 & 2 & 30 & 400 & 5000 & 60000 \\ 0 & 0,1 & 3 & 60 & 1000 & 15000 \\ 0 & 0 & 0,1 & 4 & 100 & 2000 \\ 0 & 0 & 0 & 0,1 & 5 & 150 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0,1 & 6 \end{vmatrix}$;

м) $\begin{vmatrix} 4 & -2 & 0 & 5 \\ 3 & 2 & -2 & 1 \\ -2 & 1 & 3 & -1 \\ 2 & 3 & -6 & -3 \end{vmatrix}$; н) $\begin{vmatrix} 4 & 3 & 3 & 5 \\ 3 & 4 & 3 & 2 \\ 3 & 2 & 5 & 4 \\ 2 & 4 & 2 & 3 \end{vmatrix}$;

о) $\begin{vmatrix} 3 & 2 & 4 & 5 \\ 4 & -3 & 2 & -4 \\ 5 & -2 & -3 & -7 \\ -3 & 4 & 2 & 9 \end{vmatrix}$; п) $\begin{vmatrix} 14 & 13 & 3 & -13 \\ -7 & -4 & 2 & 10 \\ 21 & 23 & 0 & -23 \\ 7 & 12 & -2 & -6 \end{vmatrix}$;

р) $\begin{vmatrix} 6 & 3 & 8 & -4 \\ 5 & 6 & 4 & 2 \\ 0 & 3 & 4 & 2 \\ 4 & 1 & -4 & 6 \end{vmatrix}$; с) $\begin{vmatrix} 2 & 4 & 6 & -5 \\ 1 & 6 & 5 & 4 \\ -3 & 2 & 4 & 6 \\ 4 & 5 & 2 & 3 \end{vmatrix}$.

13.2. Приведением к треугольному виду вычислить следующие определители:

а) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & n \\ -1 & 0 & 3 & \dots & n \\ -1 & -2 & 0 & \dots & n \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ -1 & -2 & -3 & \dots & 0 \end{vmatrix}$; б) $\begin{vmatrix} 1 & n & n & \dots & n \\ n & 2 & n & \dots & n \\ n & n & 3 & \dots & n \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ n & n & n & \dots & n \end{vmatrix}$;

в) $\begin{vmatrix} 1 & \dots & 1 & 1 & 1 \\ a_1 & \dots & a_1 & a_1 - b_1 & a_1 \\ a_2 & \dots & a_2 - b_2 & a_2 & a_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_n - b_n & \dots & a_n & a_n & a_n \end{vmatrix}$;

г) $\begin{vmatrix} x_1 & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ x_1 & x_2 & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ x_1 & x_2 & x_3 & \dots & a_{3n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ x_1 & x_2 & x_3 & \dots & x_n \end{vmatrix}$;

д) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & n-2 & n-1 & n \\ 2 & 3 & 4 & \dots & n-1 & n & n \\ 3 & 4 & 5 & \dots & n & n & n \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ n & n & n & \dots & n & n & n \end{vmatrix}$;

е) $\begin{vmatrix} 1 & x & x^2 & x^3 & \dots & x^n \\ a_{11} & 1 & x & x^2 & \dots & x^{n-1} \\ a_{21} & a_{22} & 1 & x & \dots & x^{n-2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & a_{n4} & \dots & 1 \end{vmatrix}$;

ж) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 & -n \\ 1 & 1 & \dots & -n & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & -n & \dots & 1 & 1 \\ -n & 1 & \dots & 1 & 1 \end{vmatrix}$;

з) $\begin{vmatrix} a & b & \dots & b & b \\ b & a & \dots & b & b \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ b & b & \dots & a & b \\ b & b & \dots & b & a \end{vmatrix}$;

и) $\begin{vmatrix} 1 & a_1 & a_2 & \dots & a_n \\ 1 & a_1+b_1 & a_2 & \dots & a_n \\ 1 & a_1 & a_2+b_2 & \dots & a_n \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & a_1 & a_2 & \dots & a_n+b_n \end{vmatrix}$.

13.3. Вычислить определитель

$$\begin{vmatrix} a & a+h & a+2h & \dots & a+(n-2)h & a+(n-1)h \\ a+(n-1)h & a & a+1h & \dots & a+(n-3)h & a+(n-2)h \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a+h & a+2h & a+3h & \dots & a+(n-1)h & a \end{vmatrix}.$$

§ 14. Вычисление определителей специального вида

14.1. Вычислить следующие определители методом рекуррентных соотношений (см. 4.1):

а) $\begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 2 & 1 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 2 \end{vmatrix}$; б) $\begin{vmatrix} 3 & 2 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 3 & 2 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 3 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 3 \end{vmatrix}$;

в) $\begin{vmatrix} 5 & 6 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 4 & 5 & 2 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 2 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 2 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 3 \end{vmatrix}$;

г) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 3 & 4 & 3 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 5 & 3 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 5 & 3 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 5 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 2 & 5 \end{vmatrix}$;

д) $\begin{vmatrix} 3 & 2 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 3 & 2 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 2 & 3 \end{vmatrix}$;

е) $\begin{vmatrix} \alpha+\beta & \alpha\beta & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & \alpha+\beta & \alpha\beta & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \alpha+\beta & \alpha\beta & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & \alpha+\beta \end{vmatrix}$;

ж) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \ldots & 1 \\ 1 & 2 & 2^2 & \ldots & 2^n \\ 1 & 3 & 3^2 & \ldots & 3^n \\ \multicolumn{5}{c}{\dotfill} \\ 1 & n+1 & (n+1)^2 & \ldots & (n+1)^n \end{vmatrix}$;

з) $\begin{vmatrix} a^n & (a-1)^n & \ldots & (a-n)^n \\ a^{n-1} & (a-1)^{n-1} & \ldots & (a-n)^{n-1} \\ \multicolumn{4}{c}{\dotfill} \\ a & a-1 & \ldots & a-n \\ 1 & 1 & \ldots & 1 \end{vmatrix}$;

и) $\begin{vmatrix} 1 & \ldots & 1 \\ x_1+1 & \ldots & x_n+1 \\ x_1^2+x_1 & \ldots & x_n^2+x_n \\ \multicolumn{3}{c}{\dotfill} \\ x_1^{n-1}+x_1^{n-2} & \ldots & x_n^{n-1}+x_n^{n-2} \end{vmatrix}$;

к) $\begin{vmatrix} a_1^n & a_1^{n-1}b_1 & a_1^{n-2}b_1^2 & \ldots & b_1^n \\ a_2^n & a_2^{n-1}b_2 & a_2^{n-2}b_2^2 & \ldots & b_2^n \\ \multicolumn{5}{c}{\dotfill} \\ a_{n+1}^n & a_{n+1}^{n-1}b_{n+1} & a_{n+1}^{n-2}b_{n+1}^2 & \ldots & b_{n+1}^n \end{vmatrix}$;

л) $\begin{vmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & \ldots & x_1^{s-1} & x_1^{s+1} & \ldots & x_1^n \\ 1 & x_2 & x_2^2 & \ldots & x_2^{s-1} & x_2^{s+1} & \ldots & x_2^n \\ \multicolumn{8}{c}{\dotfill} \\ 1 & x_n & x_n^2 & \ldots & x_n^{s-1} & x_n^{s+1} & \ldots & x_n^n \end{vmatrix}$;

м) $\begin{vmatrix} 1+x_1 & 1+x_1^2 & \ldots & 1+x_1^n \\ 1+x_2 & 1+x_2^2 & \ldots & 1+x_2^n \\ \multicolumn{4}{c}{\dotfill} \\ 1+x_n & 1+x_n^2 & \ldots & 1+x_n^n \end{vmatrix}$;

н) $\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & \ldots & 1 & 1 \\ 1 & 0 & x & \ldots & x & x \\ 1 & x & 0 & \ldots & x & x \\ \multicolumn{6}{c}{\dotfill} \\ 1 & x & x & \ldots & 0 & x \\ 1 & x & x & \ldots & x & 0 \end{vmatrix}$; о) $\begin{vmatrix} a & x & x & \ldots & x \\ y & a & x & \ldots & x \\ y & y & a & \ldots & x \\ \multicolumn{5}{c}{\dotfill} \\ y & y & y & \ldots & a \end{vmatrix}$.

§ 15. Определитель произведения матриц

15.1. Вычислить определитель

$$\begin{vmatrix} a & b & c & d \\ -b & a & d & -c \\ -c & -d & a & b \\ -d & c & -b & a \end{vmatrix}$$

путем возведения его в квадрат.

15.2. Вычислить следующие определители, представляя их в виде произведений определителей:

а) $\begin{vmatrix} \cos(\alpha_1-\beta_1) & \cos(\alpha_1-\beta_2) & \ldots & \cos(\alpha_1-\beta_n) \\ \cos(\alpha_2-\beta_1) & \cos(\alpha_2-\beta_2) & \ldots & \cos(\alpha_2-\beta_n) \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \cos(\alpha_n-\beta_1) & \cos(\alpha_n-\beta_2) & \ldots & \cos(\alpha_n-\beta_n) \end{vmatrix}$;

б) $\begin{vmatrix} \dfrac{1-a_1^n b_1^n}{1-a_1 b_1} & \ldots & \dfrac{1-a_1^n b_n^n}{1-a_1 b_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \dfrac{1-a_n^n b_1^n}{1-a_n b_1} & \ldots & \dfrac{1-a_n^n b_n^n}{1-a_n b_n} \end{vmatrix}$;

в) $\begin{vmatrix} (a_0+b_0)^n & \ldots & (a_0+b_n)^n \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ (a_n+b_0)^n & \ldots & (a_n+b_n)^n \end{vmatrix}$;

г) $\begin{vmatrix} s_0 & s_1 & s_2 & \ldots & s_{n-1} \\ s_1 & s_2 & s_3 & \ldots & s_n \\ s_2 & s_3 & s_4 & \ldots & s_{n+1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ s_{n-1} & s_n & s_{n+1} & \ldots & s_{2n-2} \end{vmatrix}$, где $s_k = x_1^k + x_2^k + \ldots + x_n^k$.

15.3. Доказать, что циркулянт

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & \ldots & a_n \\ a_n & a_1 & a_2 & \ldots & a_{n-1} \\ a_{n-1} & a_n & a_1 & \ldots & a_{n-2} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_2 & a_3 & a_4 & \ldots & a_1 \end{vmatrix}$$

равен $f(\varepsilon_1)f(\varepsilon_2)\ldots f(\varepsilon_n)$, где $f(x) = a_1 + a_2 x + \ldots + a_n x_{n-1}$; $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_n$ — все корни степени n из единицы.

15.4. Вычислить определители:

а) $\begin{vmatrix} a & b & c & d \\ d & a & b & c \\ c & d & a & b \\ b & c & d & a \end{vmatrix}$; б) $\begin{vmatrix} 1 & \alpha & \alpha^2 & \ldots & \alpha^{n-1} \\ \alpha^{n-1} & 1 & \alpha & \ldots & \alpha^{n-2} \\ \alpha^{n-2} & \alpha^{n-1} & 1 & \ldots & \alpha^{n-3} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \alpha & \alpha^2 & \alpha^3 & \ldots & 1 \end{vmatrix}$.

§ 16. Дополнительные задачи

16.1. Найти наибольшее значение определителя третьего порядка, составленного:

а) из чисел 0 и 1;

б) из чисел 1 и -1.

16.2. Доказать, что если в определителе порядка n на пересечении некоторых k строк и l столбцов стоят элементы, равные нулю, причём $k+l>n$, то определитель равен нулю.

16.3. Пусть D — определитель порядка $n>1$, D_1 и D_2 — определители, полученные из D заменой каждого элемента a_{ij} на его алгебраическое дополнение A_{ij} для D_1 и на его минор M_{ij} для D_2. Доказать, что $D_1 = D_2$.

16.4. *Взаимной* (или *присоединенной*) матрицей $\widehat{A}$ для квадратной матрицы A размера n называется матрица, в которой на месте ij стоит алгебраическое дополнение A_{ji}. Доказать, что:

а) $|\widehat{A}| = |A|^{n-1}$;

б) $\hat{\hat{A}} = |A|^{n-2}A$ при $n>2$ и $\hat{\hat{A}} = A$ при $n=2$.

16.5. (*Формула Бине–Коши.*) Пусть $A=(a_{ij})$, $B=(b_{ij})$ — матрицы порядка $m\times n$, $A_{i_1,\ldots,i_m}$ и $B_{i_1,\ldots,i_m}$ — миноры порядка m матриц A и B соответственно, составленные из столбцов с номерами $i_1,\ldots,i_m$,

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}b_{jk}, \quad C=(c_{ij}), \qquad i=1,\ldots,m; \quad j=1,\ldots,m.$$

Доказать, что

$$\det C = \sum_{1\leqslant i_1<i_2<\ldots<i_m\leqslant n} A_{i_1,\ldots,i_m}B_{i_1,\ldots,i_m},$$

если $m\leqslant n$, и $\det C = 0$, если $m>n$.

16.6. Пусть A и B — матрицы порядков $p \times n$ и $n \times k$ соответственно, $A\begin{pmatrix} i_1 & \ldots & i_m \\ j_1 & \ldots & j_m \end{pmatrix}$, $B\begin{pmatrix} i_1 & \ldots & i_m \\ j_1 & \ldots & j_m \end{pmatrix}$ — миноры матриц A и B, стоящие на пересечениях строк с номерами $i_1, \ldots, i_m$ и столбцов с номерами $j_1, \ldots, j_m$, и $C = AB$. Доказать, что

$$C\begin{pmatrix} i_1 & \ldots & i_m \\ j_1 & \ldots & j_m \end{pmatrix} = \begin{cases} \sum\limits_{1 \leqslant k_1 < k_2 < \ldots < k_m \leqslant n} A\begin{pmatrix} i_1 & \ldots & i_m \\ j_1 & \ldots & j_m \end{pmatrix} B\begin{pmatrix} i_1 & \ldots & i_m \\ j_1 & \ldots & j_m \end{pmatrix}, & \text{если } m \leqslant n, \\ 0, \quad \text{если } m > n. \end{cases}$$

16.7. Доказать, что сумма главных миноров порядка k матрицы $A \cdot {}^tA$ равна сумме квадратов всех миноров порядка k матрицы A.

16.8. Пусть

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1n} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

Доказать, что

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1n} & x_1 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & \ldots & a_{nn} & x_n \\ x_1 & \ldots & x_n & z \end{vmatrix} = Dz - \sum_{i,j=1}^{n} A_{ij} x_i x_j.$$

16.9. Доказать, что сумма алгебраических дополнений элементов строки определителя не изменится, если ко всем элементам матрицы прибавить одно и то же число.

16.10. Доказать, что если все элементы какой-нибудь строки (столбца) определителя равны единице, то сумма алгебраических дополнений всех элементов определителя равна самому определителю.

* * *

16.11. Пусть

$$A = \begin{vmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1n} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix}, \qquad B = \begin{vmatrix} b_{11} & \ldots & b_{1k} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ b_{k1} & \ldots & b_{kk} \end{vmatrix},$$

$$D = \begin{vmatrix} a_{11}b_{11} & \ldots & a_{1n}b_{11} & a_{11}b_{12} & \ldots & a_{1n}b_{12} & \ldots & a_{11}b_{1k} & \ldots & a_{1n}b_{1k} \\ \multicolumn{10}{c}{\dotfill} \\ a_{n1}b_{11} & \ldots & a_{nn}b_{11} & a_{n1}b_{12} & \ldots & a_{nn}b_{12} & \ldots & a_{n1}b_{1k} & \ldots & a_{nn}b_{1k} \\ \multicolumn{10}{c}{\dotfill} \\ a_{11}b_{k1} & \ldots & a_{1n}b_{k1} & a_{11}b_{k2} & \ldots & a_{1n}b_{k2} & \ldots & a_{11}b_{kk} & \ldots & a_{1n}b_{kk} \\ \multicolumn{10}{c}{\dotfill} \\ a_{n1}b_{k1} & \ldots & a_{nn}b_{k1} & a_{n1}b_{k2} & \ldots & a_{nn}b_{k2} & \ldots & a_{n1}b_{kk} & \ldots & a_{nn}b_{kk} \end{vmatrix},$$

где D (определитель порядка nk) — кронекеровское произведение определителей A и B. Доказать, что $D = A^k B^n$.

16.12. *Континуантой* называется определитель

$$(a_1 a_2 \ldots a_n) = \begin{vmatrix} a_1 & 1 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ -1 & a_2 & 1 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & -1 & a_3 & 1 & \ldots & 0 & 0 \\ \multicolumn{7}{c}{\dotfill} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & -1 & a_n \end{vmatrix}.$$

а) Выразить $(a_1 a_2 \ldots a_n)$ в виде многочлена от $a_1, \ldots, a_n$.

б) Написать разложение континуанты по первым k строкам.

в) Установить следующую связь континуанты с непрерывными дробямиЖ

$$\frac{(a_1 a_2 \ldots a_n)}{(a_2 a_3 \ldots a_n)} = a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{a_3 + \ldots + \cfrac{1}{\ddots \cfrac{1}{a_{n-1} + \cfrac{1}{a_n}}}}}$$

16.13. Доказать, что если A, B, C, D — квадратные матрицы порядка n и $C \cdot {}^tD = D \cdot {}^tC$, то

$$\begin{vmatrix} A & B \\ C & D \end{vmatrix} = |A \cdot {}^tD - B \cdot {}^tC|.$$

16.14. Доказать, что если A, B, C, D — квадратичные формы порядка n, причём C или D — невырожденная матрица, и $CD = DC$, то

$$\begin{vmatrix} A & B \\ C & D \end{vmatrix} = |AD - BC|.$$

16.15. Вычислить определитель $\begin{vmatrix} cE & A \\ A & cE \end{vmatrix}$, где

$$A = \begin{vmatrix} a & 1 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 1 & a & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 1 & a & 1 & \ldots & 0 \\ \multicolumn{6}{c}{\dotfill} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & a \end{vmatrix}.$$

16.16. Доказать, что определитель, получающийся при вычеркивании k-го столбца в матрице

$$(a_{ij}) = \left(\binom{j-1}{i-1}\right), \qquad i = 1, \ldots, n+1; \quad j = 1, \ldots, n+2,$$

равен $\dbinom{n+1}{k-1}$.

16.17. Доказать, что

$$\begin{vmatrix} \frac{1}{2!} & \frac{1}{3!} & \frac{1}{4!} & \ldots & \frac{1}{(2k+2)!} \\ 1 & \frac{1}{2!} & \frac{1}{3!} & \ldots & \frac{1}{(2k+1)!} \\ 0 & 1 & \frac{1}{2!} & \ldots & \frac{1}{(2k)!} \\ \multicolumn{5}{c}{\dotfill} \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & \frac{1}{2!} \end{vmatrix} = 0, \qquad k \in \mathbb{N}.$$

16.18. (*Тождество Эйлера.*) Перемножив матрицы

$$\begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \\ x_2 & -x_1 & -x_4 & x_3 \\ x_3 & x_4 & -x_1 & -x_2 \\ x_4 & -x_3 & x_2 & -x_1 \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} y_1 & y_2 & y_3 & y_4 \\ y_2 & -y_1 & -y_4 & y_3 \\ y_3 & y_4 & -y_1 & -y_2 \\ y_4 & -y_3 & y_2 & -y_1 \end{pmatrix},$$

доказать, что

$$\begin{aligned} &(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2)(y_1^2 + y_2^2 + y_3^2 + y_4^2) = \\ &\quad = (x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3 + x_4y_4)^2 + (x_1y_2 - x_2y_1 - x_3y_4 + x_4y_3)^2 + \\ &\qquad + (x_1y_3 + x_2y_4 - x_3y_1 - x_4y_2)^2 + (x_1y_4 - x_2y_3 + x_3y_2 - x_4y_1)^2. \end{aligned}$$

16.19. Вычислить определитель матрицы (a_{ij}) порядка n, где:
а) a_{ij} равно 1, если i делит j, и равно 0 в противоположном случае;
б) a_{ij} равно числу общих делителей чисел i и j.

16.20. Доказать, что определитель матрицы (d_{ij}) порядка n, где d_{ij} — наибольший общий делитель чисел i и j, равен $\varphi(1)\varphi(2)\ldots\varphi(n)$.

16.21. Пусть $x_1 \ldots x_n, y_1 \ldots y_n$ — числа, причём $x_i y_j \neq 1$ для всех $i, j = 1, \ldots, n$, $\Delta(x_1, \ldots, x_n)$, $\Delta(y_1, \ldots, y_n)$ — определители Вандермонда. Доказать, что

$$\Delta(x_1, \ldots, x_n)\Delta(y_1, \ldots, y_n) = \det\left(\frac{1}{1 - x_i y_j}\right)_{i,j=1,\ldots,n} \prod_{i,j=1}^{n} (1 - x_i y_j).$$

Глава IV

МАТРИЦЫ

§ 17. Действия над матрицами

17.1. Перемножить матрицы:

а) $\begin{pmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & m \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$;

б) $\begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \cos\beta & -\sin\beta \\ \sin\beta & \cos\beta \end{pmatrix}$;

в) $\begin{pmatrix} 3 & -4 & 5 \\ 2 & -3 & 1 \\ 3 & -5 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 29 \\ 2 & 18 \\ 0 & -3 \end{pmatrix}$;

г) $\begin{pmatrix} 1 & 5 & 3 \\ 2 & -3 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & -3 & 5 \\ -1 & 4 & -2 \\ 3 & -1 & 1 \end{pmatrix}$;

д) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 1 \end{pmatrix}$;

е) $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ -1 & 1 & -3 \\ 2 & -2 & 6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 5 & 2 \\ 0 & 3 & -1 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix}$;

ж) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 3 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$;

з) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -3 & 1 \end{pmatrix}$.

17.2. Выполнить действия:

а) $\begin{pmatrix} 3 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 2 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -2 \\ 2 & 2 & -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2 & 0 & -3 \\ 0 & 6 & -3 \\ 5 & -2 & 8 \end{pmatrix}$;

б) $\begin{pmatrix} 3 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \\ 2 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 2 \\ -2 & -1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & -4 & 6 & 1 \\ 2 & 2 & -5 & -2 \\ 2 & -2 & 6 & 4 \\ 1 & 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

17.3. Вычислить:

а) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & -2 \\ 2 & -2 & 1 \end{pmatrix}^2$; б) $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}^2$;

в) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}^2$; г) $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}^2$.

17.4. Вычислить:

а) $\begin{pmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ -\sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}^n$; б) $\begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}^n$;

в) $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -5 & 2 \end{pmatrix}^n$.

17.5. Вычислить значение многочлена $f(x)$ от матрицы A:

а) $f(x) = x^3 - 2x^2 + 1$, $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$;

б) $f(x) = x^3 - 3x + 2$, $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.

17.6. Доказать, что если матрицы A и B перестановочны, то

$$(A + B)^n = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} A^i B^{n-i}.$$

Привести пример двух матриц A, B, для которых эта формула неверна.

17.7. Вычислить степени квадратной матрицы

$$H = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \hdotsfor{5} \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}.$$

17.8. Пусть задана квадратная матрица

$$J = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \hdotsfor{6} \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \lambda \end{pmatrix}$$

размера n. Доказать, что если $f(x)$ — многочлен, то

$$f(J) = \begin{pmatrix} f(\lambda) & \dfrac{f'(\lambda)}{1!} & \dfrac{f''(\lambda)}{2!} & \dots & \dfrac{f^{(n-2)}(\lambda)}{(n-2)!} & \dfrac{f^{(n-1)}(\lambda)}{(n-1)!} \\ 0 & f(\lambda) & \dfrac{f'(\lambda)}{1!} & \dots & \dfrac{f^{(n-3)}(\lambda)}{(n-3)!} & \dfrac{f^{(n-2)}(\lambda)}{(n-2)!} \\ \hdotsfor{6} \\ 0 & 0 & 0 & \dots & f(\lambda) & \dfrac{f'(\lambda)}{1!} \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & f(\lambda) \end{pmatrix}.$$

17.9. Пусть C, A — квадратные матрицы одного размера и $f(x)$ — многочлен. Доказать, что $f(CAC^{-1}) = Cf(A)C^{-1}$.

17.10. Вычислить e^A, где:

а) $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -4 & -2 \end{pmatrix}$; б) $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

17.11. Вычислить $\ln A$, где:

а) $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -4 & -1 \end{pmatrix}$; б) $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 1 & \dots & 0 \\ \hdotsfor{5} \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}$.

17.12. Пусть $A = (a_{ij})$ — матрица размера $m \times n$. Доказать, что

$$A = \sum_{i,j} a_{ij} E_{ij},$$

где E_{ij} — *матричные единицы.*

17.13. Доказать, что $E_{ij}E_{pq} = \delta_{jp}E_{iq}$.

17.14. Пусть A — произвольная матрица. Вычислить $E_{ij}A$.

17.15. Пусть A — произвольная матрица. Вычислить AE_{ij}.

17.16. Пусть A — квадратная матрица, причём $E_{ij}A = AE_{ij}$ для всех матричных единиц E_{ij}. Доказать, что $A = \lambda E$ для некоторого скаляра λ.

17.17. Пусть A — квадратная матрица, причём $E_{ii}A = AE_{ii}$ для всех i. Доказать, что матрица A диагональна.

17.18. Пусть квадратная матрица A перестановочна со всеми невырожденными матрицами. Доказать, что $A = \lambda E$.

17.19. Найти все матрицы A порядка n такие, что $\operatorname{tr} AX = 0$ для любой матрицы X порядка n.

17.20. Доказать, что след произведения двух матриц не зависит от порядка сомножителей.

17.21. Доказать, что если C — невырожденная матрица, то для любой матрицы A того же порядка $\operatorname{tr} CAC^{-1} = \operatorname{tr} A$.

17.22. При каких λ имеет решение уравнение

$$[X, Y] = \lambda E$$

($[X, Y]$ — коммутатор матриц X и Y)?

17.23. Доказать, что для любых квадратных матриц A, B, C выполняются равенства:

а) $[A, BC] = [A, B]C + B[A, C]$;

б) $[[A, B], C] + [[B, C], A] + [[C, A], B] = 0$.

17.24. Доказать,что для любых матриц порядка 2 выполняется равенство $[[A, B]^2, C] = 0$.

17.25. Пусть A, B, …, D_1 — квадратные матрицы одного порядка. Выразить произведение матриц

$$\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} A_1 & B_1 \\ C_1 & D_1 \end{pmatrix}$$

через заданные матрицы.

* * *

17.26. Пусть A — треугольная вещественная матрица, перестановочная с ${}^tA$. Доказать, что матрица A диагональная.

17.27. Пусть $A = (a_{ij}) \in \mathbf{M}_n(\mathbb{R})$ — симметричная невырожденная матрица, причём существует такое $k < n$, что $a_{ij} = 0$ при $|i - j| \geqslant k$. Предположим, что $A = {}^tB \cdot B$, где $B = (b_{ij})$ — верхнетреугольная матрица. Доказать, что $b_{ij} = 0$, если $j - i \geqslant k$.

17.28. Доказать, что любая матрица со следом 0 является суммой коммутаторов матриц со следом 0.

17.29. Для матрицы

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 \end{pmatrix}$$

найти такие матрицы A и B, что

$$[A, X] = X, \qquad [A, B] = -B, \qquad [X, B] = A.$$

§ 18. Матричные уравнения. Обратная матрица

18.1. Решить систему матричных уравнений:

а) $X + Y = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad 2X + 3Y = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix};$

б) $2X - Y = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad -4X + 2Y = \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}.$

18.2. Доказать, что квадратная матрица X порядка 2 является решением уравнения

$$X^2 - (\operatorname{tr} X)X + \det X = 0.$$

18.3. Решить матричные уравнения

а) $\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix};$ б) $X \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 3 & -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & -1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix};$

в) $\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 4 & -2 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 6 \end{pmatrix}$; г) $X \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 4 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 6 & 2 \end{pmatrix}$;

д) $\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} X \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$;

е) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 3 & 2 & -4 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 0 \\ 10 & 2 & 7 \\ 10 & 7 & 8 \end{pmatrix}$;

ж) $X \begin{pmatrix} 5 & 3 & 1 \\ 1 & -3 & -2 \\ -5 & 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -8 & 3 & 0 \\ -5 & 9 & 0 \\ -2 & 15 & 0 \end{pmatrix}$;

з) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ 0 & 1 & \dots & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & n \\ 0 & 1 & 2 & \dots & n-1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}$;

и) $X \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 4 & 3 & 2 \\ 1 & -2 & 5 \end{pmatrix}$;

к) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$;

л) $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} X \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$;

м) $X \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 4 & 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \\ 3 & 6 & 9 \end{pmatrix}$;

н) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$;

о) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 5 & -1 & 2 \\ -6 & 4 & 6 \\ -2 & 0 & 7 \end{pmatrix}$.

18.4. Пусть A, B — матрицы размеров $m \times n$ и $m \times k$ соответственно. Доказать, что матричное уравнение $AX = B$, где X — матрица размера $n \times k$, имеет решение тогда и только тогда, когда ранг матрицы A совпадает с рангом расширенной матрицы $(A|B)$.

18.5. Пусть A — квадратная матрица. Доказать, что матричное уравнение $AX = B$ имеет единственное решение тогда и только тогда, когда матрица A невырождена.

18.6. Пусть A — матрица размера $n \times m$, причём $m \neq n$. Доказать, что для любого натурального числа k существует такая матрица B размера $n \times k$, что матричное уравнение $AX = B$ не имеет единственного решения.

18.7. Доказать, что система уравнений

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} X_j = B_i, \qquad i = 1, 2, \ldots, n,$$

где X_j и B_i — матрицы порядка $p \times q$, имеет единственное решение тогда и только тогда, когда $\det(a_{ij}) \neq 0$.

18.8. С помощью присоединенной матрицы найти обратную к матрице:

а) $\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$; б) $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$; в) $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}$;

г) $\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 7 \end{pmatrix}$; д) $\begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$; е) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}$;

ж) $\begin{pmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & 5 \end{pmatrix}$; з) $\begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 2 & 7 & 0 \\ 0 & 0 & 7 \end{pmatrix}$; и) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 3 \end{pmatrix}$;

к) $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$; л) $\begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$.

18.9. Найти с помощью элементарных преобразований обратную к матрице:

а) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$; б) $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$;

в) $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$; г) $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \end{pmatrix}$;

д) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ 0 & 1 & \dots & 1 \\ \multicolumn{4}{c}{\dotfill} \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}$; е) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \multicolumn{6}{c}{\dotfill} \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 1 \end{pmatrix}$;

ж) $\begin{pmatrix} 2 & 5 & 7 \\ 6 & 3 & 4 \\ 5 & -2 & -3 \end{pmatrix}$; з) $\begin{pmatrix} 3 & -4 & 5 \\ 2 & -3 & 1 \\ 3 & -5 & -1 \end{pmatrix}$;

и) $\begin{pmatrix} 2 & 7 & 3 \\ 3 & 9 & 4 \\ 1 & 5 & 3 \end{pmatrix}$; к) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & -2 \\ 2 & -2 & 1 \end{pmatrix}$;

л) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -2 & -6 \end{pmatrix}$.

18.10. Найти обратную к квадратной матрице:

а) $\begin{pmatrix} A & 0 \\ B & C \end{pmatrix}$; б) $\begin{pmatrix} A & B \\ 0 & C \end{pmatrix}$;

где A, C — невырожденные матрицы.

18.11. Найти обратную к матрице:

а) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$; б) $\begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}$.

18.12. Пусть A, B, C, D — невырожденные матрицы. Доказать, что

$$\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} (A - BD^{-1}C)^{-1} & (C - DB^{-1}A)^{-1} \\ (B - AC^{-1}D)^{-1} & (D - CA^{-1}B)^{-1} \end{pmatrix}.$$

18.13. Какие значения может принимать определитель

а) ортогональной матрицы;

б) унитарной матрицы?

18.14. Чему равен определитель целочисленной матрицы A, если матрица A^{-1} также целочисленная?

18.15. Пусть A — квадратная матрица порядка n, элементы которой — многочлены от переменной t, и $\det A$ — ненулевой многочлен. Доказать, что существует единственная матрица B, элементы кото-

рой — многочлены от t, такая, что $AB = BA = (\det A)E$. Найти B, если:

$$\text{а) } A = \begin{pmatrix} 1-t & 1+t \\ 1+t^2 & t^3 \end{pmatrix}; \qquad \text{б) } A = \begin{pmatrix} t & 1 & t \\ -1 & 1 & 1 \\ -t & 1 & t \end{pmatrix}.$$

18.16. Доказать, что в кольце матриц над полем:

а) обратимая матрица не является делителем нуля;

б) любая матрица либо обратима, либо является левым и правым делителем нуля.

18.17. Доказать, что если матрица $E+AB$ обратима, то матрица $E+BA$ также обратима.

18.18. Пусть A и B — матрицы размеров $n \times m$ и $m \times n$, причём AB и BA — единичные матрицы размеров n и m. Доказать, что $m = n$.

18.19. Пусть A — матрица размера $m \times n$, имеющая ранг m. Доказать, что существует такая матрица X размера $n \times m$, что AX — единичная матрица размера m.

18.20. Как изменится матрица A^{-1}, если в A:

а) переставить i-ю и j-ю строки;

б) к i-й строке прибавить j-ю, умноженную на c;

в) умножить i-ю строку на число $c \neq 0$;

г) преобразования а)–в) совершить со столбцами?

18.21. Доказать, что $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$.

* * *

18.22. Пусть $\widehat{X}$ — присоединенная матрица (см. 16.4) для квадратной матрицы X. Доказать, что

$$\widehat{AB} = \widehat{B}\widehat{A}, \qquad \widehat{A^{-1}} = (\widehat{A})^{-1}, \qquad \widehat{({}^tA)} = {}^t(\widehat{A}).$$

18.23. Пусть B и C — строки длины n, причём $C\,{}^tB \neq -1$ и E — единичная матрица размера n. Доказать, что матрица $E + {}^tBC$ обратима.

18.24. Пусть B, C — строки длины n, причём $C\,{}^tB = -1$, и E — единичная матрица размера n. Доказать, что ранг матрицы $E + {}^tBC$ равен $n-1$.

§ 19. Матрицы специального вида

19.1. Доказать, что $E_{ii} - E_{jj} = [E_{ij}, E_{ji}]$ при $i \neq j$.

19.2. Представить в виде произведения элементарных матриц матрицу:

а) $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}$; б) $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

19.3. Используя свойства элементарных матриц, перемножить матрицы:

а) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 5 & 7 \\ 1 & 2 & 4 & 8 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$;

б) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 5 & 7 \\ 1 & 2 & 4 & 8 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$;

в) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 5 & 7 \\ 1 & 2 & 4 & 8 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 0 \\ -3 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$;

г) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 0 \\ -3 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 5 & 7 \\ 1 & 2 & 4 & 8 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

19.4. Доказать следующие свойства операции транспонирования:

а) ${}^t(A+B) = {}^tA + {}^tB$; б) ${}^t(\lambda A) = \lambda {}^tA$;

в) ${}^t(AB) = {}^tB \cdot {}^tA$; г) $({}^tA)^{-1} = {}^t(A^{-1})$; д) ${}^t({}^tA) = A$.

19.5. Доказать, что всякая матрица может быть единственным образом представлена в виде суммы симметрической и кососимметрической матриц.

19.6. Доказать, что:

а) если матрицы A и B ортогональны, то матрицы A^{-1} и AB также ортогональны;

б) если комплексные матрицы A и B унитарны, то матрицы A^{-1} и AB также унитарны.

19.7. Доказать, что:

а) произведение двух симметрических или кососимметрических матриц является симметрической матрицей тогда и только тогда, когда эти матрицы перестановочны;

б) произведение симметрической и кососимметрической матриц является кососимметрической матрицей тогда и только тогда, когда эти матрицы перестановочны.

19.8. При каком условии произведение двух эрмитовых или косоэрмитовых матриц является эрмитовой матрицей?

19.9. Доказать, что для любой квадратной комплексной матрицы X существует матрица Y такая, что $XYX = X$, $YXY = Y$, и матрицы XY и YX эрмитовы.

19.10. Доказать, что матрица, обратная к симметрической или кососимметрической, является симметрической или кососимметрической.

19.11. Доказать, что если матрицы A и B обе симметрические или кососимметрические, то их коммутатор $[A, B]$ — кососимметрическая матрица.

19.12. Верно ли, что всякая кососимметрическая матрица является суммой коммутаторов кососимметрических матриц?

19.13. Найти все симметрические ортогональные и кососимметрические ортогональные матрицы порядка 2.

19.14. Найти все нижние нильтреугольные матрицы, коммутирующие со всеми нижними нильтреугольными матрицами того же порядка.

19.15. Доказать, что сумма двух коммутирующих нильпотентных матриц является нильпотентной матрицей. Верно ли это утверждение, если матрицы не коммутируют?

19.16. Доказать, что если матрицы A, B и $[A, B]$ нильпотентные и матрицы A и B коммутируют с матрицей $[A, B]$, то матрица $A + B$ нильпотентна.

19.17. Доказать, что если матрица A порядка 2 нильпотентна, то $A^2 = 0$.

19.18. Доказать, что всякая нижняя нильтреугольная матрица нильпотентна.

19.19. Доказать, что если матрица A нильпотентна, то матрицы $E - A$ и $E + A$ обратимы.

19.20. Доказать, что если матрица A нильпотентна и многочлен $f(t)$ имеет свободный член, отличный от 0, то матрица $f(A)$ обратима.

19.21. Решить уравнение $AX + X + A = 0$, где A — нильпотентная матрица.

19.22. Доказать, что нильпотентная матрица порядка 2 имеет нулевой след.

19.23. Доказать, что произведение двух коммутирующих периодических матриц является периодической матрицей. Верно ли это утверждение, если матрицы не коммутируют?

19.24. Доказать, что матрица CAC^{-1} является нильпотентной или периодической тогда и только тогда, когда матрица A является нильпотентной или периодической.

19.25. Пусть σ — перестановка на множестве $\{1, 2, \ldots, n\}$ и $A_\sigma = (\delta_{i\sigma(j)})$ (δ_{ij} — символ Кронекера). Доказать, что:

а) матрица A_σ периодическая;

б) для любых перестановок σ и τ $A_{\sigma\tau} = A_\sigma A_\tau$;

в) A_σ может быть представлена в виде произведения не более чем $n - 1$ элементарных матриц.

19.26. Доказать, что произведение верхнетреугольных матриц является верхнетреугольной матрицей.

19.27. Доказать, что матрица, обратная к унитреугольной, является унитреугольной.

19.28. Пусть A, B, C, D — квадратные комплексные матрицы размера n, причём $CD = DC$. Доказать, что

$$\det\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \neq 0 \iff \det(AD - BC) \neq 0.$$

Глава V

КОМПЛЕКСНЫЕ ЧИСЛА

§ 20. Комплексные числа в алгебраической форме

20.1. Вычислить выражения:

а) $(2+i)(3-i)+(2+3i)(3+4i)$;

б) $(2+i)(3+7i)-(1+2i)(5+3i)$;

в) $(4+i)(5+3i)-(3+i)(3-i)$; г) $\dfrac{(5+i)(7-6i)}{3+i}$;

д) $\dfrac{(5+i)(3+5i)}{2i}$; е) $\dfrac{(1+3i)(8-i)}{(2+i)^2}$;

ж) $\dfrac{(2+i)(4+i)}{1+i}$; з) $\dfrac{(3-i)(1-4i)}{2-i}$;

и) $(2+i)^3+(2-i)^3$; к) $(3+i)^3-(3-i)^3$;

л) $\dfrac{(1+i)^5}{(1-i)^3}$; м) $\left(-\dfrac{1}{2}\pm\dfrac{\sqrt{3}}{2}i\right)^3$.

20.2. Вычислить i^{77}, i^{98}, i^{-57}, i^n, где n — целое число.

20.3. Доказать равенства:

а) $(1+i)^{8n}=2^{4n}, \quad n\in\mathbb{Z}$; б) $(1+i)^{4n}=(-1)2^{2n}, \quad n\in\mathbb{Z}$.

20.4. Решить систему уравнений:

а) $\begin{cases}(1+i)z_1+(1-i)z_2=1+i,\\(1-i)z_1+(1+i)z_2=1+3i;\end{cases}$

б) $\begin{cases}iz_1+(1+i)z_2=2+2i,\\2iz_1+(3+2i)z_2=5+3i;\end{cases}$ в) $\begin{cases}(1-i)z_1-3iz_2=-i,\\2z_1-(3+3i)z_2=3-i;\end{cases}$

г) $\begin{cases} 2z_1 - (2+i)z_2 = -i, \\ (4-2i)z_1 - 5z_2 = -1-2i; \end{cases}$ д) $\begin{cases} x + iy - 2z = 10, \\ x - y + 2iz = 20, \\ ix + 3iy - (1+i)z = 30. \end{cases}$

20.5. Найти вещественные числа x и y, удовлетворяющие уравнению:

а) $(2+i)x + (1+2i)y = 1-4i$; б) $(3+2i)x + (1+3i)y = 4-9i$.

20.6. Доказать, что:

а) комплексное число z является вещественным тогда и только тогда, когда $\overline{z} = z$;

б) комплексное число z является чисто мнимым тогда и только тогда, когда $\overline{z} = -z$.

20.7. Доказать, что:

а) произведение двух комплексных чисел является вещественным тогда и только тогда, когда одно из них отличается от сопряжённого к другому вещественным множителем;

б) сумма и произведение двух комплексных чисел являются вещественными тогда и только тогда, когда данные числа или сопряжены, или оба вещественны.

20.8. Найти все комплексные числа, сопряжённые:

а) своему квадрату; б) своему кубу.

20.9. Доказать, что если из данных комплексных чисел $z_1, z_2, \ldots, z_n$ при применении конечного числа операций сложения, вычитания, умножения и деления получается число z, то из чисел $\overline{z}_1, \overline{z}_2, \ldots, \overline{z}_n$ при применении тех же операций получается число $\overline{z}$.

20.10. Доказать, что определитель

$$\begin{vmatrix} z_1 & \overline{z}_1 & a \\ z_2 & \overline{z}_2 & b \\ z_3 & \overline{z}_3 & c \end{vmatrix},$$

где z_1, z_2, z_3 — комплексные и a, b, c — вещественные числа, является чисто мнимым числом.

20.11. Решить уравнения:

а) $z^2 = i$; б) $z^2 = 3-4i$;

в) $z^2 = 5-12i$; г) $z^2 - (1+i)z + 6 + 3i = 0$;

д) $z^2 - 5z + 4 + 10i = 0$; е) $z^2 + (2i-7)z + 13 - i = 0$.

§ 21. Комплексные числа в тригонометрической форме

21.1. Найти тригонометрическую форму числа:

а) 5; б) i; в) -2; г) $-3i$;

д) $1+i$; е) $1-i$; ж) $1+i\sqrt{3}$; з) $-1+i\sqrt{3}$;

и) $-1-i\sqrt{3}$; к) $1-i\sqrt{3}$; л) $\sqrt{3}+i$; м) $-\sqrt{3}+i$;

н) $-\sqrt{3}-i$; о) $\sqrt{3}-i$; п) $1+i\dfrac{\sqrt{3}}{3}$; р) $2+\sqrt{3}+i$;

с) $1-(2+\sqrt{3})i$; т) $\cos\alpha - i\sin\alpha$; у) $\sin\alpha + i\cos\alpha$;

ф) $\dfrac{1+i\operatorname{tg}\alpha}{1-i\operatorname{tg}\alpha}$; х) $1+\cos\varphi+i\sin\varphi$, $\varphi\in[-\pi,\pi]$;

ц) $\dfrac{\cos\varphi+i\sin\varphi}{\cos\psi+i\sin\psi}$.

21.2. Вычислить выражения:

а) $(1+i)^{1000}$; б) $(1+i\sqrt{3})^{150}$; в) $(\sqrt{3}+i)^{30}$;

г) $\left(1+\dfrac{\sqrt{3}}{2}+\dfrac{i}{2}\right)^{24}$; д) $(2-\sqrt{3}+i)^{12}$; е) $\left(\dfrac{1-i\sqrt{3}}{1+i}\right)^{12}$;

ж) $\left(\dfrac{\sqrt{3}+i}{1-i}\right)^{30}$; з) $\dfrac{(-1+i\sqrt{3})^{15}}{(1-i)^{20}}+\dfrac{(-1-i\sqrt{3})^{15}}{(1+i)^{20}}$.

21.3. Решить уравнения:

а) $|z|+z=8+4i$; б) $|z|-z=8+12i$.

21.4. Доказать следующие свойства модуля комплексных чисел:

а) $|z_1\pm z_2|\leqslant|z_1|+|z_2|$; б) $||z_1|-|z_2||\leqslant|z_1\pm z_2|$;

в) $|z_1+z_2|=|z_1|+|z_2|$ тогда и только тогда, когда векторы z_1 и z_2 имеют одинаковые направления;

г) $|z_1+z_2|=||z_1|-|z_2||$ тогда и только тогда, когда векторы z_1 и z_2 имеют противоположные направления.

21.5. Доказать, что:

а) если $|z|<1$, то $|z^2-z+i|<3$;

б) если $|z|\leqslant 2$, то $1\leqslant|z^2-5|\leqslant 9$;

в) если $|z|<1/2$, то $|(1+i)z^3+iz|<3/4$.

21.6. Доказать неравенство

$$|z_1-z_2|\leqslant||z_1|-|z_2||+\min\{|z_1|,|z_2|\}\cdot|\arg z_1-\arg z_2|.$$

В каком случае это неравенство обращается в равенство?

21.7. Доказать, что если $u = \sqrt{z_1 z_2}$, то

$$|z_1| + |z_2| = \left|\frac{z_1 + z_2}{2} - \sqrt{z_1 z_2}\right| + \left|\frac{z_1 + z_2}{2} + \sqrt{z_1 z_2}\right|.$$

21.8. Доказать формулу Муавра

$$\big[r(\cos\varphi + i\sin\varphi)\big]^n = r^n(\cos n\varphi + i\sin n\varphi)$$

для целых $n \neq 0$.

21.9. При $n \in \mathbb{Z}$ вычислить выражения:

а) $(1+i)^n$; б) $\left(\dfrac{1 - i\sqrt{3}}{2}\right)^n$;

в) $\left(\dfrac{1 - i\operatorname{tg}\alpha}{1 + i\operatorname{tg}\alpha}\right)^n$; г) $(1 + \cos\varphi + i\sin\varphi)^n$.

21.10. Доказать, что если $z + z^{-1} = 2\cos\varphi$, то $z^n + z^{-n} = 2\cos n\varphi$, где $n \in \mathbb{Z}$.

21.11. Представить в виде многочленов от $\sin x$ и $\cos x$ функции:

а) $\sin 4x$; б) $\cos 4x$; в) $\sin 5x$; г) $\cos 5x$.

21.12. Доказать равенства:

а) $\cos nx = \sum\limits_{k=0}^{[n/2]} (-1)^k \dbinom{n}{2k} \cos^{n-2k} x \cdot \sin^{2k} x$;

б) $\sin nx = \sum\limits_{k=0}^{[(n-1)/2]} (-1)^k \dbinom{n}{2k+1} \cos^{n-2k-1} x \cdot \sin^{2k+1} x$.

21.13. Выразить через первые степени синуса и косинуса аргументов, кратных x, функции:

а) $\sin^4 x$; б) $\cos^4 x$; в) $\sin^5 x$; г) $\cos^5 x$.

21.14. Доказать равенства:

а) $\cos^{2m} x = \dfrac{1}{2^{2m-1}} \left[\sum\limits_{k=0}^{m-1} \dbinom{2m}{k} \cos(2m-2k)x + \dfrac{1}{2}\dbinom{2m}{m}\right]$;

б) $\cos^{2m+1} x = \dfrac{1}{2^{2m}} \sum\limits_{k=0}^{m} \dbinom{2m+1}{k} \cos(2m+1-2k)x$;

в) $\sin^{2m} x =$

$$= \frac{(-1)^m}{2^{2m-1}} \left[\sum_{k=0}^{m-1} (-1)^k \binom{2m}{k} \cos(2m-2k)x + \frac{(-1)^m}{2} \binom{2m}{m} \right];$$

г) $\sin^{2m+1} x = \dfrac{(-1)}{2^{2m}} \sum\limits_{k=0}^{m} (-1)^k \dbinom{2m+1}{k} \sin(2m+1-2k)x.$

§ 22. Корни из комплексных чисел и многочлены деления круга

22.1. Доказать, что если комплексное число z является одним из корней степени n из числа вещественного a, то и сопряжённое число $\overline{z}$ является одним из корней степени n из a.

22.2. Доказать, что если $\sqrt[n]{z} = \{z_1, z_2, \ldots, z_n\}$, то $\sqrt[n]{\overline{z}} = \{\overline{z}_1, \overline{z}_2, \ldots$ $\ldots, \overline{z}_n\}$.

22.3. Какие из множеств $\sqrt[n]{z}$ содержат хотя бы одно вещественное число?

22.4. Пусть z и w — комплексные числа. Доказать равенства[1]:

а) $\sqrt[n]{z^n w} = z \sqrt[n]{w}$; б) $\sqrt[n]{-z^n w} = -z \sqrt[n]{w}$;

в) $\sqrt[n]{zw} = u \sqrt[n]{w}$, где u — одно из значений $\sqrt[n]{z}$.

22.5. Доказать, что объединение множеств $\sqrt[n]{z}$ и $\sqrt[n]{-z}$ есть множество $\sqrt[2n]{z^2}$.

22.6. Верно ли равенство $\sqrt[ns]{z^s} = \sqrt[n]{z}$ $(s > 1)$?

22.7. Вычислить:

а) $\sqrt[6]{i}$; б) $\sqrt[10]{512(1-i\sqrt{3})}$; в) $\sqrt[8]{2\sqrt{2}(1-i)}$;

г) $\sqrt[3]{1}$; д) $\sqrt[4]{1}$; е) $\sqrt[6]{1}$;

ж) $\sqrt[3]{i}$; з) $\sqrt[4]{-4}$; и) $\sqrt[6]{64}$;

к) $\sqrt[8]{16}$; л) $\sqrt[6]{-27}$; м) $\sqrt[4]{8\sqrt{3}i-8}$;

н) $\sqrt[4]{-72(1-i\sqrt{3})}$; о) $\sqrt[3]{1+i}$; п) $\sqrt[3]{2-2i}$;

р) $\sqrt[4]{-\dfrac{18}{1+i\sqrt{3}}}$; с) $\sqrt[4]{\dfrac{7-2i}{1+i\sqrt{2}} + \dfrac{4+14i}{\sqrt{2}+2i} - (8-2i)}$;

[1] Множество zA есть по определению $\{za|\ a \in A\}$.

т) $\sqrt[3]{\dfrac{1-5i}{1+i} - 5\dfrac{1+2i}{2-i} + 2}$; у) $\sqrt[4]{\dfrac{-2+2\sqrt{3}i}{2+i\sqrt{5}} - 5\dfrac{\sqrt{3}+i}{2\sqrt{5}+5i}}$.

22.8. Найти двумя способами корни степени 5 из единицы и выразить в радикалах:

а) $\cos\dfrac{2\pi}{5}$; б) $\sin\dfrac{2\pi}{5}$; в) $\cos\dfrac{4\pi}{5}$; г) $\sin\dfrac{4\pi}{5}$.

22.9. Решить уравнения:

а) $(z+1)^n + (z-1)^n = 0$; б) $(z+1)^n - (z-1)^n = 0$;

в) $(z+i)^n + (z-i)^n = 0$.

22.10. Выразить в радикалах вещественные и мнимые части корней из единицы степеней 2, 3, 4, 6, 8, 12.

22.11. Найти произведение всех корней степени n из единицы.

22.12. Пусть $\varepsilon_k = \cos\dfrac{2\pi k}{n} + i\sin\dfrac{2\pi k}{n}$ $(0 \leqslant k < n)$. Доказать, что:

а) $\sqrt[n]{1} = \{\varepsilon_0, \varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_{n-1}\}$;

б) $\varepsilon_k = \varepsilon_1^k$ $(0 \leqslant k < n)$;

в) $\varepsilon_k\varepsilon_l = \begin{cases} \varepsilon_{k+l}, & \text{если } k+l < n, \\ \varepsilon_{k+l-n}, & \text{если } k+l \geqslant n \end{cases}$ $(0 \leqslant k < n,\ 0 \leqslant l < n)$;

г) множество $\mathbf{U}_n$ корней степени n из единицы является циклической группой порядка n относительно умножения;

д) всякая циклическая группа порядка n изоморфна группе $\mathbf{U}_n$.

22.13. Доказать, что:

а) если числа r и s взаимно просты и $\alpha^r = \alpha^s = 1$, то $\alpha = 1$;

б) если d — наибольший общий делитель чисел r и s, то $\mathbf{U}_r \cap \mathbf{U}_s = \mathbf{U}_d$;

в) если числа r и s взаимно просты, то всякий корень из единицы степени rs однозначно представляется в виде произведения корня степени r на корень степени s.

22.14. Доказать, что следующие утверждения равносильны:

а) ε является первообразным корнем из единицы степени n;

б) порядок ε в группе $\mathbf{U}_n$ равен n;

в) ε является порождающим элементом группы $\mathbf{U}_n$.

22.15. Доказать, что если ε является первообразным корнем степени n из единицы, то $\overline{\varepsilon}$ также является первообразным корнем степени n из единицы.

22.16. Доказать, что если числа r и s взаимно просты, то ε является первообразным корнем степени rs из единицы тогда и только тогда, когда ε является произведением первообразного корня степени r и первообразного корня степени s.

22.17. а) Пусть z — первообразный корень n-й степени из 1. Вычислить

$$1 + 2z + 3z^2 + \ldots + nz^{n-1}.$$

б) Пусть z — первообразный корень степени $2n$ из 1. Вычислить

$$1 + z + \ldots + z^{n-1}.$$

в) Пусть z — корень из 1 и $z^n \pm z^m \pm 1 = 0$. Найти n и m.

22.18. Доказать, что:

а) число первообразных корней степени n из единицы равно $\varphi(n)$ (см. 1.4);

б) если числа m и n взаимно просты, то $\varphi(mn) = \varphi(m)\varphi(n)$.

22.19. Доказать, что если z — первообразный корень нечётной степени n из единицы, то $-z$ — первообразный корень степени $2n$.

* * *

22.20. Обозначим через $\sigma(n)$ сумму всех первообразных корней степени n из единицы. Доказать, что:

а) $\sigma(1) = 1$;

б) если $n > 1$, то $\sum\limits_{d|n} \sigma(d) = 0$;

в) $\sigma(p) = -1$, если p — простое число;

г) $\sigma(p^k) = 0$, если p — простое число, $k > 1$;

д) $\sigma(rs) = \sigma(r) \cdot \sigma(s)$, если числа r и s взаимно просты;

е) функция $\sigma(n)$ совпадает с функцией Мёбиуса $\mu(n)$.

22.21. Пусть d — (положительный) наибольший общий делитель целого числа s и натурального числа n, ε_i — первообразный корень степени n из единицы ($i = 1, 2, \ldots, \varphi(n)$). Доказать равенство

$$\sum_{i=1}^{\varphi(n)} \varepsilon_i^s = \frac{\varphi(n)}{\varphi(n/d)}\, \mu\left(\frac{n}{d}\right).$$

22.22. Является ли число $\dfrac{2+i}{2-i}$ корнем некоторой степени из единицы?

22.23. Найти многочлены деления круга (круговые многочлены) $\Phi_n(x)$ для n, равного:

а) 1; б) 2; в) 3; г) 4; д) 6; е) 12;

ж) p, где p — простое число;

з) p^k, где p — простое число, $k > 1$.

22.24. Доказать следующие свойства круговых многочленов:

а) $\prod\limits_{d|n} \Phi_d(x) = x^n - 1$;

б) $\Phi_{2n}(x) = \Phi_n(-x)$ (n — нечётное число, большее 1);

в) $\Phi_n(x) = \prod\limits_{d|n} (x^d - 1)^{\mu(n/d)}$;

г) если k делится на любой простой делитель числа n, то

$$\Phi_n(x) = \Phi_k(x^{n/k});$$

д) если n делится на простое число p и не делится на p^2, то

$$\Phi_n(x) = \Phi_{n/p}(x^p)\left(\Phi_{n/p}(x)\right)^{-1}.$$

22.25. Найти круговые многочлены для n, равного 10, 14, 15, 30, 36, 100, 216, 288, 1000.

22.26. Доказать, что у всякого кругового многочлена:

а) все коэффициенты — целые числа;

б) старший коэффициент равен 1;

в) свободный член равен -1 при $n = 1$ и равен 1 при $n > 1$.

22.27. Найти сумму коэффициентов кругового многочлена $\Phi_n(x)$.

§ 23. Вычисления с помощью комплексных чисел

23.1. Вычислить суммы:

а) $1 - \binom{n}{2} + \binom{n}{4} - \binom{n}{6} + \ldots$;

б) $\binom{n}{1} - \binom{n}{3} + \binom{n}{5} - \binom{n}{7} + \ldots$;

в) $1 + \binom{n}{4} + \binom{n}{8} + \ldots;$ г) $\binom{n}{1} + \binom{n}{5} + \binom{n}{9} + \ldots$

23.2. Доказать равенства:

а) $\cos x + \cos 2x + \ldots + \cos nx = \dfrac{\sin\frac{nx}{2}\cos\frac{(n+1)x}{2}}{\sin\frac{x}{2}}$ $(x \neq 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z});$

б) $\sin x + \sin 2x + \ldots + \sin nx = \dfrac{\sin\frac{nx}{2}\sin\frac{(n+1)x}{2}}{\sin\frac{x}{2}}$ $(x \neq 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z});$

в) $\cos\dfrac{\pi}{n} + \cos\dfrac{3\pi}{n} + \cos\dfrac{5\pi}{n} + \ldots + \cos\dfrac{(2n-1)\pi}{n} = 0;$

г) $\sin\dfrac{\pi}{n} + \sin\dfrac{3\pi}{n} + \sin\dfrac{5\pi}{n} + \ldots + \sin\dfrac{(2n-1)\pi}{n} = 0;$

д) $\dfrac{1}{n}\sum\limits_{k=0}^{n-1}(x + \varepsilon_k y)^n = x^n + y^n$ $(\varepsilon_0, \varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_{n-1}$ — корни степени n из единицы);

е) $x^{2n+1} - 1 = (x-1)\prod\limits_{k=1}^{n}\left(x^2 - 2x\cos\dfrac{\pi k}{2n+1} + 1\right);$

ж) $x^{2n} - 1 = (x^2-1)\prod\limits_{k=1}^{n-1}\left(x^2 - 2x\cos\dfrac{\pi k}{n} + 1\right);$

з) $\prod\limits_{k=1}^{n-1}\sin\dfrac{\pi k}{2n} = \dfrac{\sqrt{n}}{2^{n-1}};$ и) $\prod\limits_{k=1}^{n}\sin\dfrac{\pi k}{2n+1} = \dfrac{\sqrt{2n+1}}{2^n}.$

* * *

23.3. Решить уравнение

$$\cos\varphi + \binom{n}{1}\cos(\varphi+\alpha)x + \binom{n}{2}\cos(\varphi+2\alpha)x^2 + \ldots$$
$$\ldots + \binom{n}{n}\cos(\varphi+n\alpha)x^n = 0.$$

23.4. Доказать, что:

а) $1 + \binom{n}{3} + \binom{n}{6} + \ldots = \dfrac{1}{3}\left(2^n + 2\cos\dfrac{\pi n}{3}\right);$

б) $\binom{n}{1} + \binom{n}{4} + \binom{n}{7} + \ldots = \dfrac{1}{3}\left(2^n + 2\cos\dfrac{(n-2)\pi}{4}\right);$

в) $\binom{n}{2} + \binom{n}{5} + \binom{n}{8} + \ldots = \frac{1}{3}\left(2^n + 2\cos\frac{(n-4)\pi}{3}\right)$;

г) $2\cos mx = (2\cos x)^m - \frac{m}{1}(2\cos x)^{m-2} + \frac{m(m-3)}{1\cdot 2}(2\cos x)^{m-4} + \ldots$
$$\ldots + (-1)^k \frac{m(m-k-1)\ldots(m-2k+1)}{k!}(2\cos x)^{m-2k} + \ldots$$

23.5. Найти суммы:

а) $\cos x + \binom{n}{1}\cos 2x + \ldots + \binom{n}{n}\cos(n+1)x$;

б) $\sin x + \binom{n}{1}\sin 2x + \ldots + \binom{n}{n}\sin(n+1)x$;

в) $\sin^2 x + \sin^2 3x + \ldots + \sin^2(2n-1)x$;

г) $\cos x + 2\cos 2x + 3\cos 3x + \ldots + n\cos nx$;

д) $\sin x + 2\sin 2x + 3\sin 3x + \ldots + n\sin nx$.

23.6. Доказать, что:

а) $\cos^2 x + \cos^2 2x + \ldots + \cos^2 nx = \frac{n}{2} + \frac{\cos(n+1)x\sin nx}{2\sin x}$;

б) $\sin^2 x + \sin^2 2x + \ldots + \sin^2 nx = \frac{n}{2} - \frac{\cos(n+1)x\sin nx}{2\sin x}$.

23.7. Доказать, что для нечётного натурального числа m
$$\frac{\sin mx}{\sin x} = (-4)^{(m-1)/2} \prod_{1\leqslant j\leqslant (m-1)/2}\left(\sin^2 x - \sin^2\frac{2\pi j}{m}\right).$$

§ 24. Связь комплексных чисел с геометрией на плоскости

24.1. Изобразить на плоскости точки, соответствующие числам $5,\ -2,\ -3i,\ \pm 1 \pm i\sqrt{3}$.

24.2. Найти комплексные числа, соответствующие:

а) вершинам квадрата с центром в начале координат, со сторонами длины 1, параллельными осям координат;

б) вершинам правильного треугольника с центром в начале координат, стороной, параллельной оси координат, вершиной на отрицательной вещественной полуоси и радиусом описанного круга, равным 1;

в) вершинам правильного шестиугольника с центром в точке $2+i\sqrt{3}$, стороной, параллельной оси абсцисс, и радиусом описанного круга, равным 2;

г) вершинам правильного n-угольника с центром в начале координат, одной из вершин которого является 1.

24.3. Указать геометрический смысл выражения $|z_1 - z_2|$, где z_1 и z_2 — заданные комплексные числа.

24.4. Указать геометрический смысл числа $\arg\dfrac{z_1 - z_2}{z_2 - z_3}$, где z_1, z_2, z_3 — различные комплексные числа.

24.5. Как расположены на плоскости точки, соответствующие:

а) комплексным числам z_1, z_2, z_3, для которых

$$z_1 + z_2 + z_3 = 0, \qquad |z_1| = |z_2| = |z_3| \neq 0;$$

б) комплексным числам z_1, z_2, z_3, z_4, для которых

$$z_1 + z_2 + z_3 + z_4 = 0, \qquad |z_1| = |z_2| = |z_3| = |z_4| \neq 0;$$

24.6. Изобразить на плоскости множество точек, соответствующих комплексным числам z, удовлетворяющим условиям:

а) $|z| = 1$; б) $\arg z = \pi/3$; в) $|z| \leqslant 2$;
г) $|z-1-i| < 1$; д) $|z+3+4i| \leqslant 5$; е) $2 < |z| < 3$;
ж) $1 \leqslant |z-2i| < 2$; з) $|\arg z| < \pi/6$; и) $|\operatorname{Re} z| \leqslant 1$;
к) $-1 < \operatorname{Re} iz < 0$; л) $|\operatorname{Im} z| = 1$; м) $|\operatorname{Re} z + \operatorname{Im} z| < 1$;
н) $|z-1|+|z+1| = 3$; о) $|z+2|-|z-2| = 3$; п) $|z-2| = \operatorname{Re} z + 2$;
р) $\alpha < \arg(z - z_0) < \beta$, где $-\pi < \alpha < \beta \leqslant \pi$ и z_0 — заданное комплексное число.

24.7. Доказать тождество

$$|z+w|^2 + |z-w|^2 = 2|z|^2 + 2|w|^2$$

и указать его геометрический смысл.

24.8. Пусть комплексные числа z_1, z_2, z_3 соответствуют вершинам параллелограмма A_1, A_2, A_3. Найти число, соответствующее вершине A_4, противолежащей A_2.

24.9. Найти комплексные числа, соответствующие противоположным вершинам квадрата, если двум его другим противоположным вершинам соответствуют числа z и w.

24.10. Найти комплексные числа, соответствующие вершинам правильного n-угольника, если двум его соседним вершинам соответствуют числа z_0 и z_1.

24.11. Изобразить на плоскости множество точек, соответствующих комплексным числам $z = \dfrac{1+ti}{1-ti}$, где $t \in \mathbb{R}$.

24.12. Доказать, что:

а) точки плоскости, соответствующие комплексным числам z_1, z_2, z_3, лежат на одной прямой тогда и только тогда, когда существуют вещественные числа λ_1, λ_2, λ_3, не все равные нулю, такие, что

$$\lambda_1 z_1 + \lambda_2 z_2 + \lambda_3 z_3 = 0, \qquad \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 0;$$

б) точки плоскости, соответствующие различным комплексным числам z_1, z_2, z_3, лежат на одной прямой тогда и только тогда, когда число $\dfrac{z_1 - z_3}{z_2 - z_3}$ является вещественным;

в) точки плоскости, соответствующие различным комплексным числам z_1, z_2, z_3, z_4 и не лежащие на одной прямой, лежат на одной окружности тогда и только тогда, когда их двойное отношение $\dfrac{z_1 - z_3}{z_2 - z_3} : \dfrac{z_1 - z_4}{z_2 - z_4}$ является вещественным числом.

24.13. Изобразить на плоскости множество точек, соответствующих комплексным числам z, удовлетворяющим равенству $\left|\dfrac{z - z_1}{z - z_2}\right| = \lambda$, где $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ и λ — положительное действительное число.

24.14. Найти $\min|3 + 2i - z|$ при $|z| \leqslant 1$.

24.15. Найти $\max|1 + 4i - z|$ при $|z - 10i + 2| \leqslant 1$.

24.16. (*Лемниската.*) Изобразить на плоскости множество точек, соответствующих комплексным числам z, удовлетворяющим равенству $|z^2 - 1| = \lambda$. При $\lambda = 1$ записать уравнение полученной кривой в полярных координатах.

24.17. *Расширенной комплексной плоскостью* называется комплексная плоскость, дополненная бесконечно удаленной точкой ∞. Доказать, что если (z_1, z_2, z_3) и (w_1, w_2, w_3) — две тройки попарно различных точек расширенной комплексной плоскости, то существует дробно-линейное преобразование

$$w = \frac{az + b}{cz + d}, \qquad a, b, c, d \in \mathbb{C}, \quad ad - bc \neq 0,$$

переводящее первую тройку во вторую.

24.18. Доказать, что если в каждой из двух четвёрок (z_1, z_2, z_3, z_4) и (w_1, w_2, w_3, w_4) точек расширенной комплексной плоскости все точки попарно различны, то дробно-линейное преобразование, переводящее одну из этих четвёрок в другую, существует тогда и только тогда, когда совпадают двойные отношения:

$$\frac{z_1 - z_3}{z_2 - z_3} : \frac{z_1 - z_4}{z_2 - z_4} = \frac{w_1 - w_3}{w_2 - w_3} : \frac{w_1 - w_4}{w_2 - w_4}.$$

24.19. Доказать, что при дробно-линейном преобразовании расширенной комплексной плоскости прямые и окружности переходят в прямые и окружности.

24.20. Доказать, что дробно-линейное преобразование

$$w = \frac{az + b}{cz + d}, \qquad ad - bc = 1,$$

переходит вещественную прямую в себя тогда и только тогда, когда матрица $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ пропорциональна вещественной матрице.

24.21. Выяснить геометрический смысл дробно-линейного преобразования $w = 1/z$.

24.22. Выяснить геометрический смысл преобразования комплексной плоскости, заданного формулой $w = z^n$ $(n \geqslant 2)$.

* * *

24.23. Доказать, что функция Жуковского $w = \dfrac{1}{2}\left(z + \dfrac{1}{z}\right)$ отображает:

а) окружность $|z| = 1$ на отрезок $[-1, 1]$ действительной оси;

б) окружность $|z| = R$, $R \neq 1$, в эллипс с фокусами $-1, 1$;

в) луч $\arg z = \varphi$ в ветвь гиперболы с фокусами $-1, 1$.

24.24. Доказать, что всякое дробно-линейное преобразование, отображающее открытую верхнюю полуплоскость на внутренность единичного круга с центром в начале координат, имеет вид

$$w = a\frac{z - b}{z - \overline{b}}, \qquad |a| = 1, \quad \operatorname{Im} b > 0.$$

24.25. Доказать, что всякое дробно-линейное преобразование, отображающее единичный круг с центром в начале координат на себя, имеет вид

$$w = a\frac{z-b}{1-z\bar{b}}, \qquad |a| = 1, \quad b < 1.$$

24.26. Для каких комплексных чисел a отображение $z \to z + az^2$ отображает круг $|z| \leqslant 1$ биективно в себя?

Глава VI

МНОГОЧЛЕНЫ

§ 25. Деление с остатком и алгоритм Евклида

25.1. Разделить многочлен $f(x)$ с остатком на многочлен $g(x)$:
а) $f(x) = 2x^4 - 3x^3 + 4x^2 - 5x + 6, \quad g(x) = x^2 - 3x + 1$;
б) $f(x) = x^3 - 3x^2 - x - 1, \quad g(x) = 3x^2 - 2x + 1$.

25.2. Найти наибольший общий делитель многочленов:
а) $x^4 + x^3 - 3x^2 - 4x - 1$ и $x^3 + x^2 - x - 1$;
б) $x^6 + 2x^4 - 4x^3 - 3x^2 + 8x - 5$ и $x^5 + x^2 - x + 1$;
в) $x^5 + 3x^2 - 2x + 2$ и $x^6 + x^5 + x^4 - 3x^2 + 2x - 6$;
г) $x^4 + x^3 - 4x + 5$ и $2x^3 - x^2 - 2x + 2$;
д) $x^5 + x^4 - x^3 - 2x - 1$ и $3x^4 + 2x^3 + x^2 + 2x - 2$;
е) $x^6 - 7x^4 + 8x^3 - 7x + 7$ и $3x^5 - 7x^3 + 3x^2 - 7$;
ж) $x^5 - 2x^4 + x^3 + 7x^2 - 12x + 10$ и $3x^4 - 64x^3 + 5x^2 + 2x - 2$;
з) $x^5 + 3x^4 - 12x^3 - 52x^2 - 52x - 12$ и $x^4 + 3x^3 - 6x^2 - 22x - 12$;
и) $x^5 + x^4 - x^3 - 3x^2 - 3x - 1$ и $x^4 - 2x^3 - x^2 - 2x + 1$;
к) $x^4 - 4x^3 + 1$ и $x^3 - 3x^2 + 1$;
л) $x^4 - 10x^2 + 1$ и $x^4 - 4\sqrt{2}x^3 + 6x^2 + 4\sqrt{2}x + 1$.

25.3. Найти наибольший общий делитель многочленов $f(x)$ и $g(x)$ и его линейное выражение через $f(x)$ и $g(x)$:
а) $f(x) = x^4 + 2x^3 - x^2 - 4x - 2, \quad g(x) = x^4 + x^3 - x^2 - 2x - 2$;
б) $f(x) = 3x^3 - 2x^2 + x + 2, \quad g(x) = x^2 - x + 1$.

25.4. Пусть $d(x)$ — наибольший общий делитель $f(x)$ и $g(x)$. Доказать, что:

а) существуют такие многочлены $u(x)$, $v(x)$, что

$$\deg u(x) < \deg g(x) - \deg d(x),$$

причём $d(x) = f(x)u(x) + g(x)v(x)$;

б) в случае а) имеем также $\deg v(x) < \deg f(x) - \deg d(x)$;

в) многочлены $u(x)$, $v(x)$ из а) определяются однозначно.

25.5. Методом неопределённых коэффициентов подобрать такие многочлены $u(x)$, $v(x)$, что $f(x)u(x) + g(x)v(x) = 1$:

а) $f(x) = x^4 - 4x^3 + 1, \quad g(x) = x^3 - 3x^2 + 1$;

б) $f(x) = x^3, \quad g(x) = (1-x)^2$;

в) $f(x) = x^4, \quad g(x) = (1-x)^4$.

25.6. Найти такие многочлены $u(x)$, $v(x)$, что

$$x^m u(x) + (1-x)^n v(x) = 1.$$

25.7. Найти наибольший общий делитель и его выражение через f и g над полем $\mathbb{F}_2$:

а) $f = x^5 + x^4 + 1, \quad g = x^4 + x^2 + 1$;

б) $f = x^5 + x^3 + x + 1, \quad g = x^4 + 1$;

в) $f = x^5 + x + 1, \quad g = x^4 + x^3 + 1$;

г) $f = x^5 + x^3 + x, \quad g = x^4 + x + 1$.

25.8. Выделив кратные неприводимые множители данного многочлена, разложить его на неприводимые множители:

а) $x^6 - 15x^4 + 8x^3 + 51x^2 - 72x + 27$;

б) $x^5 - 6x^4 + 16x^3 - 24x^2 + 20x - 8$;

в) $x^5 - 10x^3 - 20x^2 - 15x - 4$;

г) $x^6 - 6x^4 - 4x^3 + 9x^2 + 12x + 4$;

д) $x^6 - 2x^5 - x^4 - 2x^3 + 5x^2 + 4x + 4$;

е) $x^7 - 3x^6 + 5x^5 - 7x^4 + 7x^3 - 5x^2 + 3x - 1$;

ж) $x^8 + 2x^7 + 5x^6 + 6x^5 + 8x^4 + 6x^3 + 5x^2 + 2x + 1$.

25.9. Пусть K — поле, $f \in K[[x]]$ и $g \in K[x]$. Существуют ли такие $r \in K[x]$, $h \in K[[x]]$, что $f = hg + r$ и либо $r = 0$, либо $\deg r < \deg g$?

§ 26. Простые и кратные корни над полями нулевой характеристики

26.1. Разделить многочлен $f(x)$ с остатком на $x - x_0$ и вычислить значение $f(x_0)$:

а) $f(x) = x^4 - 2x^3 + 4x^2 - 6x + 8, \quad x_0 = 1$;

6*

б) $f(x) = 2x^5 - 5x^3 - 8x, \quad x_0 = -3;$

в) $f(x) = 3x^5 + x^4 - 19x^2 - 13x - 10, \quad x_0 = 2;$

г) $f(x) = x^4 - 3x^3 - 10x^2 + 2x + 5, \quad x_0 = -2;$

д) $f(x) = x^5, \quad x_0 = 1;$

е) $f(x) = x^4 + 2x^3 - 3x^2 - 4x + 1, \quad x_0 = -1;$

ж) $f(x) = x^4 - 8x^3 + 24x^2 - 50x + 90, \quad x_0 = 2;$

з) $f(x) = x^4 + 2ix^3 - (1+i)x^2 - 3x + 7 + i, \quad x_0 = -i;$

и) $f(x) = x^4 + (3 - 8i)x^3 - (21 + 18i)x^2 - (33 - 20i)x + 7 + 18i,$
$x_0 = -1 + 2i.$

26.2. Разложить многочлен $f(x)$ по степеням $x - x_0$ и найти значения его производных в точке x_0:

а) $f(x) = x^5 - 4x^3 + 6x^2 - 8x + 10, \quad x_0 = 2;$

б) $f(x) = x^4 - 3ix^3 - 4x^2 + 5ix - 1, \quad x_0 = 1 + 2i;$

в) $f(x) = x^4 + 4x^3 + 6x^2 + 10x + 20, \quad x_0 = -2.$

26.3. Определить кратность корня x_0 многочлена $f(x)$:

а) $f(x) = x^5 - 5x^4 + 7x^3 - 2x^2 + 4x - 8, \quad x_0 = 2;$

б) $f(x) = x^5 + 7x^4 + 16x^3 + 8x^2 - 16x - 16, \quad x_0 = -2;$

в) $f(x) = 3x^5 + 2x^4 + x^3 - 10x - 8, \quad x_0 = -1;$

г) $f(x) = x^5 - 6x^4 + 2x^3 + 36x^2 - 27x - 54, \quad x_0 = 3.$

26.4. При каком значении a многочлен $x^5 - ax^2 - ax + 1$ имеет -1 корнем не ниже второй кратности?

26.5. При каких a и b многочлен $ax^{n+1} + bx^n + 1$ делится на $(x-1)^2$?

26.6. При каких a и b многочлен $x^5 + ax^3 + b$ имеет двойной корень, отличный от нуля?

26.7. Доказать, что многочлены:

а) $x^{2n} - nx^{n+1} + nx^{n-1} - 1;$

б) $x^{2n+1} - (2n+1)x^{n+1} + (2n+1)x^n - 1;$

в) $(n - 2m)x^n - nx^{n-m} + nx^m - (n - 2m);$

имеют число 1 тройным корнем.

26.8. Доказать, что многочлен

$$1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \ldots + \frac{x^n}{n!}$$

не имеет кратных корней.

26.9. Доказать, что многочлен

$$a_1x^{n_1} + a_2x^{n_2} + \ldots + a_kx^{n_k}, \qquad n_1 < n_2 < \ldots < n_k,$$

не имеет отличных от нуля корней кратности, большей $k-1$.

* * *

26.10. Определить кратность корня a многочлена

$$\frac{x-a}{2}\,[f'(x) + f'(a)] - f(x) + f(a),$$

где $f(x)$ — некоторый многочлен.

26.11. Доказать, что над полем нулевой характеристики многочлен $f(x)$ делится на свою производную в том и только том случае, если $f(x) = a_0(x-x_0)^n$.

26.12. Доказать, что если многочлен $f(x)$ степени n не имеет кратных корней, то $[f'(x)]^2 - f(x)f''(x)$ не имеет корней кратности выше $n-1$.

26.13. Рассмотрим рекуррентное соотношение

$$u(n+k) = a_0u(n) + a_1u(n+1) + \ldots + a_{k-1}u(n+k-1), \quad k \neq 0, \quad a_0 \neq 0.$$

Положим $f(x) = x^k - a_{k-1}x^{k-1} - \ldots - a_0$. Доказать, что:

а) функция $u(n) = n^ra^n$, $r \geqslant 0$, $a \neq 0$, является решением рекуррентного соотношения тогда и только тогда, когда a — корень $f(x)$ кратности, не меньшей $r+1$;

б) если $a_1, \ldots, a_m$ — все корни $f(x)$ кратности $s_1, \ldots, s_m$, то произвольное решение $u(n)$ рекуррентного соотношения имеет вид

$$u(n) = \sum_{i=1}^{m} g_i(n)a_i^n,$$

где $g_i(x)$ — многочлен степени не выше $s_i - 1$ $(i = 1, \ldots, m)$.

26.14. Пусть $f(x) = a_0 + a_1x + \ldots + a_kx^k$. Доказать, что ненулевое число z является корнем кратности не меньше $r+1$ тогда и только тогда, когда

$$\begin{aligned}
a_0 + a_1z + a_2z^2 + \ldots + a_mz^m + \ldots + a_kz^k &= 0,\\
a_1z + 2a_2z^2 + \ldots + ma_mz^m + \ldots + ka_kz^k &= 0,\\
a_1z + 2^2a_2z^2 + \ldots + m^2a_mz^m + \ldots + k^2a_kz^k &= 0,\\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots&\\
a_1z + 2^ra_2z^2 + \ldots + m^ra_mz^m + \ldots + k^ra_kz^k &= 0.
\end{aligned}$$

§ 27. Разложение на неприводимые множители над $\mathbb{R}$ и $\mathbb{C}$

27.1. Разложить на линейные множители над полем комплексных чисел многочлены:

а) $x^3 - 6x^2 + 11x - 6$; б) $x^4 + 4$; в) $x^6 + 27$;

г) $x^{2n} + x^n + 1$; д) $\cos(n \arccos x)$; е) $\sin((2n+1) \arcsin x)$.

27.2. Разложить на линейные и квадратные множители над полем вещественных чисел многочлены:

а) $x^6 + 27$; б) $x^4 + 4x^3 + 4x^2 + 1$;

в) $x^4 - ax^2 + 1$, $|a| < 2$; г) $x^{2n} + x^n + 1$;

д) $x^6 - x^3 + 1$; е) $x^{12} + x^8 + x^4 + 1$.

27.3. Построить многочлен наименьшей степени с комплексными коэффициентами, имеющий:

а) двойной корень 1, простые корни 2, 3 и $1 + i$;

б) двойной корень i, простой корень $-1 - i$.

27.4. Построить многочлен наименьшей степени с вещественными коэффициентами, имеющий:

а) двойной корень 1, простые корни 2, 3 и $1 + i$;

б) двойной корень i, простой корень $-1 - i$.

27.5. Доказать, что многочлен $x^{3m} + x^{3n+1} + x^{3p+2}$ делится на $x^2 + x + 1$.

27.6. При каких m, n, p многочлен $x^{3m} - x^{3n+1} + x^{3p+2}$ делится на $x^2 - x + 1$?

27.7. При каких m многочлен $(x+1)^m - x^m - 1$ делится на $(x^2 + x + 1)^2$?

27.8. Найти наибольший общий делитель многочленов:

а) $(x-1)^3(x+2)^2(x-3)(x+4)$ и $(x-1)^2(x+2)(x+5)$;

б) $(x-1)(x^2-1)(x^3-1)(x^4-1)$ и $(x+1)(x^2+1)(x^3+1)(x^4+1)$;

в) $x^m - 1$ и $x^n - 1$;

г) $x^m + 1$ и $x^n + 1$.

27.9. Доказать, что если $f(x^n)$ делится на $x - 1$, то $f(x^n)$ делится на $x^n - 1$.

27.10. Доказать, что если $a \neq 0$ и $f(x)$ делится на $(x-a)^k$, то $f(x^n)$ делится на $(x^n - a^n)^k$.

27.11. Если $F(x) = f_1(x^3) + xf_2(x^3)$ делится на x^2+x+1, то $f_1(x)$ и $f_2(x)$ делятся на $x-1$.

* * *

27.12. Пусть значения многочлена $f(x)$ неотрицательны при всех $x \in \mathbb{R}$. Доказать, что $f(x) = f_1(x)^2 + f_2(x)^2$ для некоторых $f_1(x)$, $f_2(x) \in \mathbb{R}[x]$.

27.13. Пусть f, g — взаимно простые комплексные многочлены. Тогда максимум из степеней f, g меньше числа различных корней многочлена $fg(f+g)$.

27.14. Пусть f, g, h — попарно взаимно простые комплексные многочлены, причём $f^n + g^n = h^n$. Доказать, что $n \leqslant 2$.

§ 28. Многочлены над полем рациональных чисел и над конечными полями

28.1. Доказать, что если несократимая рациональная дробь p/q является корнем многочлена $f(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_{n-1}x + a_n$ с целыми коэффициентами, то:

а) $p|a_n$; б) $q|a_0$; в) $(p-mq)|f(m)$ при любом $m \in \mathbb{Z}$.

28.2. Найти все рациональные корни многочленов:

а) $x^3 - 6x^2 + 15x - 14$; б) $x^4 - 2x^3 - 8x^2 + 13x - 24$;

в) $6x^4 + 19x^3 - 7x^2 - 26x + 12$;

г) $24x^4 - 42x^3 - 77x^2 + 56x + 60$;

д) $24x^5 + 10x^4 - x^3 - 19x^2 - 5x + 6$;

е) $10x^4 - 13x^3 + 15x^2 - 18x - 24$;

ж) $4x^4 - 7x^2 - 5x - 1$; з) $2x^3 + 3x^2 + 6x - 4$.

28.3. Доказать, что многочлен $f(x)$ с целыми коэффициентами не имеет целых корней, если $f(0)$, $f(1)$ — нечётные числа.

* * *

28.4. Доказать, что многочлен, неприводимый над полем рациональных чисел, не может иметь кратных комплексных корней.

28.5. Многочлен с целыми коэффициентами называется *примитивным,* если его коэффициенты в совокупности просты. Доказать, что произведение примитивных многочленов является примитивным многочленом.

28.6. Доказать, что если многочлен с целыми коэффициентами приводим над полем рациональных чисел, то он может быть разложен в произведение двух многочленов меньшей степени с целыми коэффициентами.

28.7. Пусть многочлен $f(x)$ с целыми коэффициентами принимает значения ± 1 при двух целых значениях x_1, x_2. Доказать, что $f(x)$ не имеет рациональных корней, если $|x_1 - x_2| > 2$. Если же $|x_1 - x_2| \leqslant 2$, то рациональным корнем может быть только $(x_1 + x_2)/2$.

28.8. (*Признак неприводимости Эйзенштейна.*) Пусть $f(x)$ — многочлен с целыми коэффициентами и существует такое простое число p, что:

а) старший коэффициент $f(x)$ не делится на p;

б) все остальные коэффициенты $f(x)$ делятся на p;

в) свободный член $f(x)$ не делится на p^2.

Доказать, что многочлен $f(x)$ неприводим над полем рациональных чисел.

28.9. Доказать неприводимость над полем рациональных чисел многочленов:

а) $x^4 - 8x^3 + 12x^2 - 6x + 2$;

б) $x^5 - 12x^3 + 36x - 12$;

в) $x^{105} - 9$;

г) $\Phi_p(x) = x^{p-1} + x^{p-2} + \ldots + x + 1$ (p — простое число);

д) $(x - a_1)(x - a_2)\ldots(x - a_n) - 1$, где $a_1, a_2, \ldots, a_n$ — различные целые числа;

е) $(x - a_1)^2 \ldots (x - a_n)^2 + 1$, где $a_1, a_2, \ldots, a_n$ — различные целые числа.

28.10. Доказать, что многочлен $x^n - x - 1$ при $n \geqslant 2$ неприводим над $\mathbb{Q}$.

28.11. Доказать, что многочлен $x^n + x + 1$ неприводим над $\mathbb{Q}$, если $n \not\equiv 2 \pmod 3$. Доказать, что при $n \equiv 2 \pmod 3$ многочлен $x^n + x + 1$ делится над $\mathbb{Z}$ на $x^2 + x + 1$.

28.12. Пусть $f(x) = x^n \pm x^m \pm 1$. Доказать, что либо $f(x)$ неприводим над $\mathbb{Q}$, либо корнем $f(x)$ является некоторой комплексный корень из 1.

28.13. Пусть $f(x) = x^n \pm x^m \pm x^q \pm 1$. Доказать, что либо $f(x)$ неприводим над $\mathbb{Q}$, либо корнем $f(x)$ является некоторый комплексный корень из 1.

28.14. Доказать, что всякий многочлен положительной степени с целыми коэффициентами имеет корень в поле $\mathbf{Z}_p$ для бесконечного множества простых чисел p.

28.15. Доказать, что если $\mathbb{F}_q$ — поле из q элементов, то

$$x^q - x = \prod_{a \in \mathbb{F}_q} (x - a).$$

28.16. Пусть F — конечное поле. Доказать, что для всякого отображения $h\colon\ F^n \to F$ существует многочлен f из кольца $F[x_1, \ldots$ $\ldots, x_n]$, для которого $f(a_1, \ldots, a_n) = h(a_1, \ldots, a_n)$ для любых $a_1, \ldots$ $\ldots, a_n \in F$.

28.17. Пусть $f(x)$ из 28.10 или 28.11, причём $f(x)$ имеет q корней, являющихся комплексными корнями из 1. Доказать, что в $\mathbb{Q}[x]$ имеет место разложение $f(x) = g(x)h(x)$, где корнями $g(x)$ являются все корни из 1, а $h(x)$ — неприводимый над $\mathbb{Q}$ многочлен.

28.18. Доказать, что многочлен $f(x) = x^n + ax \pm 1$, $a \in \mathbb{Z}$, неприводим над $\mathbb{Q}$, если $|a| \geqslant 3$.

28.19. Доказать, что если многочлен $f(x) = x^n \pm 2x \pm 1$ приводим над $\mathbb{Q}$, то $f(x) = g(x)(x \pm 1)$, где $g(x)$ неприводим над $\mathbb{Q}$.

28.20. Доказать, что многочлен $f(x) = x^n + gx^p + r \in \mathbb{Z}[x]$, $1 \leqslant$ $\leqslant p < n$, неприводим над $\mathbb{Q}$, если $|g| > 1 + |r|^{n-1}$ и $|r|$ не является d-й степенью для любого неединичного делителя d числа n.

28.21. Многочлен $f(x) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_0 \in \mathbb{Z}[x]$ неприводим над $\mathbb{Q}$, если $|a_{n-1}| > 1 + |a_0| + \ldots + |a_{n-2}|$.

28.22. Найти:

а) все неприводимые многочлены степени $\leqslant 4$ над полем $\mathbf{Z}_2$;

б) все унитарные неприводимые многочлены степени 2 над полем $\mathbf{Z}_3$;

в) число неприводимых многочленов степени 5 над полем $\mathbf{Z}_2$;

г) число неприводимых унитарных многочленов степеней 3 и 4 над полем $\mathbf{Z}_3$.

28.23. Найти число неприводимых унитарных многочленов степеней 2 и 3 над полем из 9 элементов.

28.24. Доказать, что многочлен $\Phi_d(x)$ при d, делящем $p-1$, разлагается на линейные множители над $\mathbf{Z}_p$.

28.25. Пусть $f(x) \in \mathbf{Z}_p[x]$. Доказать, что многочлены $f(x)$, $f(x+1), \ldots, f(x+p-1)$ либо попарно различны, либо все совпадают.

28.26. Доказать, что при $a \in \mathbf{Z}_p^*$ многочлен $x^p - x - a$ неприводим над $\mathbf{Z}_p$.

28.27. Пусть b — ненулевой элемент $\mathbf{Z}_p$. Доказать, что $x^p - x - b$ неприводим над $\mathbb{F}_{p^n}$ тогда и только тогда, когда n не делится на p.

28.28. Доказать, что при $a \neq 1$ многочлен $x^q - ax - b$ имеет в $\mathbb{F}_q$ корень.

28.29. Доказать, что $x^{2n} + x^n + 1$ неприводим над $\mathbf{Z}_2$ тогда и только тогда, когда $n = 3^k$ для некоторого $k \geqslant 0$.

28.30. Доказать, что $x^{4n} + x^n + 1$ неприводим над $\mathbf{Z}_2$ тогда и только тогда, когда $n = 3^k 5^m$ для некоторых целых $k, m \geqslant 0$.

28.31. Найти все целые числа a, для которых все корни многочлена $x^4 - 14x^3 + 61x^2 + 84x + a$ целые.

28.32. Пусть I_m — число различных неприводимых многочленов степени m со старшим коэффициентом 1 над конечным полем из q элементов. Доказать, что в кольце степенных рядов $\mathbb{Q}[[z]]$

$$\frac{1}{1-qz} = \prod_{m=1}^{\infty} \left(\frac{1}{1-z^m}\right)^{I_m}.$$

28.33. В условиях задачи 28.32 доказать, что q^k равно сумме mI_m для всех делителей m числа k.

28.34. Пусть I_m из 28.32. Доказать, что

$$I_m = \frac{1}{m} \sum_{d|m} \mu(d)\, q^{md^{-1}}.$$

§ 29. Рациональные дроби

29.1. Представить рациональную дробь в виде суммы простейших дробей над полем комплексных чисел:

а) $\dfrac{x^2}{(x-1)(x+2)(x+3)}$; б) $\dfrac{1}{x^4+4}$; в) $\dfrac{x}{(x^2-1)^2}$;

г) $\dfrac{5x^2+6x-23}{(x-1)^3(x+1)^2(x-2)}$; д) $\dfrac{1}{(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)}$;

е) $\dfrac{3+x}{(x-1)(x^2+1)}$; ж) $\dfrac{x^2}{x^4-1}$; з) $\dfrac{1}{x^3-1}$;

и) $\dfrac{n!}{x(x-1)\dots(x-n)}$; к) $\dfrac{1}{(x^2-1)^2}$; л) $\dfrac{1}{(x^n-1)^2}$.

29.2. Представить рациональную дробь в виде суммы простейших дробей над полем вещественных чисел:

а) $\dfrac{x^2}{x^4-16}$; б) $\dfrac{1}{x^4+4}$; в) $\dfrac{x}{(x+1)(x^2+1)^2}$;

г) $\dfrac{1}{(x^4-1)^2}$; д) $\dfrac{1}{\cos(n\arccos x)}$;

е) $\dfrac{1}{f(x)}$, где многочлен $f(x)$ степени n имеет n различных вещественных корней;

ж) $\dfrac{1}{x^3-1}$; з) $\dfrac{x^2}{x^6+27}$; и) $\dfrac{2x-1}{x(x+1)^2(x^2+x+1)^2}$;

к) $\dfrac{1}{(x^4-1)^2}$; л) $\dfrac{x^{2m}}{x^{2n}+1}$, $m<n$.

29.3. Разложить $\dfrac{1}{x^p-x}$ на простейшие дроби над $\mathbf{Z}_p$.

29.4. Доказать, что для любых ненулевых многочленов f, g

$$\frac{(fg)'}{fg}=\frac{f'}{f}+\frac{g'}{g}.$$

29.5. Пусть $f=(x-a_1)\dots(x-a_n)$. Доказать, что

$$\frac{f'}{f}=\frac{1}{x-a_1}+\dots+\frac{1}{x-a_n}.$$

§ 30. Интерполяция

30.1. Найти многочлен наименьшей степени по данной таблице его значений:

а)

x	-1	0	1	2	3
$f(x)$	6	5	0	3	2

;

б)

x	1	2	3	4	6
$f(x)$	5	6	1	-4	10

.

30.2. Доказать, что многочлен степени $< n$, принимающий целые значения при n последовательных целых значениях переменной, принимает целые значения при всех целых значениях переменной.

Верно ли, что такой многочлен имеет целые коэффициенты?

30.3. Доказать, что всякая функция $f\colon F \to F$ на конечном поле F из q элементов однозначно представляется в виде многочлена степени $< q$.

30.4. Доказать, что многочлен степени $< n$, принимающий в точках $x_1, \ldots, x_n$ значения $y_1, \ldots, y_n$, равен

$$g(x) \sum_{i=1}^{n} \frac{y_i}{(x - x_i)g'(x_i)},$$

где $g(x) = (x - x_1) \ldots (x - x_n)$.

30.5. Многочлен $f(x)$ степени не выше $n - 1$ принимает значения $y_1, \ldots, y_n$ в корнях степени n из 1. Найти $f(0)$.

30.6. Доказать, что точки $x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{C}$ являются вершинами правильного n-угольника с центром в точке x_0 тогда и только тогда, когда для любого многочлена $f(x)$ степени $< n$ выполняется равенство

$$f(x_0) = \frac{1}{n}[f(x_1) + \ldots + f(x_n)].$$

30.7. Пусть все корни $x_1, \ldots, x_n$ многочлена $f(x)$ различны.

а) Доказать, что при любом неотрицательном целом $s \leqslant n - 2$

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{x_i^s}{f'(x_i)} = 0.$$

б) Вычислить сумму

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{x_i^{n-1}}{f'(x_i)}.$$

30.8. Найти многочлен степени $2n$, дающий при делении на $x(x-2)\dots(x-2n)$ остаток -1.

30.9. Построить над $\mathbf{Z}_p$ многочлен $f(x)$ наименьшей степени с условием $f(k)=k^{-1}$ для $k=1,2,\dots,p-1$.

30.10. Построить над $\mathbf{Z}_7$ многочлен $f(x)$ наименьшей степени с условием $f(0)=1$, $f(1)=0$ и $f(k)=k$ для $k=2,3,4,5,6$.

* * *

30.11. Пусть $\mathbb{F}_q$ — поле из $q>2$ элементов, c — образующий циклической группы $\mathbb{F}_q^*$. Доказать, что группа подстановок S_q, реализуемая на $\mathbb{F}_q$, порождается отображениями $f(x)=x+1$, $h(x)=cx$, $g(x)=x^{q-2}$.

30.12. В условии 30.11 доказать, что знакопеременная группа A_q порождается многочленами c^2x, $x+1$, $(x^{q-2}+1)^{q-2}$.

30.13. Пусть $k_0,\dots,k_n$ — натуральные числа и x_i, b_{ij} — элементы поля F нулевой характеристики, где $i=0,\dots,n$, $j=0,\dots,k_i-1$. Предполагается, что элементы $x_0,\dots,x_n$ различны. Доказать, что существует единственный многочлен $f(x)\in F[x]$ степени не выше $k_0+\ldots+k_n-1$ такой, что $f^j(x_i)=b_{ij}$ для всех i,j.

30.14. В условии задачи 30.13 положим

$$f(x)=\sum_{i=0}^{n}G_i(x)\sum_{k=0}^{k_i-1}\sum_{l=0}^{k}\frac{b_{il}}{l!}\frac{d^l}{dx^l}\left(\frac{1}{G_i(x)}\right)\bigg|_{x=x_i}(x-x_i)^k,$$

где $G_i(x)=\prod_{j\neq i}(x-x_j)^{k_j}$. Доказать, что $f(x)$ — многочлен степени не выше $k_0+\ldots+k_n-1$ и $f^{(j)}(x_i)=b_{ij}$ для всех i,j.

§ 31. Симметрические многочлены и формулы Виета

31.1. Построить многочлен степени 4 со старшим коэффициентом 1, имеющий:

а) корни 1, 2, -3, -4;

б) тройной корень -1 и простой корень i;

в) корни 2, -1, $1+i$ и $-i$;

г) двойной корень 3 и простые корни -2 и -4.

31.2. Найти сумму квадратов и произведение всех комплексных корней многочлена:

а) $3x^3 + 2x^2 - 1$; б) $x^4 - x^2 - x - 1$.

31.3. Найти сумму чисел, обратных комплексным корням многочлена:

а) $3x^3 + 2x^2 - 1$; б) $x^4 - x^2 - x - 1$.

31.4. Найти значения всех элементарных симметрических многочленов от комплексных корней n-й степени из единицы.

31.5. Определить λ так, чтобы один из корней многочлена $x^3 - 7x + \lambda$ равнялся удвоенному другому.

31.6. Сумма двух корней многочлена $2x^3 - x^2 - 7x + \lambda$ равна 1. Найти λ.

31.7. Определить соотношение между p и q, при выполнении которого корни x_1, x_2, x_3 многочлена x^3+px+q удовлетворяют условию $x_3 = \dfrac{1}{x_2} + \dfrac{1}{x_1}$.

31.8. (*Критерий Вильсона.*) Доказать, что $(p-1)! \equiv -1 \pmod p$ тогда и только тогда, когда p — простое число.

31.9. Следующие многочлены выразить в виде многочленов от элементарных симметрических многочленов:

а) $x_1^2x_2 + x_1x_2^2 + x_1^2x_3 + x_1x_3^2 + x_2^2x_3 + x_2x_3^2$;

б) $x_1^4 + x_2^4 + x_3^4 - 2x_1^2x_2^2 - 2x_1^2x_3^2 - 2x_2^2x_3^2$;

в) $(x_1x_2 + x_3x_4)(x_1x_3 + x_2x_4)(x_1x_4 + x_2x_3)$;

г) $(x_1 + x_2 - x_3 - x_4)(x_1 - x_2 + x_3 - x_4)(x_1 - x_2 - x_3 + x_4)$;

д) $(x_1 + x_2 + 1)(x_1 + x_3 + 1)(x_2 + x_3 + 1)$;

е) $(x_1x_2 + x_3)(x_1x_3 + x_2)(x_2x_3 + x_1)$;

ж) $(2x_1 - x_2 - x_3)(2x_2 - x_1 - x_3)(2x_3 - x_1 - x_2)$;

з) $(x_1 + x_2)(x_1 + x_3)(x_1 + x_4)(x_2 + x_3)(x_2 + x_4)(x_3 + x_4)$;

и) $x_1^5x_2^2 + x_1^2x_2^5 + x_1^5x_3^2 + x_1^2x_3^5 + x_2^5x_3^2 + x_2^2x_3^5$;

к) $(x_1 - 1)(x_2 - 1)(x_3 - 1)$;

л) $x_1^2 + \ldots$; м) $x_1^3 + \ldots$; н) $x_1^2x_2x_3 + \ldots$;

о) $x_1^2x_2^2 + \ldots$; п) $x_1^3x_2x_3 + \ldots$; р) $x_1^3x_2^2 + \ldots$

31.10. Найти значение симметрического многочлена F от корней многочлена $f(x)$:

а) $F = x_1^3(x_2+x_3)+x_2^3(x_1+x_3)+x_3^3(x_1+x_2)$, $f(x) = x^3-x^2-4x+1$;

б) $F = x_1^3(x_2x_3 + x_2x_4 + x_3x_4) + x_2^3(x_1x_3 + x_1x_4 + x_3x_4) + x_3^3(x_1x_2 + x_1x_4 + x_2x_4) + x_4^3(x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3)$,
$f(x) = x^4 + x^3 - 2x^2 - 3x + 1$;

в) $F = (x_1 - x_2)^2(x_1 - x_3)^2(x_2 - x_3)^2$, $f(x) = x^3 + a_1x^2 + a_2x + a_2$;

г) $F = \sum\limits_{\substack{i,j=1 \\ i\neq j}}^{3} x_i^4x_j$, $f(x) = 3x^3 - 5x^2 + 1$;

д) $F = \sum\limits_{1\leqslant i<j\leqslant 4}^{3} x_i^3x_j$, $f(x) = 3x^4 - 2x^3 + 2x^2 + x - 1$;

е) $F = (x_1^2 + x_1x_2 + x_2^2)(x_2^2 + x_2x_3 + x_3^2)(x_1^2 + x_1x_3 + x_3^2)$,
$f(x) = 5x^3 - 6x^2 - 7x - 8$.

31.11. Пусть $x_1, \ldots, x_n$ — корни многочлена $x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_0$. Доказать, что любой симметрический многочлен от $x_2, x_3, \ldots, x_n$ можно представить в виде многочлена от x_1.

31.12. Пусть σ_{ki} — элементарный симметрический многочлен степени k от $x_1, \ldots, x_{i-1}, x_{i+1}, \ldots, x_n$. Доказать, что

$$\sigma_{ki} = \sigma_k - x_i\sigma_{k-1} + \ldots + (-1)^{k-1}x_i^{k-1}\sigma_1 + (-1)^kx_i^k$$

(считается, что $\sigma_m = 0$ при $m > n$ и $\sigma_{mi} = 0$ при $m \geqslant n$).

31.13. Рассмотрим многочлен

$$\lambda_t = (1 + x_1t)\ldots(1 + x_nt)$$

от переменных $x_1, \ldots, x_n, t$. Доказать, что $\lambda_t = 1+\sigma_1t+\sigma_2t^2+\ldots+\sigma_nt^n$.

31.14. Пусть λ_t из задачи 31.13 и $s_k = x_1^k+\ldots+x_n^k$. Доказать, что

$$\frac{d}{dt}(\ln\lambda_t) = \sum_{k\geqslant 0}(-1)^ks_kt^{k-1}.$$

31.15. Доказать формулу Ньютона

$$s_k - \sigma_1s_{k-1} + \sigma_2s_{k-2} + \cdots + (-1)^{k-1}\sigma_{k-1}s_1 + (-1)^kk\sigma_k = 0$$

(считается, что $\sigma_k = 0$ при $k > n$).

31.16. Доказать, что в условиях задачи 31.15

$$s_k = \begin{vmatrix} \sigma_1 & 1 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 2\sigma_2 & \sigma_1 & 1 & \ldots & 0 & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ (k-1)\sigma_{k-1} & \sigma_{k-2} & \sigma_{k-3} & \ldots & \sigma & 1 \\ k\sigma_k & \sigma_{k-1} & \sigma_{k-2} & \ldots & \sigma_2 & \sigma_1 \end{vmatrix}.$$

31.17. Доказать, что в условиях задачи 31.15

$$\sigma_k = \frac{1}{k!}\begin{vmatrix} s_1 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ s_2 & s_1 & 2 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ s_{k-1} & s_{k-2} & s_{k-3} & \dots & s_1 & k-1 \\ s_k & s_{k-1} & s_{k-2} & \dots & s_2 & s_1 \end{vmatrix}.$$

31.18. Найти s_m от корней многочлена $\Phi_n(x)$.

31.19. Найти $s_1, \dots, s_n$ от корней многочлена

$$x^n + \frac{x^{n-1}}{1!} + \frac{x^{n-2}}{2!} + \dots + \frac{1}{n!}.$$

31.20. Вычислить значения симметрических многочленов s_k от комплексных корней k-й степени из 1.

31.21. Решить над полем комплексных чисел систему уравнений:

а) $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 0, \\ x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 0, \\ x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 = 24; \end{cases}$ б) $\begin{cases} x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 6, \\ x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 - x_1x_2x_3 = -4, \\ x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_4 = -3. \end{cases}$

31.22. Доказать, что значение от корней степени n из 1 всякого симметрического многочлена от n переменных с целыми коэффициентами является целым числом.

31.23. Пусть ζ — первообразный комплексный корень степени k из 1. Доказать, что для любого комплексного числа a

$$(x-a)(x\zeta - a)\dots(x\zeta^{k-1} - a) = (-1)^{k+1}(x^k - a^k).$$

31.24. Пусть ζ — первообразный комплексный корень степени k из 1 и $f(x)$ — многочлен с комплексными коэффициентами. Доказать, что

а) $f(x)f(x\zeta)\dots f(x\zeta^{k-1}) = h(x^k)$, где $h(x)$ — многочлен;

б) корнями $h(x)$ являются в точности k-е степени корней многочлена $f(x)$.

31.25. Найти многочлен третьей степени, корнями которого являются:

а) кубы комплексных корней многочлена $x^3 - x - 1$;

б) четвертые степени комплексных корней многочлена $2x^3 - x^2 + 2$.

31.26. Найти многочлен четвертой степени, корнями которого являются:

а) квадраты комплексных корней многочлена $x^4 + 2x^3 - x + 3$;

б) кубы комплексных корней многочлена $x^4 - x - 1$.

* * *

31.27. а) Пусть $f(x_1, \ldots, x_n)$ — кососимметрический многочлен от $x_1, \ldots, x_n$. Доказать, что

$$f(x_1, \ldots, x_n) = \Delta(x_1, \ldots, x_n)\, g(x_1, \ldots, x_n),$$

где $\Delta(x_1, \ldots, x_n)$ — определитель Вандермонда, а $g(x_1, \ldots, x_n)$ — симметрический многочлен.

б) Пусть $h(x_1, \ldots, x_n)$ — симметрический многочлен, причём $h(x_1, x_1, x_3, \ldots, x_n) = 0$. Доказать, что

$$h(x_1, \ldots, x_n) = \Delta(x_1, \ldots, x_n)^2\, u(x_1, \ldots, x_n),$$

где $u(x_1, \ldots, x_n)$ — симметрический многочлен.

31.28. Пусть

$$h_k = \sum_{1 \leqslant i_1 \leqslant \ldots \leqslant i_k \leqslant n} x_{i_1} \ldots x_{i_k}$$

и λ_t из задачи 31.13. Доказать, что:

а) $\lambda_t^{-1} = \sum\limits_{k \geqslant 0} (-1)^k h_k t^k$;

б) $\sigma_k - h_1\sigma_{k-1} + \ldots + (-1)^{k-1} h_{k-1}\sigma_1 + (-1)^k h_k = 0, \quad k \geqslant 1$;

в) каждый симметрический многочлен является многочленом от $h_1, \ldots, h_n$.

31.29. *Разбиением числа* n назовем набор λ целых неотрицательных чисел $\lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$, где $\lambda_1 + \ldots + \lambda_n = n$ и $\lambda_1 \geqslant \lambda_2 \geqslant \ldots \ldots \geqslant \lambda_n \geqslant 0$. Пусть $p(n)$ — число разбиений числа n. Доказать, что

$$\prod_{m \geqslant 0} (1 - t^m)^{-1} = \sum_{n \geqslant 0} p(n) t^n.$$

31.30. Пусть $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$, $\alpha_1 > \alpha_2 > \ldots > \alpha_n \geqslant 0$ — набор натуральных чисел. Положим

$$a_\alpha(x_1, \ldots, x_n) = \sum_{\sigma \in S_n} (\operatorname{sgn} \sigma) x_{\sigma(1)}^{\alpha_1} \ldots x_{\sigma(n)}^{\alpha_n}.$$

Доказать, что:

а) $a_\alpha(x_1, \ldots, x_n) = \det \begin{pmatrix} x_1^{\alpha_1} & \ldots & x_n^{\alpha_1} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ x_1^{\alpha_n} & \ldots & x_n^{\alpha_n} \end{pmatrix}$;

б) если $\delta = (n-1, n-2, \ldots, 1, 0)$, то $a_\delta(x_1, \ldots, x_n)$ — определитель Вандермонда от $x_n, \ldots, x_1$.

31.31. Пусть $\lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$ — разбиение некоторого натурального числа k. Положим

$$\alpha_i = \lambda_i + n - i$$

для всех i, δ из задачи 31.30. Пусть

$$S_\lambda(x_1, \ldots, x_n) = \frac{a_\alpha}{a_\delta}.$$

Доказать, что:

а) $S_\lambda(x_1, \ldots, x_n)$ — целочисленный симметрический многочлен;

б) $S_\lambda(x_1, \ldots, x_n)$ при всех $\lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$ образуют базис линейного пространства симметрических многочленов от $x_1, \ldots, x_n$;

в) если $\lambda = (1, \ldots, 1)$, то $S_\lambda(x_1, \ldots, x_n) = \sigma_n$;

г) если $\lambda = (n, 0 \ldots, 0)$, то $S_\lambda(x_1, \ldots, x_n) = h_n$ (см. 31.28).

31.32. Доказать, что:

а) $\prod\limits_{i,j=1}^{n} (1 - x_i y_j)^{-1} = \sum\limits_{\lambda} S_\lambda(x_1, x_2, \ldots) S_\lambda(y_1, y_2, \ldots)$;

б) $\prod\limits_{i,j=1}^{n} (1 + x_i y_j) = \sum\limits_{\lambda} S_\lambda(x_1, x_2, \ldots) S_{\lambda'}(y_1, y_2, \ldots)$;

где суммирование ведётся по всем разбиениям $\lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$, λ' — сопряжённое разбиение, т.е. λ'_i — число таких j, что $\lambda_j \geqslant i$.

31.33. Доказать, что

$$\sum_{\tau \in S_n} \sigma_k(x_{\tau(1)} y_1, \ldots, x_{\tau(n)} y_n) = \sigma_k(x_1, \ldots, x_n)\, \sigma_k(y_1, \ldots, y_n).$$

31.34. Пусть F — поле дробей кольца целочисленных симметрических многочленов от $x_1, \ldots, x_n$. Доказать, что F совпадает с подполем в $\mathbb{Q}(x_1, \ldots, x_n)$, состоящим из всех симметрических рациональных дробей.

§ 32. Результант и дискриминант

32.1. Вычислить результант многочленов:

а) $x^3 - 3x^2 + 2x + 1$ и $2x^2 - x - 1$;

б) $2x^3 - 3x^2 + 2x + 1$ и $x^2 + x + 3$;

в) $2x^3 - 3x^2 - x + 2$ и $x^4 - 2x^2 - 3x + 4$;

г) $3x^3 + 2x^2 + x + 1$ и $2x^3 + x^2 - x - 1$;

д) $2x^4 - x^3 + 3$ и $3x^3 - x^2 + 4$.

32.2. Найти все значения λ, при которых имеют общий корень многочлены:

а) $x^3 - \lambda x + 2$ и $x^2 + \lambda x + 2$;

б) $x^3 + \lambda x^2 - 9$ и $x^3 + \lambda x - 3$;

в) $x^3 - 2\lambda x + \lambda^3 x$ и $x^2 + \lambda^2 - 2$.

32.3. Исключить x из системы уравнений:

а) $\begin{cases} x^2 - xy + y^2 = 3, \\ x^2 y + xy^2 = 6; \end{cases}$ б) $\begin{cases} x^3 - xy - y^3 + y = 0, \\ x^2 + x - y^2 = 1; \end{cases}$

в) $\begin{cases} y^2 - 7xy + 4x^2 + 13x - 2y - 3 = 0, \\ y^2 - 14xy + 9x^2 + 28x - 4y - 5 = 0; \end{cases}$

г) $\begin{cases} y^2 + x^2 - y - 3x = 0, \\ y^2 - 6xy - x^2 + 11y + 7x - 12 = 0; \end{cases}$

д) $\begin{cases} 5y^2 - 6xy + 5x^2 - 16 = 0, \\ y^2 - xy + 2x^2 - y - x - 4 = 0. \end{cases}$

32.4. Доказать, что $R(f, g_1 g_2) = R(f, g_1) R(f, g_2)$.

32.5. Найти результант многочленов Φ_n и $x^m - 1$.

32.6. Найти результант многочленов Φ_n и Φ_m.

32.7. Вычислить дискриминант многочленов:

а) $ax^2 + bx + c$; б) $x^3 + px + q$;

в) $x^3 + a_1 x^2 + a_2 x + a_3$; г) $2x^4 - x^3 - 4xN2 + x + 1$;

д) $x^4 - x^3 - 3x^2 + x + 1$.

32.8. Найти все значения λ, при которых имеют кратный корень многочлены:

а) $x^3 - 3x + \lambda$; б) $x^4 - 4x + \lambda$;

в) $x^3 - 8x^2 + (13 - \lambda)x - (6 + 2\lambda)$;

г) $x^4 - 4x^3 + (2 - \lambda)x + 2x - 2$.

32.9. Доказать, что

$$D[(x-a)f(x)] = D[f(x)] \cdot f(a)^2.$$

* * *

32.10. Вычислить дискриминант многочлена $x^{n-1} + x^{n-2} + \ldots + 1$.

32.11. Вычислить дискриминант многочлена $\Phi_n(x)$.

32.12. Вычислить дискриминант многочлена

$$1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \ldots + \frac{x^n}{n!}.$$

32.13. Пусть f и g — неприводимые многочлены. Доказать, что

$$D(fg) = D(f)D(g)[R(f,g)]^2.$$

32.14. Пусть j, k — натуральные числа и $d = (j,k)$. Доказать, что

$$R(x^j - a^j,\, x^k - b^k) = (-1)^j (b^{jkd^{-1}} - a^{jkd^{-1}})^d.$$

32.15. Пусть $n > k > 0$ и $d = (n,k)$. Доказать, что

$$D(x^n + ax^k + b) = (-1)^{n(n-1)2^{-1}} b^{k-1} \times \\ \times \left[n^{nd^{-1}} b^{(n-k)d^{-1}} - (-1)^{nd^{-1}} (n-k)^{(n-k)d^{-1}} k^{kd^{-1}} a^{nd^{-1}} \right].$$

32.16. Вычислить дискриминант многочлена $x^n + a$.

32.17. Вычислить дискриминант:

а) многочленов Эрмита $P_n(x) = (-1)^n e^{x^2/2} \dfrac{d^n}{dx^n} \left(e^{-x^2/2}\right)$;

б) многочленов Лагерра $P_n(x) = (-1)^n e^x \dfrac{d^n}{dx^n} (x^n e^{-x})$;

в) многочленов Чебышёва $2\cos\left(n \arccos \dfrac{x}{2}\right)$.

§ 33. Распределение корней

33.1. Составить ряд Штурма и отделить корни многочленов:

а) $x^3 - 3x - 1$; б) $x^3 + x^2 - 2x - 1$;
в) $x^3 - 7x + 7$; г) $x^3 - x + 5$;
д) $x^3 + 3x - 5$; е) $x^4 - 12x^2 - 16x - 4$;
ж) $x^4 - x - 1$; з) $2x^4 - 8x^3 + 8x^2 - 1$;
и) $x^4 + x^2 - 1$; к) $x^4 + 4x^3 - 12x + 9$.

33.2. Составить ряд Штурма для вещественного многочлена $x^5 - 5ax^3 + 5a^2x + 2b$. В зависимости от знака числа $a^5 - b^2$ найти число вещественных корней многочлена.

33.3. Составить ряд Штурма для вещественного многочлена $x^n + px + q$. В зависимости от чётности и знака числа $d = -(n-1)^{n-1} \times$ $\times p^n - n^n q^{n-1}$ найти число вещественных корней многочлена.

33.4. Составить ряд Штурма и найти число вещественных корней многочлена

$$E_n(x) = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \ldots + \frac{x^n}{n!}.$$

33.5. Доказать, что многочлен $t^3 - 3t + r$ не может иметь более одного вещественного корня в интервале $[0, 1]$.

33.6. Предположим, что все корни многочлена $f(x) \in \mathbb{R}[x]$ вещественны, т.е.

$$f(x) = a(x - a_1)^{k_1} \ldots (x - a_m)^{k_m}, \qquad a \neq 0,$$

где $a_1 < a_2 < \ldots < a_m$.

Доказать, что:

а) $f'(x) = na(x - a_1)^{k_1 - 1} \ldots (x - a_m)^{k_m - 1}(x - b_1) \ldots (x - b_{m-1})$, где $a_1 < b_1 < a_2 < b_2 < \ldots < a_{m-1} < b_{m-1} < a_m$;

б) если число k не превосходит степени многочлена $f(x)$, то кратными корнями k-й производной $f^{(k)}(x)$ являются числа a_i, $k_i \geqslant k + 2$, и только они;

в) если $f(x) = c_n x^n + c_{n-1}x^{n-1} + \ldots + c_0$, где $c_n \neq 0$ и $c_k = c_{k+1} =$ $= 0$ для некоторого $k = 0, \ldots, n-2$, то $c_0 = c_1 = \ldots = c_k = c_{k+1} = 0$.

33.7. Пусть $g(x) = b_n x^n + \ldots + b_0$ — вещественный многочлен, причём $b_n, b_0 \neq 0$ и $b_k = b_{k+1} = 0$ для некоторого $k = 1, \ldots, n-2$. Тогда не все корни $g(x)$ вещественны.

33.8. Доказать, что у вещественного многочлена

$$a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_3x^3 + x^2 + x + 1, \qquad a_n \neq 0,$$

не все корни вещественны.

33.9. Доказать, что все комплексные корни z многочлена $nx^n - x^{n-1} - \ldots - 1$ удовлетворяют условию $|z| \leqslant 1$.

33.10. Доказать, что все положительные корни многочлена $f(x) = x(x+1)(x+2)\ldots(x+n) - 1$ меньше $1/n!$.

33.11. Доказать, что многочлен $x^4 - 5x^3 - 4x^2 - 7x + 4$ не имеет отрицательных корней.

33.12. Сколько корней многочлена $x^6 + 6x + 10$ лежит в каждом квадранте комплексной плоскости?

33.13. Пусть $n_1 < \ldots < n_k$ — натуральные числа. Доказать, что многочлен $1 + x^{n_1} + \ldots + x^{n_k}$ не имеет комплексных корней z с условием $|z| < \dfrac{\sqrt{5}-1}{2}$.

33.14. Доказать, что все комплексные корни многочлена $x^{n+1} - ax^n + ax - 1$, где a — вещественное число, имеют модуль 1.

33.15. Пусть k — натуральное число и $|a_i| < k$ при $i = 1, \ldots, n$. Доказать, что тогда для любого корня z многочлена $a_nx^n + \ldots + a_1x + 1$ имеем $|z| \geqslant \dfrac{1}{k+1}$.

33.16. Доказать, что если все корни многочлена $f(x) \in \mathbb{C}[x]$ расположены в верхней полуплоскости, то все корни $f'(x)$ лежат в той же полуплоскости.

33.17. Доказать, что если D — выпуклая область комплексной плоскости, содержащая все корни многочлена $f(x) \in \mathbb{C}[x]$, то все корни $f'(x)$ лежат в D.

33.18. Пусть дана последовательность вещественных многочленов $f_0, f_1, \ldots, f_n$ с положительными старшими коэффициентами, причём:

степень f_k равна $k = 0, \ldots, n$;

$f_k = a_kf_{k-1} - c_kf_{k-2}$, где a_k, c_k — вещественные многочлены, причём $c_k(r) > 0$ для всех $r \in \mathbb{R}$ при $k \geqslant 2$.

Доказать, что:

а) корни всех многочленов f_k вещественны;

б) между двумя корнями многочлена f_k есть корень многочлена f_{k-1}.

33.19. Определить число вещественных корней:

а) многочлена Эрмита $(-1)^n e^{x^2/2} \dfrac{d^n}{dx^n} e^{-x^2/2}$;

б) многочлена Лагерра $(-1)^n e^x \dfrac{d^n}{dx^n}(x^n e^{-x})$.

33.20. Определить все многочлены с коэффициентами ± 1, имеющие только вещественные корни.

ЧАСТЬ II

ЛИНЕЙНАЯ АЛГЕБРА И ГЕОМЕТРИЯ

Глава VII

ВЕКТОРНЫЕ ПРОСТРАНСТВА

В этой главе координаты вектора записываются в строку. Базис пространства, состоящий из векторов e_1, e_2, $\ldots$, e_n, записывается строкой $(e_1, e_2, \ldots, e_n)$, а при переходе к матричной записи координаты базисных векторов располагаются в столбец.

Матрицей перехода от старого базиса к новому базису $(e'_1, e'_2, \ldots, e'_n)$, называется матрица $T = (t_{ij})$, в столбцах которой стоят координаты новых базисных векторов в старом базисе. Таким образом,

$$(e'_1, e'_2, \ldots, e'_n) = (e_1, e_2, \ldots, e_n)\,T,$$

а координаты вектора x в старом и новом базисах связаны равенствами $x_i = \sum_{j=1}^{n} t_{ij} x'_j$, или, в матричной записи,

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = T \begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ \vdots \\ x'_n \end{pmatrix}.$$

§ 34. Понятие векторного пространства. Базисы

34.1. Пусть x, y — векторы, α, β — скаляры. Доказать, что:

а) $\alpha x = 0$ тогда и только тогда, когда $\alpha = 0$ или $x = 0$;

б) $\alpha x + \beta y = \beta x + \alpha y$ тогда и только тогда, когда $\alpha = \beta$ или $x = y$.

34.2. При каких значениях λ:

а) из линейной независимости системы векторов $\{a_1,\ a_2\}$ вытекает линейная независимость системы $\{\lambda a_1 + a_2,\ a_1 + \lambda a_2\}$;

б) из линейной независимости системы $\{a_1, \ldots, a_n\}$ вытекает линейная независимость системы

$$\{a_1 + a_2,\ a_2 + a_3,\ \ldots,\ a_{n-1} + a_n,\ a_n + \lambda a_1\}?$$

34.3. Доказать линейную независимость над $\mathbb{R}$ систем функций:

а) $\sin x,\ \cos x$;

б) $1,\ \sin x,\ \cos x$;

в) $\sin x,\ \sin 2x,\ \ldots,\ \sin nx$;

г) $1,\ \cos x,\ \cos 2x,\ \ldots,\ \cos nx$;

д) $1,\ \cos x,\ \sin x,\ \cos 2x,\ \sin 2x,\ \ldots,\ \cos nx,\ \sin nx$;

е) $1,\ \sin x,\ \sin^2 x,\ \ldots,\ \sin^n x$;

ж) $1,\ \cos x,\ \cos^2 x,\ \ldots,\ \cos^n x$.

34.4. Доказать линейную независимость над $\mathbb{R}$ систем функций:

а) $e^{\alpha_1 x},\ e^{\alpha_2 x},\ \ldots,\ e^{\alpha_n x}$;

б) $x^{\alpha_1},\ x^{\alpha_2},\ \ldots,\ x^{\alpha_n}$;

в) $(1-\alpha_1 x)^{-1}, \ldots, (1-\alpha_n x)^{-1}$;

где $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ — попарно различные вещественные числа.

34.5. Доказать, что в пространстве функций одной вещественной переменной векторы $f_1, \ldots, f_n$ линейно независимы тогда и только тогда, когда существуют числа $a_1, \ldots, a_n$ такие, что $\det (f_i(a_j)) \neq 0$.

34.6. а) В векторном пространстве V над полем $\mathbb{C}$ определим новое умножение векторов на комплексные числа по правилу $\alpha \circ x = \overline{\alpha} x$. Доказать, что относительно операций $+$ и $\circ$ пространство V является векторным. Найти его размерность.

б) Пусть $\mathbb{C}^n$ — абелева группа всех строк $(a_1, \ldots, a_n)$ длины n, $a_i \in \mathbb{C}$. Если $b \in \mathbb{C}$, то положим $b \circ (a_1, \ldots, a_n) = (b\overline{a}_1, \ldots, b\overline{a}_n)$. Является ли $\mathbb{C}^n$ относительно операций $+$ и $\circ$ векторным пространством?

34.7. Доказать, что:

а) группа $\mathbb{Z}$ не изоморфна аддитивной группе никакого векторного пространства;

б) группа вычетов $\mathbf{Z}_n$ изоморфна аддитивной группе векторного пространства над некоторым полем тогда и только тогда, когда n — простое число;

в) коммутативную группу A можно превратить в векторное пространство над полем $\mathbf{Z}_p$ тогда и только тогда, когда $px = 0$ для

любого $x \in A$;

г) коммутативную группу A можно превратить в векторное пространство над полем $\mathbb{Q}$ тогда и только тогда, когда в ней нет элементов конечного порядка (кроме нуля) и для любого натурального числа n и любого $a \in A$ уравнение $nx = a$ имеет решение в группе A.

34.8. Пусть F — поле, E — его подполе.

а) Доказать, что F является векторным пространством над полем E.

б) Если F конечно, то $|F| = |E|^n$, где n — размерность F как векторного пространства над E.

в) Если F конечно, то $|F| = p^m$, где p — характеристика F.

г) Найти базис и размерность поля $\mathbb{C}$ над полем $\mathbb{R}$.

д) Пусть $m_1, \ldots, m_1$ — различные натуральные числа, каждое из которых не делится на квадрат простого числа. Доказать, что числа $1, \sqrt{m_1}, \ldots, \sqrt{m_n}$ линейно независимы в пространстве $\mathbb{R}$ над $\mathbb{Q}$.

е) Пусть $r_1, \ldots, r_n$ — различные рациональные числа из интервала $(0, 1)$. Доказать, что в пространстве $\mathbb{R}$ над полем $\mathbb{Q}$ числа $2^{r_1}, \ldots, 2^{r_n}$ независимы.

з) Пусть α — комплексный корень многочлена $p \in \mathbb{Q}[x]$, неприводимого над $\mathbb{Q}$. Найти размерность над $\mathbb{Q}$ пространства $\mathbb{Q}[\alpha]$, состоящего из чисел вида $f(\alpha)$, $f \in \mathbb{Q}[x]$.

34.9. Пусть M — множество, состоящее из n элементов. На множестве его подмножеств 2^M определим операции сложения и умножения на элементы поля $\mathbf{Z}_2$ по правилу, как в задаче 1.2:

$$1X = X, \qquad 0X = \varnothing.$$

а) Доказать, что относительно этих операций множество 2^M является векторным пространством над полем $\mathbf{Z}_2$, и найти его базис и размерность.

б) Пусть $X_1, \ldots, X_k$ — подмножества в M, причём ни одно из них не содержится в объединении остальных. Доказать, что $X_1, \ldots, X_k$ — линейно независимая система.

34.10. Пусть векторы $e_1, \ldots, e_n$ и x заданы своими координатами в некотором базисе:

а) $e_1 = (1, 1, 1), \quad e_2 = (1, 1, 2), \quad e_3 = (1, 2, 3), \quad x = (6, 9, 14);$

б) $e_1 = (2, 1, -3), \quad e_2 = (3, 2, -5), \quad e_3 = (1, -1, 1), \quad x = (6, 2, -7);$

в) $e_1 = (1, 2, -1, -2)$, $e_2 = (2, 3, 0, -1)$, $e_3 = (1, 2, 1, 4)$, $e_4 = (1, 3, -1, 0)$, $x = (7, 14, -1, 2)$.

Доказать, что $(e_1, \ldots, e_n)$ — также базис пространства, и найти координаты вектора x в этом базисе.

34.11. Доказать, что каждая из двух заданных систем векторов S и S' является базисом. Найти матрицу перехода от S к S':

а) $S = ((1, 2, 1),\ (2, 3, 3),\ (3, 8, 2))$,
$S' = ((3, 5, 8),\ (5, 14, 13),\ (1, 9, 2))$;

б) $S = ((1, 1, 1, 1),\ (1, 2, 1, 1),\ (1, 1, 2, 1,), (1, 3, 2, 3))$,
$S' = ((1, 0, 3, 3),\ (-2, -3, -5, -4),\ (2, 2, 5, 4),\ (-2, -3, -4, -4))$.

34.12. Доказать, что в пространстве $\mathbb{R}[x]_n$ многочленов степени $\leqslant n$ с вещественными коэффициентами системы

$$\{1, x, \ldots, x^n\} \text{ и } \{1, x - a, (x - a)^2, \ldots, (x - a)^n\}, \qquad a \in \mathbb{R},$$

являются базисами, и найти координаты многочлена $f(x) = a_0 + a_1x + \ldots + a_nx^n$ в этих базисах и матрицу перехода от первого базиса ко второму.

34.13. Как изменится матрица перехода от одного базиса к другому, если:

а) поменять местами два вектора первого базиса;

б) поменять местами два вектора второго базиса;

в) записать векторы обоих базисов в обратном порядке?

34.14. Доказать, что системы векторов линейно независимы, и дополнить их до базиса пространства строк:

а) $a_1 = (2, 2, 7, -1)$, $a_2 = (3, -1, 2, 4)$, $a_3 = (1, 1, 3, 1)$;

б) $a_1 = (2, 3, -4, -1)$, $a_2 = (1, -2, 1, 3)$;

в) $a_1 = (4, 3, -1, 1, 1)$, $a_2 = (2, 1, -3, 2, -5)$, $a_3 = (1, -3, 0, 1, -2)$, $a_4 = (1, 5, 2, -2, 6)$;

г) $a_1 = (2, 3, 5, -4, 1)$, $a_2 = (1, -1, 2, 3, 5)$.

§ 35. Подпространства

35.1. Выяснить, является ли подпространством соответствующего векторного пространства каждая из следующих совокупностей векторов:

а) векторы плоскости с началом O, концы которых лежат на одной из двух прямых, пересекающихся в точке O;

б) векторы плоскости с началом O, концы которых лежат на данной прямой;

в) векторы плоскости с началом O, концы которых не лежат на данной прямой;

г) векторы координатной плоскости, концы которых лежат в первой четверти;

д) векторы пространства $\mathbb{R}^n$, координаты которых — целые числа;

е) векторы арифметического пространства F^n, F — поле, являющиеся решениями данной системы линейных уравнений;

ж) векторы линейного пространства, являющиеся линейными комбинациями данных векторов $a_1, \ldots, a_k$;

з) ограниченные последовательности комплексных чисел;

и) последовательности вещественных чисел, имеющие предел;

к) последовательности вещественных чисел, имеющие предел a;

л) последовательности $u(n)$ элементов поля F, удовлетворяющие рекуррентному соотношению

$$u(n+k) = f(n) + a_0u(n) + a_1u(n+1) + \ldots + a_{k-1}u(n+k-1),$$

где $(f(n))$ — фиксированная последовательность элементов поля F, k — фиксированное натуральное число, $a_i \in F$;

м) многочлены чётной степени с коэффициентами из поля F;

н) многочлены с коэффициентами из поля F, не содержащие чётных степеней переменной x;

о) множества из пространства 2^M (см. 4.9), состоящие из чётного числа элементов;

п) множества из 2^M, состоящие из нечётного числа элементов.

35.2. Доказать, что следующие совокупности векторов пространства F^n, F — поле, образуют подпространства, и найти их базисы и размерности:

а) векторы, у которых совпадают первая и последняя координаты;

б) векторы, у которых координаты с чётными номерами равны 0;

в) векторы, у которых координаты с чётными номерами равны между собой;

г) векторы вида $(\alpha, \beta, \alpha, \beta, \ldots)$;

д) векторы, являющиеся решениями однородной системы уравнений.

35.3. Выяснить, какие из следующих совокупностей матриц порядка n над полем F образуют подпространства в пространстве матриц $\mathbf{M}_n(F)$, найти их базисы и размерности:

а) все матрицы;

б) симметрические матрицы;

в) кососимметрические матрицы;

г) невырожденные матрицы;

д) вырожденные матрицы;

е) матрицы со следом, равным нулю;

ж) матрицы, перестановочные с данным множеством матриц (при вычислении базиса и размерности предположить, что данное множество матриц состоит из одной диагональной матрицы с различными диагональными элементами);

з) матрицы X, удовлетворяющие условию $A_iX + XB_i = 0$, где $\{A_i, B_i\}$ — заданный набор матриц.

35.4. Пусть $\mathbb{R}^S$ — пространство всех функций, определенных на множестве S и принимающих вещественные значения. Выяснить, какие из следующих совокупностей функций $f(x) \in \mathbb{R}^S$ составляют подпространство:

а) функции, принимающие значение a в данной точке $s \in S$;

б) функции, принимающие значение a во всех точках некоторого подмножества $T \subseteq S$;

в) функции, обращающиеся в нуль хотя бы в одной точке множества S;

г) функции, имеющие предел a при $x \to \infty$ (при $S = \mathbb{R}$);

д) функции, имеющие не более конечного числа точек разрыва (при $S = \mathbb{R}$).

35.5. Пусть K^∞ — пространство бесконечных последовательностей с элементами из поля K. Выяснить, какие из следующих совокупностей последовательностей составляют в K^∞ подпространство:

а) последовательности, в которых лишь конечное число элементов отлично от нуля;

б) последовательности, в которых лишь конечное число элементов равно нулю;

в) последовательности, в которых все элементы отличны от 1.

35.6. Доказать, что в пространствах $\mathbb{R}^\infty$ и $\mathbb{C}^\infty$ следующие совокупности образуют подпространства:

а) последовательности, удовлетворяющие *условию Коши*: для любого $\varepsilon > 0$ найдется число $N \in \mathbb{N}$ такое, что при любых $n, k > N$ выполняется неравенство $|x_n - x_k| < \varepsilon$;

б) последовательности, удовлетворяющие *условию Гильберта*: ряд $\sum_{i=1}^{\infty} |x_i|^2$ сходится;

в) последовательности полиномиального роста, т.е. $|x_n| \leqslant Cn^k$, где C, k — натуральные числа, зависящие от последовательности;

г) последовательности экспоненциального роста, т.е. $|x_n| \leqslant Ce^n$, где C — положительное вещественное число, зависящее от последовательности.

35.7. Выяснить, какие из следующих совокупностей многочленов образуют подпространства в пространстве $\mathbb{R}[x]_n$ (см. 34.12) и найти их базисы и размерности:

а) многочлены, имеющие данный корень $\alpha \in \mathbb{R}$;

б) многочлены, имеющие данный корень $\alpha \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$;

в) многочлены, имеющие данные корни $\alpha_1, \ldots, \alpha_k \in \mathbb{R}$;

г) многочлены, имеющие данный простой корень $\alpha \in \mathbb{R}$.

35.8. Доказать, что если подпространство векторного пространства $\mathbb{R}[x]_n$ (см. 34.12) для любого $k = 0, 1, \ldots, m$ содержит хотя бы один многочлен степени k и не содержит многочленов степени $> m$, то оно совпадает с $\mathbb{R}[x]_m$.

35.9. Пусть $\mathbb{R}[x_1, \ldots, x_m]$ — пространство многочленов от переменных $x_1, \ldots, x_m$. Найти:

а) размерность подпространства всех однородных многочленов степени k;

б) размерность его подпространства, состоящего из всех многочленов степени $\leqslant k$.

35.10. Пусть V — n-мерное векторное пространство над полем F, состоящим из q элементов. Найти:

а) число векторов в пространстве V;

б) число базисов пространства V;

в) число невырожденных матриц порядка n над полем F;

г) число вырожденных матриц порядка n над полем F;

д) число k-мерных подпространств пространства V;

е) число решений уравнения $AX = 0$, где A — прямоугольная матрица ранга r, X — столбец неизвестных длины n.

35.11. Найти базис и размерность линейной оболочки следующей системы векторов:

а) $a_1 = (1, 0, 0, -1)$, $a_2 = (2, 1, 1, 0)$, $a_3 = (1, 1, 1, 1)$, $a_4 = (1, 2, 3, 4)$, $a_5 = (0, 1, 2, 3)$;

б) $a_1 = (1, 1, 1, 1, 0)$, $a_2 = (1, 1, -1, -1, -1)$, $a_3 = (2, 2, 0, 0, -1)$, $a_4 = (1, 1, 5, 5, 2)$, $a_5 = (1, -1, -1, 0, 0)$.

35.12. Пусть L_1 и L_2 — подпространства конечномерного векторного пространства V. Доказать, что:

а) если $L_1 \subseteq L_2$, то $\dim L_1 \leqslant \dim L_2$, причём равенство имеет место только при $L_1 = L_2$;

б) если $\dim(L_1 + L_2) = 1 + \dim(L_1 \cap L_2)$, то сумма $L_1 + L_2$ равна одному из этих подпространств, а пересечение $L_1 \cap L_2$ — другому;

в) если $\dim L_1 + \dim L_2 > \dim V$, то $L_1 \cap L_2 \neq 0$.

35.13. Пусть U, V, W — подпространства векторного пространства.

а) Можно ли утверждать, что $U \cap (V + W) = (U \cap V) + (U \cap W)$?

б) Доказать, что предыдущее равенство верно, если $V \subseteq U$.

в) Доказать, что

$$(U + W) \cap (W + V) \cap (V + U) = [(W + V) \cap U] + [(V + U) \cap W].$$

г) Доказать, что

$$\dim[(U + V) \cap W] + \dim(U \cap V) = \dim[(V + W) \cap U] + \dim(V \cap W).$$

д) Доказать, что

$$(U \cap V) + (V \cap W) + (W \cap U) \subseteq (U + V) \cap (V + W) \cap (W + U)$$

и разность размерностей этих подпространств является чётным числом.

35.14. Найти размерности суммы и пересечения линейных оболочек систем векторов пространства $\mathbb{R}^4$:

а) $S = \langle (1, 2, 0, 1), (1, 1, 1, 0) \rangle$,
$T = \langle (1, 0, 1, 0), (1, 3, 0, 1) \rangle$;

б) $S = \langle (1, 1, 1, 1), (1, -1, 1, -1), (1, 3, 1, 3) \rangle$,
$T = \langle (1, 2, 0, 2), (1, 2, 1, 2), (3, 1, 3, 1) \rangle$;

в) $S = \langle (2, -1, 0, -2), (3, -2, 1, 0), (1, -1, 1, -1) \rangle$,
$T = \langle (3, -1, -1, 0), (0, -1, 2, 3), (5, -2, -1, 0) \rangle$.

35.15. Найти базисы суммы и пересечения линейных оболочек $\langle a_1, a_2, a_3\rangle$ и $\langle b_1, b_2, b_3\rangle$:

а) $a_1 = (1,2,1), \quad b_1 = (1,2,2),$
$a_2 = (1,1,-1), \quad b_2 = (2,3,-1),$
$a_3 = (1,3,3), \quad b_3 = (1,1,-3);$

б) $a_1 = (-1,6,4,7,-2), \quad b_1 = (1,1,2,1,-1),$
$a_2 = (-2,3,0,5,-2), \quad b_2 = (0,-2,0,-1,-5),$
$a_3 = (-3,6,5,6,-5), \quad b_3 = (2,0,2,1,-3);$

в) $a_1 = (1,1,0,0,-1), \quad b_1 = (1,0,1,0,1),$
$a_2 = (0,1,1,0,1), \quad b_2 = (0,2,1,1,0),$
$a_3 = (0,0,1,1,1), \quad b_3 = (1,2,1,2,-1);$

г) $a_1 = (1,2,1,0), \quad b_1 = (2,-1,0,1),$
$a_2 = (-1,1,1,1), \quad b_2 = (1,-1,3,7);$

д) $a_1 = (1,2,-1,-2), \quad b_1 = (2,5,-6,-5),$
$a_2 = (3,1,1,1), \quad b_2 = (-1,2,-7,-3).$
$a_3 = (-1,0,1,-1),$

35.16. Найти систему линейных уравнений, задающую систему векторов:

а) $\langle (1,-1,1,0),\ (1,1,0,1),\ (2,0,1,1)\rangle$;

б) $\langle (1,-1,1,-1,1),\ (1,1,0,0,3),\ (3,1,1,-1,7)\rangle$.

35.17. Пусть $L_1, \ldots, L_k$ — подпространства векторного пространства. Доказать, что:

а) сумма этих подпространств является прямой тогда и только тогда, когда хотя бы один ее вектор однозначно представляется в виде

$$x_1 + \ldots + x_k, \qquad x_i \in L_i; \quad i = 1, \ldots, k;$$

б) условие $L_i \cap L_j = 0$ для любых различных i и j от 1 до k не является достаточным для того, чтобы сумма этих подпространств была прямой.

35.18. Пусть подпространства $U, V \subseteq \mathbb{R}^n$ заданы уравнениями

$$x_1 + x_2 + \ldots + x_n = 0, \qquad x_1 = x_2 = \ldots = x_n.$$

Доказать, что $\mathbb{R}^n = U \oplus V$, и найти проекции единичных векторов на U параллельно V и на V параллельно U.

35.19. Пусть в пространстве $\mathbb{R}^4$

$$U = \langle (1,1,1,1),\ (-1,-2,0,1)\rangle, \qquad V = \langle (-1,-1,1,-1),\ (2,2,0,1)\rangle.$$

Доказать, что $\mathbb{R}^4 = U \oplus V$, и найти проекцию вектора $(4, 2, 4, 4)$ на подпространство U параллельно V.

35.20. Доказать, что для любого подпространства $U \subseteq \mathbb{R}^n$ существует такое подпространство V, что $\mathbb{R}^n = U \oplus V$.

35.21. Доказать, что пространство матриц $\mathbf{M}_n(\mathbb{R})$ является прямой суммой подпространства симметрических и подпространства кососимметрических матриц, и найти проекции матрицы

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ 0 & 1 & \dots & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}$$

на каждое из этих подпространств параллельно другому подпространству.

35.22. Пусть U — подпространство кососимметрических матриц, V — подпространство верхнетреугольных матриц в $\mathbf{M}_n(\mathbb{R})$.

а) Доказать, что $U \oplus V = \mathbf{M}_n(\mathbb{R})$.

б) Найти проекцию матриц E_{ij} на U и V.

35.23. Пусть U — подпространство симметрических матриц, V — подпространство верхненильтреугольных матриц в $\mathbf{M}_n(\mathbb{R})$.

а) Доказать, что $U \oplus V = \mathbf{M}_n(\mathbb{R})$.

б) Найти проекцию матрицы E_{ij} на U и V.

35.24. Пусть F — поле из q элементов, U — подпространство размерности m в пространстве V размерности n. Найти число таких подпространств W в V, что $V = U \oplus W$.

35.25. Пусть V — линейное пространство над бесконечным полем F и $V_1, \dots, V_k$ — подпространства в V, причём $V = V_1 \cup \ldots \cup V_k$. Доказать, что $V = V_i$ для некоторого $i = 1, \dots, k$.

35.26. Пусть V — линейное пространство над полем F, U, W — подпространства в V, причём $U \cup W = V$. Доказать, что $V = U$ или $V = W$.

35.27. Привести пример такого пространства V над конечным полем, что $V = U_1 \cup U_2 \cup U_3$, где U_1, U_2, U_3 — собственные подпространства в V.

§ 36. Линейные функции и отображения

36.1. Пусть $V_0 \xrightarrow{\mathcal{A}_1} V_1 \xrightarrow{\mathcal{A}_2} \ldots \xrightarrow{\mathcal{A}_m} V_m$ — последовательность линейных отображений векторных пространств. Доказать, что

$$\sum_{i=1}^{m} \dim \operatorname{Ker} \mathcal{A}_i - \sum_{i=1}^{m} \dim(V_i / \operatorname{Im} \mathcal{A}_i) = \dim V_0 - \dim V_m.$$

36.2. Пусть F — поле из q элементов. Найти:

а) число линейных отображений F^n в пространство F^k;

б) число линейных инъективных отображений F^n в F^k;

в) число линейных сюръективных отображений F^n в F^k.

36.3. Пусть линейное отображение $\mathcal{A}\colon V \to W$ в базисах (e_1, e_2, e_3) пространства V и (f_1, f_2) пространства W имеет матрицу $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 3 & 4 & 5 \end{pmatrix}$. Найти матрицу отображения $\mathcal{A}$ в базисах $(e_1, e_1 + e_2, e_1 + e_2 + e_3)$ и $(f_1, f_1 + f_2)$.

36.4. Пусть $L = K[x]_1$ (см. 34.12), K — поле. Найти матрицу линейного отображения $\mathcal{A}\colon\ f(x) \mapsto f(S)$ пространства L в пространство $M = \mathbf{M}_2(K)$, где $S = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ — фиксированная матрица, если в L выбран базис $(1, x)$, а в M — базис из матричных единиц.

36.5. Пусть $\mathcal{A}, \mathcal{B}\colon\ V \to W$ — линейные отображения, причём $\dim(\operatorname{Im} \mathcal{A}) \leqslant \dim(\operatorname{Im} \mathcal{B})$. Доказать, что существуют такие операторы $\mathcal{C}, \mathcal{D}$ в V и W, что $\mathcal{A} = \mathcal{D}\mathcal{B}\mathcal{C}$, причём $\mathcal{C}$ (или $\mathcal{D}$) можно выбрать невырожденным.

36.6. Пусть $\mathcal{A}, \mathcal{B}\colon\ V \to W$ — линейные отображения. Доказать, что следующие условия эквивалентны:

а) $\operatorname{Ker} \mathcal{A} \leqslant \operatorname{Ker} \mathcal{B}$;

б) $\mathcal{B} = \mathcal{C}\mathcal{A}$ для некоторого оператора $\mathcal{C}$ в W.

36.7. Пусть $\mathcal{A}, \mathcal{B}\colon\ V \to W$ — линейные отображения. Доказать, что следующие условия эквивалентны:

а) $\operatorname{Im} \mathcal{A} \subseteq \operatorname{Im} \mathcal{B}$;

б) $\mathcal{A} = \mathcal{B}\mathcal{D}$ для некоторого оператора $\mathcal{D}$ в V.

36.8. Пусть $\mathcal{A}\colon\ V \to W$ — линейное отображение. Доказать, что существует такое линейное отображение $\mathcal{B}\colon\ W \to V$, что $\mathcal{A} = \mathcal{A}\mathcal{B}\mathcal{A}$, $\mathcal{B} = \mathcal{B}\mathcal{A}\mathcal{B}$.

36.9. Пусть $V = \mathbb{R}[x]_n$ и отображения α^a $(a \in \mathbb{R})$, β^i, γ^i пространства V в $\mathbb{R}$ заданы правилами

$$\alpha^a(f) = f(a), \qquad \beta^i(f) = f^{(i)}(0), \qquad \gamma^i(f) = \int_0^{i+1} f(x)\,dx.$$

Доказать, что системы:

а) $\alpha^0, \alpha^1, \ldots, \alpha^n$; б) $\beta^0, \beta^1, \ldots, \beta^n$; в) $\gamma^0, \gamma^1, \ldots, \gamma^n$;
являются базисами сопряжённого пространства V^*.

36.10. а) Доказать, что для каждого базиса сопряжённого пространства V^* существует единственный базис пространства V, для которого данный базис является сопряжённым.

б) Найти этот базис в задаче 36.9, а).

в) Найти этот базис в задаче 36.9, б).

36.11. Доказать, что для любой ненулевой линейной функции f на n-мерном пространстве V существует базис $(e_1, \ldots, e_n)$ пространства V такой, что

$$f(x_1 e_1 + \ldots + x_n e_n) = x_1$$

для любых коэффициентов $x_1, \ldots, x_n$.

36.12. Доказать, что всякое k-мерное подпространство n-мерного пространства является пересечением ядер некоторых $n-k$ линейных функций.

36.13. Пусть f — ненулевая линейная функция на векторном пространстве V (не обязательно конечномерном), $U = \operatorname{Ker} f$. Доказать, что:

а) U — *максимальное* подпространство V, т.е. не содержится ни в каком другом подпространстве, отличном от V;

б) $V = U \oplus \langle a \rangle$ для любого $a \notin U$.

36.14. Доказать, что если две линейные функции на векторном пространстве имеют одинаковые ядра, то они различаются линейным множителем.

36.15. Доказать, что n линейных функций на n-мерном пространстве линейно независимы тогда и только тогда, когда пересечение их ядер есть нулевое подпространство.

36.16. Доказать, что векторы $e_1, \ldots, e_k$ конечномерного пространства V линейно независимы тогда и только тогда, когда существуют линейные функции $f^1, \ldots, f^k \in V^*$ такие, что $\det\big(f^i(e_j)\big) \neq 0$.

36.17. Для всякого подмножества U конечномерного пространства V и для всякого подмножества W сопряжённого пространства V^* положим

$$U^0 = \{f \in V^* \mid f(x) = 0 \text{ для любого } x \in U\},$$
$$W^0 = \{x \in V \mid f(x) = 0 \text{ для любой функции } f \in V^*\}.$$

Доказать, что:

а) U^0 — подпространство в V^*, и если U — подпространство, то $\dim U + \dim U^0 = \dim V$;

б) если U_1 и U_2 — подпространства в V, то $U_1^0 = U_2^0$ тогда и только тогда, когда $U_1 = U_2$;

в) для любого подпространства U пространства V

$$(U^0)^0 = U, \qquad (U_1 + U_2)^0 = U_1^0 \cap U_2^0, \qquad (U_1 \cap U_2)^0 = U_1^0 + U_2^0.$$

36.18. Доказать, что пространство многочленов $\mathbb{Q}[x]$ не изоморфно своему сопряжённому.

36.19. Пусть l_1, l_2 — две линейные функции на линейном пространстве V, причём $l_1(x)l_2(x) = 0$ для всех $x \in V$. Доказать, что одна из функций нулевая.

36.20. Пусть $l_1, \ldots, l_k$ —линейные функции на линейном векторном пространстве V над бесконечным полем. Доказать, что если $l_1(x) \ldots l_k(x) = 0$ для всех $x \in V$, то одна из функций нулевая.

36.21. Пусть K — конечное поле из q^n элементов, F — подполе в K из q элементов, $l(x) = x + x^q + \ldots + x^{q^{n-1}}$, $x \in K$. Доказать, что:

а) $l(x)$ — линейный оператор в K как векторном пространстве над F;

б) ядро оператора $l(x)$ состоит из всех элементов вида $a - a^q$, где $a \in K$;

в) F лежит в ядре оператора $l(x)$ тогда и только тогда, когда характеристика поля K делит n.

Глава VIII

БИЛИНЕЙНЫЕ И КВАДРАТИЧНЫЕ ФУНКЦИИ

§ 37. Общие билинейные и полуторалинейные функции

В этом параграфе предполагается, что характеристика основного поля отлична от двух.

37.1. Какие из следующих функций двух аргументов являются билинейными функциями в соответствующих пространствах:

а) $f(x,y) = {}^t x \cdot y \quad (x,\ y \in F^n$ — столбцы, F — поле);

б) $f(A,B) = \operatorname{tr}(AB) \quad (A,B \in \mathbf{M}_n(F),\ F$ — поле);

в) $f(A,B) = \operatorname{tr}(AB - BA)$;

г) $f(A,B) = \det(AB)$;

д) $f(A,B) = \operatorname{tr}(A+B)$;

е) $f(A,B) = \operatorname{tr}(A \cdot {}^t B)$;

ж) $f(A,B) = \operatorname{tr}({}^t A \cdot B)$;

з) $f(A,B)$ — коэффициент на месте (i,j) матрицы AB;

и) $f(u,v) = \operatorname{Re}(uv)\ \ (u,v \in \mathbb{C},\ \mathbb{C}$ — векторное пространство над $\mathbb{R}$);

к) $f(u,v) = \operatorname{Re}(u\overline{v})$;

л) $f(u,v) = |uv|$;

м) $f(u,v) = \operatorname{Im}(u\overline{v})$;

н) $f(u,v) = \displaystyle\int_b^a uv\,dt \quad (u,v$ — непрерывные функции аргумента t на отрезке $[a,b]$);

о) $f(u,v) = \displaystyle\int_b^a uv'\,dt \quad (u,v$ — дифференцируемые функции на отрезке $[a,b]$, причём $u(a) = u(b) = v(a) = v(b) = 0$);

п) $f(u,v) = \displaystyle\int_b^a (u+v)^2 dt$;

р) $f(u,v) = (uv)(\alpha) \quad (u, v \in F[x], \quad \alpha \in F)$;

с) $f(u,v) = \dfrac{d}{dt}(uv)(a)$;

т) $f(u,v) = |u+v|^2 - |u|^2 - |v|^2 \quad (u, v \in \mathbb{R}^3)$;

у) $f(u,v) = \varepsilon(u \times v)$ ($\times$ — векторное умножение, $\varepsilon(x)$ — сумма координат вектора x в заданном базисе).

37.2. В конечномерных пространствах из задачи 37.1 выбрать базис и найти матрицы соответствующих билинейных функций.

37.3. Пусть F — поле и $F(x)$ — поле рациональных функций от переменной x. Доказать, что отображения $x \mapsto \varepsilon x^\tau$ задают автоморфизмы второго порядка в $F(x)$, где $\varepsilon, \tau = \pm 1$ и $(\varepsilon, \tau) \neq (1,1)$.

37.4. Пусть p, q — различные простые числа. Доказать, что вещественные числа вида $a + b\sqrt{p} + c\sqrt{q} + d\sqrt{pq}$, где $a, b, c, d \in \mathbb{Q}$, образуют подполе $\mathbb{Q}(\sqrt{p}, \sqrt{q})$ в $\mathbb{R}$. Проверить, что отображение

$$x \to \overline{x} = a - b\sqrt{p} + c\sqrt{q} - d\sqrt{pq}$$

является автоморфизмом второго порядка в этом поле.

37.5. Пусть F — поле с автоморфизмом $a \to \overline{a}$ второго порядка. Какие из следующих функций двух аргументов являются полуторалинейными функциями в соответствующих векторных пространствах:

а) $f(a,b) = {}^t a \cdot \overline{b} \quad (a,\ b \in F^n$ — столбцы);

б) $f(A,B) = \operatorname{tr}(A\overline{B}) \quad (A,\ B \in \mathbf{M}_n(F))$;

в) $f(A,B) = \det(A\overline{B})$;

г) $f(A,B) = \operatorname{tr}(A \cdot {}^t\overline{B})$;

д) $f(A,B) = \operatorname{tr}(A \cdot {}^t B)$;

е) $f(A,B)$ — элемент, стоящий на месте (i,j) матрицы $A\overline{B}$;

ж) $f(A,B)$ — элемент, стоящий на месте (i,j) матрицы $A^t\overline{B}$;

з) $f(u,v) = \dfrac{d}{dx}(u\overline{v})(a)$, $(u, v \in F[x],\ a \in F$; применение автоморфизма к многочлену означает применение его ко всем коэффициентам).

37.6. Найти матрицу билинейной функции f в новом базисе, если заданы её матрица в старом базисе и формулы перехода:

а) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$, $\quad \begin{aligned} e_1' &= e_1 - e_2, \\ e_2' &= e_1 + e_3, \\ e_3' &= e_1 + e_2 + e_3; \end{aligned}$

б) $\begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ -2 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$, $\quad e'_1 = e_1 + 2e_2 - e_3,\; e'_2 = e_2 - e_3,\; e'_3 = -e_1 + e_2 - 3e_3.$

37.7. Пусть полуторалинейная функция f в двумерном комплексном пространстве с базисом $(e_1,\ e_2)$ задана матрицей B. Найти матрицу B' функции f в базисе (e'_1, e'_2), где:

а) $B = \begin{pmatrix} i+1 & -1 \\ 0 & -i \end{pmatrix}$, $\quad e'_1 = e_1 + ie_2,\; e'_2 = +ie_1 + e_2;$

б) $B = \begin{pmatrix} 2 & -1+i \\ -i & 0 \end{pmatrix}$, $\quad e'_1 = 2e_1 - ie_2,\; e'_2 = ie_1 + e_2.$

37.8. Пусть билинейная функция f задана в некотором базисе матрицей F. Найти $f(x, y)$, если:

а) $F = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -2 & -1 & 3 \\ 0 & 4 & 5 \end{pmatrix}$, $\quad x = (1, 0, 3),\; y = (-1, 2, -4);$

б) $F = \begin{pmatrix} i & 1+i & 0 \\ -1+i & 0 & 2-i \\ 2+i & 3-i & -1 \end{pmatrix}$, $\quad x = (1+i, 1-i, 1),\; y = (-2+i, -i, 3+2i).$

37.9. Найти значение $f(x, y)$ полуторалинейной функции, заданной в некотором базисе комплексного пространства матрицей B, если:

а) $B = \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ -1 & i \end{pmatrix}$, $\quad x = (i, -2),\; y = (1-i, 3+i);$

б) $B = \begin{pmatrix} -i & 1-2i \\ -4 & 2+3i \end{pmatrix}$, $\quad x = (2, i+3),\; y = (-i, 6-2i).$

37.10. Пусть g — билинейная функция с матрицей G в некотором базисе пространства V, $\mathcal{A}$ — линейный оператор в V с матрицей A. Найти в этом базисе матрицу билинейной функции $f(u, v) = g(u, \mathcal{A}(v))$, если:

а) $G = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & -2 \\ 3 & 4 & 5 \end{pmatrix}$, $\quad A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ -3 & -4 & 2 \\ 1 & -2 & -3 \end{pmatrix};$

б) $G = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 4 & 0 & 3 \\ 5 & 6 & 0 \end{pmatrix}$, $\quad A = \begin{pmatrix} 1 & -4 & 3 \\ 4 & -1 & -2 \\ -3 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$

37.11. Пусть g — полуторалинейная функция с матрицей G в некотором базисе линейного пространства V, $\mathcal{A}$ — линейный оператор

в V с матрицей A. Найти в этом базисе матрицу полуторалинейной функции $f(u,v) = g(u, \mathcal{A}(v))$, если:

а) $G = \begin{pmatrix} -5+i & 2 \\ -i & 4+i \end{pmatrix}, \qquad A = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 2 & -i \end{pmatrix}$;

б) $G = \begin{pmatrix} 4-i & 2-i \\ 0 & 1+i \end{pmatrix}, \qquad A = \begin{pmatrix} -i+1 & 0 \\ 4 & 3+i \end{pmatrix}$.

37.12. Найти левое и правое ядра билинейной функции f, заданной в базисе (e_1, e_2, e_3) матрицей:

а) $\begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 3 & -5 & 5 \\ 5 & -8 & 6 \end{pmatrix}$; б) $\begin{pmatrix} 4 & 3 & 2 \\ 1 & 3 & 5 \\ 3 & 6 & 9 \end{pmatrix}$.

37.13. Пусть $F = \mathbb{Q}(\sqrt{3})$ и $\overline{x} = a - b\sqrt{3}$, если $x = a + b\sqrt{3}$, где $a, b \in \mathbb{Q}$. Найти в двумерном векторном пространстве над F левое и правое ядра полуторалинейной функции, заданной в базисе (e_1, e_2) матрицей:

а) $\begin{pmatrix} 1+\sqrt{3} & -1-\sqrt{3} \\ 1 & 2-\sqrt{3} \end{pmatrix}$; б) $\begin{pmatrix} -3 & -2\sqrt{3} \\ 2\sqrt{3} & 4 \end{pmatrix}$.

37.14. Найти левое и правое ядра билинейной функции $f(x,y) = (x, \mathcal{A}(y))$, где $\mathcal{A}$ — линейный оператор с матрицей A в ортонормированном базисе (e_1, e_2, e_3) евклидова пространства:

а) $A = \begin{pmatrix} 5 & -6 & 1 \\ 3 & -5 & -2 \\ 2 & -1 & 3 \end{pmatrix}$; б) $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 3 & -2 & 2 \\ 5 & -4 & 0 \end{pmatrix}$.

37.15. Пусть $F, \overline{x}$ из 37.13. Найти левое и правое ядра полуторалинейной функции $f(x,y) = g(x, \mathcal{A}(y))$, где $\mathcal{A}$ — линейный оператор с матрицей A, g — полуторалинейная функция в двумерном пространстве, имеющая в базисе (e_1, e_2) единичную матрицу:

а) $A = \begin{pmatrix} 1+\sqrt{3} & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$; б) $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 2\sqrt{3} & 0 \end{pmatrix}$.

37.16. Пусть f — билинейная функция с матрицей F на векторном пространстве V, U — подпространство в V. Найти левое и правое ортогональные дополнения к U относительно f (т.е. максимальные подпространства U_1 и U_2 такие, что $f(U_1, U) = f(U, U_2) = 0$), если:

а) $F = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 3 \\ 3 & 3 & 6 \\ 2 & 5 & 9 \end{pmatrix}, \qquad U = \langle (1,-1,0), (-2,3,1) \rangle$;

б) $F = \begin{pmatrix} 6 & -8 & 5 \\ 5 & -5 & 3 \\ 1 & -3 & 2 \end{pmatrix}, \qquad U = \langle (2,0,-3),(3,1,-5) \rangle.$

37.17. При F, $\overline{x}$ из 37.13, и f — полуторалинейная функция с матрицей G на векторном пространстве V, U — подпространство в V. Найти левое и правое ортогональные дополнения к U относительно f, если:

а) $G = \begin{pmatrix} 1+\sqrt{3} & 2 & -\sqrt{3} \\ 0 & 1 & 2 \\ 1-\sqrt{3} & 2 & 0 \end{pmatrix}, \qquad U = \langle (1,0,\sqrt{3}),(0,2,1) \rangle;$

б) $G = \begin{pmatrix} 1 & -\sqrt{3} & 2 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1-\sqrt{3} & \sqrt{3} \end{pmatrix}, \qquad U = \langle (1,-\sqrt{3},2) \rangle.$

37.18. Пусть F — конечное поле из q^2 элементов, причём $\overline{x} = x^q$ для всех $x \in F$. Предположим, что K — конечное поле, содержащее F и $n = \dim_F K$. Доказать, что:

а) $x \to \overline{x}$ — автоморфизм второго порядка в F;

б) функция

$$f(x,y) = xy^q + x^{q^2}y^{q^3} + \ldots + x^{q^{2n-2}}y^{q^{2n-1}}$$

является полуторалинейной функцией в K как векторном пространстве над F;

в) функция $f(x,y)$ из б) невырождена;

г) найти левое и правое ортогональные дополнения к F в K относительно $f(x,y)$.

37.19. Пусть $F = \mathbb{Q}[i]$, $K = F[\sqrt{2}]$. Рассмотрим K как векторное пространство над F. Доказать, что:

а) $\dim_F K = 2$;

б) функция $f(z_1+z_2\sqrt{2}, t_1+t_2\sqrt{2}) = z_1\overline{t}_1 + 2z_2\overline{t}_2$, где черта означает комплексное сопряжение, является полуторалинейной функцией в K как векторном пространстве над F;

в) найти матрицу f в базисе $e_1 = 1$, $e_2 = \sqrt{2}$;

г) доказать, что функция f невырождена;

д) найти левое и правое ортогональные дополнения к F в K относительно f.

37.20. Пусть $F = \mathbb{C}(x)$ — поле рациональных функций с автоморфизмом, при котором $x \to \varepsilon x^\tau$, где $\varepsilon, \tau = \pm 1$, $(\varepsilon, \tau) \neq (1,1)$.

а) Доказать, что многочлен $y^4 - x \in F[y]$ неприводим над F.

б) Доказать, что в поле $K = F[y]/(y^4 - x)$ как векторном пространстве над F функция

$$f(u,v) = u(x,y)v(ix^\tau, y) + u(x,iy)v(\varepsilon x^\tau, iy)+ \\ + u(x,-y)v(\varepsilon x^\tau, -y) + u(x,-iy)v(\varepsilon x^\tau, -iy)$$

является полуторалинейной.

в) Найти матрицу $f(u,v)$ в базисе $1, y, y^2, y^3$ пространства K над полем F.

г) Доказать невырожденность функции f.

д) Найти левое и правое ортогональные дополнения к линейной оболочке $\langle 1, y\rangle$ в K.

е) Найти в K такой базис u_0, u_1, u_2, u_3, что $f(u_i, y^j) = \delta_{ij}$, где $i, j = 0, 1, 2, 3$.

37.21. При каких из следующих элементарных преобразований базиса матрица билинейной функции меняется так же, как матрица линейного оператора:

а) $(e_1, \ldots, e_i, \ldots, e_n) \to (e_1, \ldots, \lambda e_i, \ldots, e_n)$;

б) $(e_1, \ldots, e_i, \ldots, e_n) \to (e_1, \ldots, e_i + \lambda e_j, \ldots, e_n) \quad (j \neq i)$;

в) $(e_1, \ldots, e_i, \ldots, e_j, \ldots, e_n) \to (e_1, \ldots, e_j, \ldots, e_i, \ldots, e_n)$?

37.22. Найти связь между матрицами A, B, G линейных операторов $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$ и билинейной (полуторалинейной) функции g в некотором базисе пространства и матрицей F билинейной (полуторалинейной) функции

$$f(x,y) = g(\mathcal{A}(x), \mathcal{B}(y)).$$

37.23. Доказать, что всякая билинейная (полуторалинейная) функция f ранга 1 может быть представлена в виде произведения двух линейных функций $p(x)q(y)$ (соответственно $p(x)q(\overline{y})$). К какому простейшему виду можно привести матрицу функции f с помощью замены базиса?

37.24. Пусть $\mathbf{e} = (e_1, \ldots, e_n)$, $\mathbf{e}' = (e'_1, \ldots, e'_n)$ — два базиса пространства V, C — матрица перехода от $\mathbf{e}$ к $\mathbf{e}'$, f — билинейная (полуторалинейная) функция на V с матрицами F и F' в этих базисах. Найти связь между матрицами F, F'.

37.25. Доказать, что билинейные и полуторалинейные функции $\mathrm{tr}(AB)$, $\mathrm{tr}(A^tB)$, $\mathrm{tr}(A\overline{B})$, $\mathrm{tr}(A^t\overline{B})$ на пространстве $\mathbf{M}_n(K)$ являются невырожденными.

37.26. Доказать, что размерности левого и правого ядер билинейной (полуторалинейной) функции совпадают, однако сами ядра могут и не совпадать.

37.27. Пусть f — невырожденная билинейная (полуторалинейная) функция на пространстве V. Доказать, что для любой линейной функции p найдется единственный вектор $v \in V$ такой, что $p(x) = f(x, v)$ для любого $x \in V$, и отображение $p \mapsto v$ является изоморфизмом пространств V^* и V.

37.28. Пусть F — матрица невырожденной билинейной функции f на вещественном пространстве размерности n.

а) Доказать, что при нечётном n матрица $-F$ не является матрицей функции f ни в каком базисе пространства V.

б) Верно ли утверждение а) для чётного n?

в) Верно ли утверждение а) при чётном n для диагональной матрицы F?

37.29. Пусть для ненулевой билинейной (полуторалинейной) функции f на пространстве V существует такое число ε, что для любых $x, y \in V$

$$f(y, x) = \varepsilon f(x, y)$$

(соответственно $\overline{f(y, x)} = \varepsilon f(x, y)$). Доказать, что:

а) ε равно 1 или -1;

б) если U_1 и U_2 — вполне изотропные подпространства относительно f, имеющие одинаковую размерность, и $U_1 \cap U_2^{\perp} = 0$, то ограничение f на их сумму $U_1 + U_2$ — невырожденная функция;

в) если W_1 и W_2 — максимальные вполне изотропные подпространства относительно f и $W_1 \cap W_2 = 0$, то $\dim W_1 = \dim W_2$;

г) если невырожденные билинейные функции f_1 и f_2 удовлетворяют рассматриваемому условию (при одном и том же ε) и относительно каждой из них V является прямой суммой двух изотропных подпространств, то функции f_1 и f_2 эквивалентны.

37.30. Пусть f — билинейная (полуторалинейная) функция на пространстве V и для любых $x, y \in V$ из равенства $f(x, y) = 0$ вытекает $f(y, x) = 0$. Доказать, что:

а) если f — билинейная функция, то f — симметричная или кососимметричная функция;

б) если f — полуторалинейная функция, то f — либо эрмитова, либо косоэрмитова функция.

37.31. Пусть f_1, f_2 — билинейные (полуторалинейные) функции на пространстве V с базисом $(e_1, \ldots, e_n)$. На пространстве W с базисом $(a_{11}, a_{12}, \ldots, a_{1n}, a_{21}, \ldots, a_{2n}, \ldots, a_{n1}, \ldots, a_{nn})$ определим билинейную функцию f, положив

$$f(a_{ij}, a_{kl}) = f_1(e_i, e_k) f_2(e_j, e_l).$$

а) Найти матрицу функции f в заданном базисе.

б) Доказать, что если пространство V является прямой суммой вполне изотропных подпространств относительно f_1, то W является прямой суммой вполне изотропных подпространств относительно f.

37.32. Не производя вычислений, выяснить, эквивалентны ли билинейные функции:

а) $f_1(x, y) = 2x_1y_2 - 3x_1y_3 + x_2y_3 - 2x_2y_1 - x_3y_2 + 3x_3y_1$,
$f_2(x, y) = x_1y_2 - x_2y_1 + 2x_2y_2 + 3x_1y_3 - 3x_3y_1$;

б) $f_1(x, y) = x_1y_1 + ix_1y_2$,
$f_2(x, y) = 2x_1y_1 + (1 + i)x_1y_2 + (1 - i)x_2y_1 - ix_2y_2$.

37.33. Привести к каноническому виду кососимметрические билинейные функции:

а) $x_1y_2 - x_1y_3 - x_2y_1 + 2x_2y_3 + x_3y_1 - 2x_3y_2$;

б) $2x_1y_2 + x_1y_3 - 2x_2y_1 + 3x_2y_3 - x_3y_1 - 3x_3y_2$;

в) $x_1y_2 + x_4y_3 - x_2y_1 + 2x_2y_3 - 2x_3y_2 + 3x_3y_4 - x_1y_4 - 3x_4y_3$;

г) $x_1y_2 + x_1y_3 + x_1y_4 - x_2y_1 - x_2y_3 + x_3y_2 + x_3y_4 - x_4y_1 - x_4y_3$.

37.34. Привести к каноническому виду косоэрмитову функцию в комплексном пространстве:

а) $x_1\overline{y}_2 - ix_1\overline{y}_3 - ix_2\overline{y}_3 - \overline{x}_1y_2 + i\overline{x}_1y_3 + i\overline{x}_2y_3 + ix_1\overline{y}_1 - i\overline{x}_1y_1$;

б) $(1 + i)x_1\overline{y}_2 + 2x_1\overline{y}_3 + ix_1\overline{y}_4 - (1 - i)x_2\overline{y}_3 - (1 - i)\overline{x}_1y_3 +$
$+ i\overline{x}_1y_4 + (1 + i)\overline{x}_2y_3 + 2ix_2\overline{y}_2 - 2\overline{x}_1y_3$.

37.35. Доказать, что функция $h(f, g) = \int_0^1 fg'\,dx$ на пространстве многочленов степени $\leqslant 5$, обращающихся в нуль в точках 0 и 1, является кососимметрической, и найти для нее канонический базис.

37.36. Доказать, что определитель целочисленной кососимметрической матрицы является квадратом целого числа.

37.37. Пусть f — кососимметрическая билинейная функция на пространстве V, W — подпространство в V, $W^\perp$ — его ортогональное дополнение относительно f. Доказать, что $\dim W - \dim(W \cap W^\perp)$ — чётное число.

37.38. Доказать, что для любой косоэрмитовой комплексной матрицы A существует такая невырожденная матрица C, что $CA^t\overline{C}$ — диагональная матрица, причём по главной диагонали стоят чисто мнимые комплексные числа.

37.39. Пусть f — кососимметрическая билинейная функция на пространстве V, V' — её ядро, W — максимальное вполне изотропное подпространство. Доказать равенство

$$\dim W = \frac{\dim V + \dim V'}{2}.$$

37.40. Пусть f — невырожденная кососимметрическая билинейная функция на n-мерном пространстве V, $G = (g_{ij})$ — кососимметрическая матрица порядка n. Доказать, что существуют векторы $v_1, \ldots, v_n \in V$ такие, что $g_{ij} = f(v_i, v_j)$.

37.41. Пусть $f(x, y)$ — эрмитова функция в комплексном пространстве, $q(x) = f(x, x)$. Доказать равенство

$$4f(x, y) = q(x + y) - q(x - y) + iq(x + iy) - iq(x - iy).$$

37.42. Доказать, что вещественная и мнимая части эрмитовой функции на комплексном векторном пространстве V являются соответственно симметрической и кососимметрической функциями на V, рассматриваемом как $2n$-мерное вещественное векторное пространство.

37.43. Доказать, что если f — положительно определенная эрмитова форма на комплексном пространстве, то

$$f(x, y)\overline{f(x, y)} \leqslant f(x, x) \cdot f(y, y).$$

37.44. Пусть $\mathcal{A}$ — линейный оператор, f — положительно определённая эрмитова функция на комплексном векторном пространстве V. Доказать, что если $f(\mathcal{A}(x), x) = 0$ для любого $x \in V$, то $\mathcal{A}$ — нулевой оператор.

Верно ли это утверждение для симметрических билинейных функций на вещественном пространстве V?

37.45. Для каких значений n невырожденная билинейная функция на n-мерном векторном пространстве может обладать:

а) вполне изотропным подпространством размерности $n - 1$;

б) вполне изотропным подпространством размерности $n - 2$?

Вывести формулу для максимально возможной размерности вполне изотропного подпространства.

37.46. Пусть $A = (a_{ij}) \in \mathbf{M}_n(\mathbb{R})$ — симметрическая матрица и

$$L(f) = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}$$

— дифференциальный оператор в $\mathbb{R}[x_1, \ldots, x_n]$.

Доказать, что:

а) если

$$C \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}, \qquad C \in \mathbf{GL}_n(\mathbb{R}),$$

— замена переменных, то

$$L(f) = \sum_{i,j=1}^{n} b_{ij} \frac{\partial^2 f}{\partial y_i \partial y_j},$$

где $(b_{ij}) = CA^tC$;

б) существует такая невырожденная линейная замена переменных в $\mathbb{R}[x_1, \ldots, x_n]$, что относительно новых переменных $y_1, \ldots, y_k$

$$L(f) = \frac{\partial^2 f}{\partial y_1^2} + \ldots + \frac{\partial^2 f}{\partial y_k^2} - \frac{\partial^2 f}{\partial y_{k+1}^2} - \ldots - \frac{\partial^2 f}{\partial y_s^2},$$

где $0 \leqslant k \leqslant s \leqslant n$.

§ 38. Симметрические билинейные, эрмитовы и квадратичные функции

В этом параграфе эрмитовы функции рассматриваются в комплексных пространствах.

38.1. Какие из билинейных функций задачи 37.1 являются симметрическими?

38.2. а) Какие из полуторалинейных функций задачи 37.5 являются эрмитовыми?

б) Является ли функция $f(x, y)$ из 37.18, б) эрмитовой?

в) Является ли функция $f(u, v)$ из 37.20, б) эрмитовой?

38.3. Не производя вычислений, выяснить, эквивалентны ли билинейные функции

$$f_1(x,y) = x_1y_1 + 2x_1y_2 + 3x_1y_3 + 4x_2y_1 + 5x_2y_2 + 6x_2y_3 + 7x_3y_1 + 8x_3y_2 + 10x_3y_3,$$
$$f_2(x,y) = 2x_1y_1 - x_1y_3 + x_2y_2 - x_3y_1 + 5x_3y_3.$$

38.4. Не производя вычислений, выяснить, для какой из билинейных функций f существует базис, в котором матрица этой функции диагональна:

а) $-x_1y_1 - 2x_1y_2 - 2x_2y_1 - 3x_2y_2 + x_3y_1 - 4x_3y_3$;

б) $-x_1y_2 - x_2y_1 + 3x_2y_2 + 5x_2y_3 + 5x_3y_2 - x_3y_3$.

38.5. Доказать, что для ортогональных дополнений к пространствам относительно невырожденной симметричной (эрмитовой) функции справедливы равенства:

а) $(U^{\perp})^{\perp} = U$;

б) $(U_1 + U_2)^{\perp} = U_1^{\perp} \cap U_2^{\perp}$;

в) $(U_1 \cap U_2)^{\perp} = U_1^{\perp} + U_2^{\perp}$.

38.6. Найти ортогональное дополнение к линейной оболочке $\langle f_1, f_2 \rangle$ относительно билинейной функции с матрицей F, если:

а) $F = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -1 & 0 & -3 \\ 2 & -3 & 7 \end{pmatrix}$, $\quad f_1 = (1,2,3), \quad f_2 = (4,5,6)$;

б) $F = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 5 \\ 2 & 2 & 8 \\ 5 & 8 & 29 \end{pmatrix}$, $\quad f_1 = (-3,-15,21); \quad f_2 = (2,10,-14)$.

38.7. Найти ортогональное дополнение к линейной оболочке $\langle e_1, e_2 \rangle$ относительно эрмитовой функции с матрицей G, если:

а) $G = \begin{pmatrix} 1 & i & 1-i \\ -i & 0 & -2 \\ 1+i & -2 & -2 \end{pmatrix}$, $\quad \begin{array}{l} e_1 = (i, 1, -1), \\ e_2 = (1-2i, -i, 3); \end{array}$

б) $G = \begin{pmatrix} 0 & -2+i & -i \\ -2-i & 2 & -1+i \\ i & -1-i & -1 \end{pmatrix}$, $\quad \begin{array}{l} e_1 = (-i+1, 2, 0), \\ e_2 = (-1+3i, -3i, 2). \end{array}$

38.8. Методом Якоби найти канонический вид симметрических билинейных функций:

а) $2x_1y_1 - x_1y_2 + x_1y_3 - x_2y_1 + x_3y_1 + 3x_3y_3$;

б) $2x_1y_2 + 3x_1y_3 + 2x_2y_1 - x_2y_3 + 3x_3y_1 - x_3y_2 + x_3y_3$.

38.9. Методом Якоби выяснить эквивалентность билинейных функций с матрицами

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 0 & -1 \\ 3 & -1 & 3 \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 3 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 5 \end{pmatrix}:$$

а) над полем вещественных чисел;

б) над полем рациональных чисел.

38.10. Какие из симметрических билинейных функций задач 37.1 и 37.5 являются положительно определёнными?

38.11. При каких значениях λ следующие квадратичные функции являются положительно определёнными:

а) $5x_1^2 + x_2^2 + \lambda x_3^2 + 4x_1x_2 - 2x_1x_3 - 2x_2x_3$;

б) $2x_1^2 + x_2^2 + 3x_3^2 + 2\lambda x_1x_2 + 2x_1x_3$;

в) $x_1^2 + x_2^2 + 5x_3^2 + 2\lambda x_1x_2 - 2x_1x_3 + 4x_2x_3$;

г) $x_1^2 + 4x_2^2 + x_3^2 + 2\lambda x_1x_2 + 10x_1x_3 + 6x_2x_3$;

д) $x_1\overline{x}_1 + ix_1\overline{x}_2 - ix_2\overline{x}_1 + \lambda x_2\overline{x}_2$;

е) $2x_1\overline{x}_1 - (1-i)x_1\overline{x}_3 - (1+i)\overline{x}_1x_3 + 2\lambda x_2\overline{x}_3 + 2\overline{\lambda}\overline{x}_2x_3 + x_2\overline{x}_2 + 5x_3\overline{x}_3$?

38.12. Доказать, что для любой положительно определённой симметрической билинейной (эрмитовой) функции f выполнено неравенство

$$\sqrt{f(x+y, x+y)} \leqslant \sqrt{f(x,x)} + \sqrt{f(y,y)},$$

причём равенство имеет место тогда и только тогда, когда $\alpha x = \beta y$, где α, β — неотрицательные вещественные числа, не равные нулю одновременно.

38.13. Не применяя критерия Сильвестра, доказать, что для положительной определенности квадратичной функции $\sum\limits_{i,j=1}^{n} a_{ij}x_i\overline{x}_j$ условие $a_{ii} > 0$ $(i = 1, \ldots, n)$ является необходимым, но не достаточным.

38.14. При каких значениях λ являются отрицательно определёнными квадратичные функции:

а) $-x_1^2 + \lambda x_2^2 - x_3^2 + 4x_1x_2 + 8x_2x_3$;

б) $\lambda x_1^2 - 2x_2^2 - 3x_3^2 + 2x_1x_2 - 2x_1x_3 + 2x_2x_3$;

в) $\lambda x_1\overline{x}_1 + 3x_2\overline{x}_2 - ix_1\overline{x}_2 + i\overline{x}_1x_2$;

г) $4x_1\overline{x}_1 - 2x_2\overline{x}_2 - (\lambda + i)x_1\overline{x}_2 - (\overline{\lambda} - i)\overline{x}_1x_2$?

38.15. Найти симметрическую билинейную (эрмитову) функцию, ассоциированную с квадратичной функцией:

а) $x_1^2 + 2x_1x_2 + 2x_2^2 - 6x_1x_3 + 4x_2x_3 - x_3^2$;

б) $x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3$;

в) $x_1\overline{x}_1 + ix_1\overline{x}_2 - i\overline{x}_1x_2 + 2x_2\overline{x}_2$;

г) $(5 - i)x_1\overline{x}_2 + (6 + i)\overline{x}_1x_2 + x_2\overline{x}_2$.

38.16. Найти симметрическую билинейную функцию, ассоциированную с квадратичной функцией $q(x) = f(x, x)$, где:

а) $f(x, y) = 2x_1y_1 - 3x_1y_2 - 4x_1y_3 + x_2y_1 - 5x_2y_3 + x_3y_3$;

б) $f(x, y) = -x_1y_2 + x_2y_1 - 2x_2y_2 + 3x_2y_3 - x_3y_1 + 2x_3y_3$.

38.17. Эквивалентны ли над полем вещественных чисел квадратичные функции:

а) $x_1^2 - 2x_1x_2 + 2x_3^2 + 4x_2x_3 + 5x_3^2$ и $x_1^2 - 4x_1x_2 + 2x_1x_3 + 4x_2^2 + x_3^2$;

б) $2x_1^2 + 9x_2^2 + 3x_3^2 + 8x_1x_2 - 4x_1x_3 - 10x_2x_3$ и $2x_1^2 + 3x_2^2 + 6x_3^2 - 4x_1x_2 - 4x_1x_3 + 8x_2x_3$?

38.18. Найти нормальный вид квадратичных функций:

а) $x_1^2 + x_2^2 + 3x_3^2 + 4x_1x_2 + 2x_1x_3 + 2x_2x_3$;

б) $x_1^2 + 2x_2^2 + x_3^2 + 2x_1x_2 + 4x_1x_3 + 2x_2x_3$;

в) $x_1^2 - 3x_3^2 - 2x_1x_2 + 2x_1x_3 - 6x_2x_3$;

г) $x_1x_2 + x_1x_3 + x_1x_4 + x_2x_3 + x_2x_4 + x_3x_4$;

д) $x_1\overline{x}_1 - ix_1\overline{x}_2 + i\overline{x}_1x_2 + 2x_2\overline{x}_2$;

е) $(1-i)x_1\overline{x}_2 + (1+i)\overline{x}_1x_2 + (1-2i)x_1\overline{x}_3 + (1+2i)\overline{x}_1x_3 + x_2\overline{x}_3 + \overline{x}_2x_3$;

ж) $\sum\limits_{i,j=1}^{n} a_ia_jx_ix_j$, где не все числа $a_1, \ldots, a_n$ равны 0;

з) $\sum\limits_{i=1}^{n} x_i^2 + \sum\limits_{1 \leqslant i < j \leqslant n} x_ix_j$;

и) $\sum\limits_{1 \leqslant i < j \leqslant n} x_ix_j$;

к) $\sum\limits_{i=1}^{n-1} x_ix_{i+1}$;

л) $\sum\limits_{i=1}^{n} (x_i - s)^2, \quad s = \dfrac{x_1 + \ldots + x_n}{n}$;

м) $\sum\limits_{1\leqslant i<j\leqslant n} |i-j|x_i x_j$.

38.19. Эквивалентны ли над полем комплексных чисел квадратичные функции:

а) $x_1^2 - 2x_1x_2 + 2x_1x_3 - 2x_1x_4 + x_2^2 + 2x_2x_3 - 4x_2x_4 + x_3^2 - 2x_4^2$ и $x_1^2 + x_1x_2 + x_3x_4$;

б) $x_1^2 + 4x_2^2 + x_3^2 + 4x_1x_2 - 2x_1x_3$ и $x_1^2 + 2x_2^2 - x_3^2 + 4x_1x_2 - 2x_1x_3 - 4x_2x_3$?

38.20. Пусть q — отображение вещественного векторного пространства V в поле $\mathbb{R}$, для которого существуют такие квадратичные функции a, b и билинейная функция c, что

$$q(\lambda x + \mu y) = \lambda^2 a(x) + \lambda\mu c(x,y) + \mu^2 b(y)$$

для любых $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ и $x, y \in V$. Доказать, что q — квадратичная функция.

38.21. Пусть $f_1, \ldots, f_{r+s}$ — линейные функции. Доказать, что положительный индекс инерции функции

$$q(x) = |f_1(x)|^2 + \ldots + |f_r(x)|^2 - |f_{r+1}(x)|^2 - \ldots - |f_{r+s}(x)|^2$$

не превосходит r, а отрицательный индекс не превосходит s.

38.22. Найти положительный и отрицательный индексы инерции:

а) квадратичной функции $q(x) = \operatorname{tr} x^2$ на пространстве $\mathbf{M}_n(\mathbb{R})$;

б) квадратичной функции $q(x) = \operatorname{tr}(x\overline{x})$ на пространстве $\mathbf{M}_n(\mathbb{C})$.

38.23. Пусть f — невырожденная симметрическая билинейная (эрмитова) функция на пространстве V размерности $\geqslant 3$. Доказать, что если функция f не является нулевой на двумерном подпространстве U, то существует такое трехмерное подпространство $W \supseteq U$, на котором ограничение функции f невырождено.

38.24. Пусть f — невырожденная симметрическая билинейная (эрмитова) функция, имеющая отрицательный индекс инерции, равный 1, и $f(v,v) < 0$ для некоторого вектора v. Доказать, что ограничение f на любое подпространство, содержащее v, невырождено.

38.25. Пусть f — невырожденная симметрическая билинейная (эрмитова) функция на пространстве размерности $\geqslant 3$. Доказать, что всякий изотропный вектор лежит в пересечении двух двумерных подпространств, на каждом из которых ограничение функции f невырождено.

38.26. Доказать, что размерность максимального изотропного подпространства относительно невырожденной симметрической билинейной (эрмитовой) функции равна наименьшему из её положительного и отрицательного индексов инерции.

38.27. Найти положительный и отрицательный индексы инерции невырожденной квадратичной функции на $2n$-мерном векторном пространстве, обладающем n-мерным вполне изотропным подпространством.

38.28. Пусть невырожденная квадратичная функция q на $2n$-мерном пространстве V является нулевой на n-мерном подпространстве U. Доказать, что:

а) существует такое n-мерное подпространство U', что

$$V = U \oplus U', \quad q(U') = 0;$$

б) в некотором базисе функция q имеет вид

$$x_1x_2 + x_3x_4 + \ldots + x_{2n-1}x_{2n}.$$

38.29. Доказать, что если в симметрической матрице некоторый главный минор порядка r отличен от нуля, а все окаймляющие его главные миноры порядков $r+1$ и $r+2$ равны нулю, то ранг этой матрицы равен r.

38.30. Доказать, что вещественная симметрическая (комплексная эрмитова) матрица A может быть представлена в виде $A = {}^tC \cdot C$ (соответственно $A = {}^tC \cdot \overline{C}$), где C — квадратная матрица, тогда и только тогда, когда все главные миноры матрицы A неотрицательны.

38.31. Найти размерность пространства симметрических билинейных функций от n переменных.

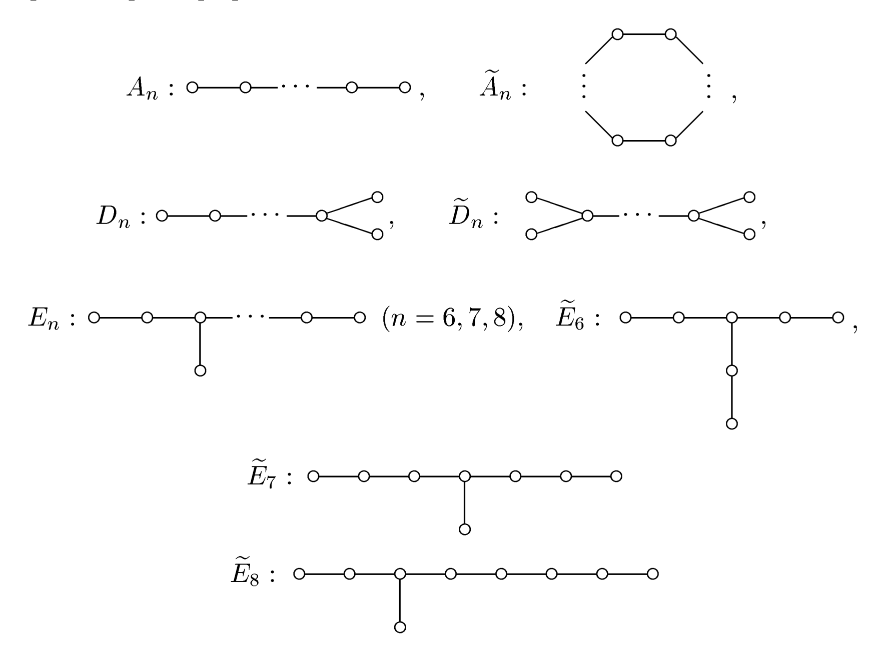
38.32. Сопоставим каждому (неориентированному) графу Γ с вершинами $v_1, \ldots, v_n$ квадратичную функцию

$$q_\Gamma(x) = \sum\nolimits_{i,j=1}^{n} a_{ij}x_ix_j,$$

положив

$$a_{ij} = \begin{cases} 2, & \text{если} \quad i = j, \\ -1, & \text{если} \quad v_i \text{ и } v_j \text{ соединены ребром}, \\ 0, & \text{если} \quad v_i \text{ и } v_j \text{ не соединены ребром}, \end{cases}$$

и рассмотрим графы



(число вершин графа Γ_n равно n, графа $\widetilde{\Gamma}_n$ равно $n+1$).

Доказать, для графов Γ_n функция q_Γ положительно определена, а для графов $\widetilde{\Gamma}_n$ положительно полуопределена: $q_\Gamma(x) \geqslant 0$ для любого x.

38.33. Пусть q — невырожденная квадратичная функция на пространстве V над произвольным полем F. Доказать, что если существует ненулевой вектор $x \in V$, для которого $q(x) = 0$, то отображение $q : V \to F$ сюръективно.

38.34. Пусть $f(x, y)$ — эрмитова неотрицательно определённая функция, причём $f(z, z) = 0$ для некоторого $z \neq 0$. Доказать, что $f(z, t) = 0$ для всех t.

38.35. Пусть $f(x, y)$ — положительно определённая эрмитова функция, причём $f(x, x) = f(y, y) = 1$ для некоторого $x, y \neq 0$. Доказать, что $|f(x, y)| \leqslant 1$.

Глава IX

ЛИНЕЙНЫЕ ОПЕРАТОРЫ

§ 39. Определение линейного оператора. Образ, ядро, матрица линейного оператора

39.1. Какие из следующих отображений в соответствующих векторных пространствах являются линейными операторами:

а) $x \mapsto a$ (a — фиксированный вектор);

б) $x \mapsto x + a$ (a — фиксированный вектор);

в) $x \mapsto \alpha x$ (α — фиксированный скаляр);

г) $x \mapsto (x, a)b$ (V — евклидово пространство, a, b — фиксированные векторы);

д) $x \mapsto (a, x)x$ (V — евклидово пространство, a — фиксированный вектор);

е) $f(x) \mapsto f(ax + b)$ ($f \in \mathbb{R}[x]_n$; a, b — фиксированные числа);

ж) $f(x) \mapsto f(x + 1) - f(x)$ ($f \in \mathbb{R}[x]_n$);

з) $f(x) \mapsto f^{(k)}(x)$ ($f \in \mathbb{R}[x]_n$);

и) $(x_1, x_2, x_3) \mapsto (x_1 + 2, x_2 + 5, x_3)$;

к) $(x_1, x_2, x_3) \mapsto (x_1 + 3x_3, x_2^3, x_1 + x_3)$;

л) $(x_1, x_2, x_3) \mapsto (x_1, x_2, x_1 + x_2 + x_3)$?

39.2. Доказать, что всякий линейный оператор любую линейно зависимую систему векторов переводит в линейно зависимую систему.

39.3. Доказать, что в n-мерном пространстве для любой линейно независимой системы векторов $a_1, \ldots, a_n$ и произвольной системы векторов $b_1, \ldots, b_n$ найдется единственный линейный оператор, переводящий a_i в b_i ($i = 1, \ldots, n$).

39.4. Доказать, что в одномерном векторном пространстве всякий линейный оператор имеет вид $x \mapsto \alpha x$, где α — некоторый скаляр.

39.5. Найти образы и ядра линейных операторов из задачи 39.1.

39.6. Доказать, что оператор дифференцирования:

а) является вырожденным в пространстве многочленов степени $\leqslant n$;

б) является невырожденным в пространстве функций с базисом $(\cos t, \sin t)$.

39.7. Доказать, что всякое подпространство векторного пространства является:

а) ядром некоторого линейного оператора;

б) образом некоторого линейного оператора.

39.8. Доказать, что если два линейных оператора ранга 1 имеют равные ядра и равные образы, то они перестановочны.

39.9. Пусть $\mathcal{A}$ — F-линейный оператор на подпространстве L пространства V, отличном от V. Доказать, что существует бесконечно много линейных операторов на V, ограничение которых на подпространство L совпадает с $\mathcal{A}$, при условии, что поле F бесконечно.

39.10. Пусть $\mathcal{A}$ — линейный оператор в пространстве V, L — подпространство V. Доказать, что:

а) образ $\mathcal{A}(L)$ и полный прообраз $\mathcal{A}^{-1}(L)$ являются подпространствами в V;

б) если оператор $\mathcal{A}$ — невырожденный и V конечномерно, то

$$\dim \mathcal{A}(L) = \dim \mathcal{A}^{-1}(L) = \dim L.$$

39.11. Пусть $\mathcal{A}$ — линейный оператор в пространстве V, L — подпространство V и $L \cap \operatorname{Ker} \mathcal{A} = 0$. Доказать, что любая линейно независимая система векторов из L оператором $\mathcal{A}$ переводится в линейно независимую систему.

39.12. Доказать для линейных операторов $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$, $\mathcal{C}$ неравенство Фробениуса

$$\operatorname{rk}(\mathcal{B}\mathcal{A}) + \operatorname{rk}(\mathcal{A}\mathcal{C}) \leqslant \operatorname{rk} \mathcal{A} + \operatorname{rk}(\mathcal{B}\mathcal{A}\mathcal{C}).$$

39.13. Линейный оператор $\mathcal{A}$ называется *псевдоотражением*, если $\operatorname{rk}(\mathcal{A} - \mathcal{E}) = 1$.

Доказать, что в n-мерном пространстве всякий линейный оператор является произведением не более чем n псевдоотражений.

39.14. Доказать, что для линейного оператора $\mathcal{A}$ в n-мерном пространстве множество операторов $\mathcal{X}$ таких, что $\mathcal{A}\mathcal{X} = 0$, является векторным пространством, и найти его размерность.

39.15. Найти матрицу оператора:

а) $(x_1, x_2, x_3) \mapsto (x_1, x_1 + 2x_2, x_2 + 3x_3)$ в пространстве $\mathbb{R}^3$ в базисе из единичных векторов;

б) поворота плоскости на угол α в произвольном ортонормированном базисе;

в) поворота трехмерного пространства на угол $2\pi/3$ вокруг прямой, заданной в прямоугольной системе координат уравнениями $x_1 = x_2 = x_3$, в базисе из единичных векторов осей координат;

г) проектирования трехмерного пространства на координатную ось вектора e_2 параллельно координатной плоскости векторов e_1 и e_3 в базисе (e_1, e_2, e_3);

д) $x \mapsto (x, a)a$ в евклидовом пространстве в ортонормированном базисе (e_1, e_2, e_3) при $a = e_1 - 2e_3$ в указанном базисе;

е) $X \mapsto \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} X$ в пространстве $\mathbf{M}_2(\mathbb{R})$ в базисе из матричных единиц;

ж) $X \mapsto X \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ в пространстве $\mathbf{M}_2(\mathbb{R})$ в базисе из матричных единиц;

з) $X \mapsto {}^tX$ в пространстве $\mathbf{M}_2(\mathbb{R})$ в базисе из матричных единиц;

и) $X \mapsto AXB$ (A, B — фиксированные матрицы) в пространстве $\mathbf{M}_2(\mathbb{R})$ в базисе, состоящем из матричных единиц;

к) $X \mapsto AX + XB$ (A, B — фиксированные матрицы в пространстве $\mathbf{M}_2(\mathbb{R})$ в базисе из матричных единиц;

л) дифференцирования в пространстве $\mathbb{R}[x]_n$ в базисе $(1, x, \ldots \ldots, x^n)$;

м) дифференцирования в пространстве $\mathbb{R}[x]_n$ в базисе $(x^n, x^{n-1}, \ldots, 1)$;

н) дифференцирования в пространстве $\mathbb{R}[x]_n$ в базисе

$$\left(1, x - 1, \frac{(x-1)^2}{2}, \ldots, \frac{(x-1)^n}{n!}\right).$$

39.16. Доказать, что в пространстве $\mathbb{R}^3$ существует единственный линейный оператор, переводящий векторы $(1, 1, 1)$, $(0, 1, 0)$, $(1, 0, 2)$ соответственно в векторы $(1, 1, 1)$, $(0, 1, 0)$, $(1, 0, 1)$, и найти

матрицу этого оператора в базисе, состоящем из единичных векторов.

39.17. Пусть векторное пространство V является прямой суммой подпространств L_1 и L_2 с базисами $(a_1, \ldots, a_k)$ и $(a_{k+1}, \ldots, a_n)$. Доказать, что проектирование на L_1 параллельно L_2 является линейным оператором, и найти его матрицу в базисе $(a_1, \ldots, a_n)$.

39.18. Найти общий вид матриц линейных операторов в n-мерном пространстве, переводящих заданные линейно независимые векторы $a_1, \ldots, a_k$ $(k < n)$ в заданные векторы $b_1, \ldots, b_k$ в базисе вида $(a_1, \ldots, a_k, a_{k+1}, \ldots, a_n)$.

39.19. Пусть линейный оператор в пространстве V в базисе $(e_1, \ldots, e_4)$ имеет матрицу

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ 5 & 4 & 0 & -1 \\ 3 & 2 & 0 & 3 \\ 6 & 1 & -1 & 7 \end{pmatrix}.$$

Найти матрицу этого оператора в базисах:

а) (e_2, e_1, e_3, e_4);

б) $(e_1,\ e_1 + e_2,\ e_1 + e_2 + e_3,\ e_1 + e_2 + e_3 + e_4)$.

39.20. Пусть линейный оператор в пространстве $\mathbb{R}[x]_2$ имеет в базисе $(1, x, x^2)$ матрицу

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Найти его матрицу в базисе

$$(3x^2 + 2x + 1,\ x^2 + 3x + 2,\ 2x^2 + x + 3).$$

39.21. Пусть линейный оператор в пространстве $\mathbb{R}^3$ имеет в базисе

$$((8, -6, 7),\ (-16, 7, -13),\ (9, -3, 7))$$

матрицу

$$\begin{pmatrix} 1 & -18 & 15 \\ -1 & -22 & 20 \\ 1 & -25 & 22 \end{pmatrix}.$$

Найти его матрицу в базисе

$$((1, -2, 1),\ (3, -1, 2),\ (2, 1, 2)).$$

39.22. Пусть линейный оператор $\mathcal{A}$ в n-мерном векторном пространстве V переводит линейно независимые векторы $a_1, \ldots, a_n$ в векторы $b_1, \ldots, b_n$ соответственно. Доказать, что матрица этого оператора в некотором базисе $\mathbf{e} = (e_1, \ldots, e_n)$ равна BA^{-1}, где столбцы матриц A и B состоят соответственно из координат заданных векторов в базисе $\mathbf{e}$.

39.23. Найти общий вид матрицы линейного оператора $\mathcal{A}$ в базисе, первые k векторов которого составляют:

а) базис ядра оператора $\mathcal{A}$;

б) базис образа оператора $\mathcal{A}$.

39.24. Доказать, что если $f(t) = f_1(t)f_2(t)$ — разложение многочлена $f(t)$ на взаимно простые множители и для линейного оператора $\mathcal{A}$ выполняется равенство $f(\mathcal{A}) = 0$, то в некотором базисе матрица оператора $\mathcal{A}$ имеет вид $\begin{pmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & A_2 \end{pmatrix}$, где $f_1(A_1) = 0$, $f_2(A_2) = 0$.

§ 40. Собственные векторы, инвариантные подпространства, корневые подпространства

40.1. Найти собственные векторы и собственные значения:

а) оператора дифференцирования в пространстве $\mathbb{R}[x]_n$;

б) оператора $X \mapsto {}^tX$ в пространстве $\mathbf{M}_n(\mathbb{R})$;

в) оператора $x\dfrac{d}{dx}$ в пространстве $\mathbb{R}[x]_n$;

г) оператора $\dfrac{1}{x}\displaystyle\int_0^x f(t)\,dt$ в пространстве $\mathbb{R}[x]_n$;

д) оператора $f \mapsto \dfrac{d^n f}{dx^n}$ в линейной оболочке

$$\langle 1, \cos x, \sin x, \ldots, \cos mx, \sin mx\rangle;$$

е) оператора $f \to \displaystyle\int_{-x}^{x} f(t)dt$ в линейной оболочке

$$\langle \cos x, \sin x, \ldots, \cos mx, \sin mx\rangle.$$

40.2. Доказать, что в пространстве $\mathbb{R}[x]_n$ линейный оператор $f \mapsto f(ax+b)$ имеет множество собственных значений $1, a, \ldots, a^n$.

40.3. Доказать, что собственный вектор линейного оператора $\mathcal{A}$ с собственным значением λ является собственным вектором оператора $f(\mathcal{A})$, где $f(t)$ — многочлен с собственным значением $f(\lambda)$.

40.4. Доказать, что если оператор $\mathcal{A}$ невырожденный, то операторы $\mathcal{A}$ и $\mathcal{A}^{-1}$ имеют одни и те же собственные векторы.

40.5. Доказать, что все ненулевые векторы пространства являются собственными для линейного оператора $\mathcal{A}$ тогда и только тогда, когда $\mathcal{A}$ — оператор подобия $x \mapsto \alpha x$, где α — некоторый фиксированный скаляр.

40.6. Доказать, что если линейный оператор $\mathcal{A}$ в n-мерном пространстве имеет n различных собственных значений, то любой линейный оператор, перестановочный с $\mathcal{A}$, имеет базис, состоящий из его собственных векторов.

40.7. Доказать, что подпространство $V_\lambda(\mathcal{A})$, состоящее из всех собственных векторов оператора $\mathcal{A}$ с собственным значением λ и нулевого вектора, инвариантно относительно любого линейного оператора $\mathcal{B}$, перестановочного с $\mathcal{A}$.

40.8. Доказать, что для любой (быть может, бесконечной) совокупности перестановочных линейных операторов конечномерного комплексного пространства:

а) существует общий собственный вектор;

б) существует базис, в котором матрицы всех этих операторов верхние треугольные.

40.9. Доказать, что если оператор $\mathcal{A}^2$ имеет собственное значение λ^2, то одно из чисел λ и $-\lambda$ является собственным значением оператора $\mathcal{A}$.

40.10. Доказать, что:

а) коэффициенты $c_1, \ldots, c_n$ многочлена

$$|A - \lambda E| = (-\lambda)^n + c_1(-\lambda)^{n-1} + \ldots + c_n$$

являются суммами главных миноров соответствующего порядка матрицы A;

б) сумма и произведение характеристических чисел матрицы A равны её следу и определителю соответственно.

40.11. Доказать, что всякий многочлен степени n со старшим коэффициентом $(-1)^n$ является характеристическим многочленом некоторой матрицы порядка n.

40.12. Доказать, что если A и B — квадратные матрицы одинаковых порядков, то матрицы AB и BA имеют совпадающие характеристические многочлены.

40.13. Найти характеристические числа матрицы ${}^tA \cdot A$, где A — матрица-строка $(a_1, \ldots, a_n)$.

40.14. Доказать, что все характеристические числа матрицы отличны от нуля тогда и только тогда, когда матрица невырожденная.

40.15. Найти собственные значения и собственные векторы линейных операторов, заданных в некотором базисе матрицами:

а) $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 5 & -3 & 3 \\ -1 & 0 & -2 \end{pmatrix}$; б) $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -4 & 4 & 0 \\ -2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$;

в) $\begin{pmatrix} 4 & -5 & 2 \\ 5 & -7 & 3 \\ 6 & -9 & 4 \end{pmatrix}$; г) $\begin{pmatrix} 7 & -12 & 6 \\ 10 & -19 & 10 \\ 12 & -24 & 13 \end{pmatrix}$;

д) $\begin{pmatrix} 4 & -5 & 7 \\ 1 & -4 & 9 \\ -4 & 0 & 5 \end{pmatrix}$; е) $\begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 5 & -3 \\ 4 & -1 & 3 & -1 \end{pmatrix}$.

40.16. Выяснить, какие из следующих матриц можно привести к диагональному виду путём перехода к новому базису над полем $\mathbb{R}$ или над полем $\mathbb{C}$:

а) $\begin{pmatrix} -1 & 3 & -1 \\ -3 & 5 & -1 \\ -3 & 3 & 1 \end{pmatrix}$; б) $\begin{pmatrix} 4 & 7 & -5 \\ -4 & 5 & 0 \\ 1 & 9 & -4 \end{pmatrix}$;

в) $\begin{pmatrix} 4 & 2 & -5 \\ 6 & 4 & -9 \\ 5 & 3 & -7 \end{pmatrix}$; г) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$.

Найти этот базис и соответствующий вид матрицы.

40.17. При каких условиях матрица, у которой все элементы, кроме, быть может, элементов $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ побочной диагонали, равны нулю, подобна диагональной матрице?

40.18. Для матрицы A порядка n, у которой элементы побочной диагонали равны 1, а остальные элементы равны нулю, найти такую матрицу T, что матрица $B = T^{-1}AT$ диагональна. Вычислить матрицу B.

40.19. Доказать, что число линейно независимых собственных векторов линейного оператора $\mathcal{A}$ с собственным значением λ не больше кратности λ как корня характеристического многочлена оператора $\mathcal{A}$.

40.20. Пусть $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ — собственные значения линейного оператора $\mathcal{A}$ в n-мерном комплексном пространстве. Найти собственные значения оператора $\mathcal{A}$ как оператора в соответствующем $2n$-мерном вещественном пространстве.

40.21. Пусть $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ — корни характеристического многочлена матрицы A. Найти собственные значения:

а) линейного оператора $X \mapsto AX^tA$ в пространстве $\mathbf{M}_n(\mathbb{R})$;

б) линейного оператора $X \mapsto AXA^{-1}$ в пространстве $\mathbf{M}_n(\mathbb{R})$ (матрица A невырожденная).

40.22. Найти все инвариантные подпространства для оператора дифференцирования в пространстве $\mathbb{R}[x]_n$.

40.23. Доказать, что линейная оболочка любой системы собственных векторов линейного оператора $\mathcal{A}$ инвариантна относительно $\mathcal{A}$.

40.24. Доказать, что:

а) ядро и образ линейного оператора $\mathcal{A}$ инвариантны относительно $\mathcal{A}$;

б) всякое подпространство, содержащее образ оператора $\mathcal{A}$, инвариантно относительно $\mathcal{A}$;

в) если подпространство L инвариантно относительно $\mathcal{A}$, то его образ и полный прообраз инвариантны относительно $\mathcal{A}$;

г) если линейный оператор $\mathcal{A}$ невырожденный, то всякое подпространство, инвариантное относительно $\mathcal{A}$, инвариантно относительно $\mathcal{A}^{-1}$.

40.25. Доказать, что в n-мерном комплексном пространстве всякий линейный оператор имеет инвариантное подпространство размерности $n-1$.

40.26. Доказать, что линейный оператор в векторном пространстве над полем K, имеющий в некотором базисе матрицу

$$\begin{pmatrix} a_1 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ a_2 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n-1} & 0 & 0 & \dots & 1 \\ a_n & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix},$$

где многочлен $x^n - a_1 x^{n-1} - \ldots - a_{n-1}x - a_n$ неприводим над K, не имеет нетривиальных инвариантных подпространств.

40.27. Пусть линейный оператор $\mathcal{A}$ в n-мерном пространстве имеет в некотором базисе диагональную матрицу с различными элементами на диагонали. Найти все подпространства, инвариантные относительно $\mathcal{A}$.

40.28. Найти все инвариантные подпространства для линейного оператора, имеющего в некотором базисе матрицу, состоящую из одной жордановой клетки.

40.29. Найти в трехмерном векторном пространстве все подпространства, инвариантные относительно линейного оператора с матрицей

$$\begin{pmatrix} 4 & -2 & 2 \\ 2 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

40.30. Найти в трехмерном векторном пространстве все подпространства, инвариантные относительно двух линейных операторов, заданных матрицами

$$\begin{pmatrix} 5 & -1 & -1 \\ -1 & 5 & -1 \\ -1 & -1 & 5 \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} -6 & 2 & 3 \\ 2 & -3 & 6 \\ 3 & 6 & 2 \end{pmatrix}.$$

40.31. В $\mathbb{R}[x]_n$ и $\mathbb{C}[x]_n$ найти все подпространства, инвариантные относительно оператора:

а) $\mathcal{A}(f) = x\,\dfrac{df}{dx}$; б) $\mathcal{A}(f) = \dfrac{1}{x}\displaystyle\int_0^x f(t)\,dt$.

40.32. В линейной оболочке функций

$$\langle \cos x, \sin x, \ldots, \cos nx, \sin nx \rangle$$

найти все подпространства, инвариантные относительно оператора:

а) $\mathcal{A}(f) = \dfrac{df}{dx}$; б) $\mathcal{A}(f) = \displaystyle\int_{-x}^{x} f(t)\,dt$.

40.33. Доказать, что если для операторов $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$ конечномерного векторного пространства V над полем $\mathbb{C}$ выполняются равенства $\mathcal{A}^2 = \mathcal{B}^2 = \mathcal{E}$, то в V существует одномерное или двумерное подпространство, инвариантное относительно $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$.

40.34. Доказать, что комплексное векторное пространство, содержащее только одну прямую, инвариантную относительно линейного оператора $\mathcal{A}$, неразложимо в прямую сумму ненулевых подпространств, инвариантных относительно $\mathcal{A}$.

40.35. Найти собственные значения и корневые подпространства линейного оператора, заданного в некотором базисе матрицей:

а) $\begin{pmatrix} 4 & -5 & 2 \\ 5 & -7 & 3 \\ 6 & -9 & 4 \end{pmatrix}$; б) $\begin{pmatrix} 1 & -3 & 4 \\ 4 & -7 & 8 \\ 6 & -7 & 7 \end{pmatrix}$;

в) $\begin{pmatrix} 2 & 6 & -15 \\ 1 & 1 & -5 \\ 1 & 2 & -6 \end{pmatrix}$; г) $\begin{pmatrix} 0 & -2 & 3 & 2 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

40.36. Доказать, что линейный оператор в комплексном векторном пространстве имеет в некотором базисе диагональную матрицу тогда и только тогда, когда все его корневые векторы являются собственными.

40.37. Доказать, если что линейный оператор в комплексном векторном пространстве имеет в некотором базисе диагональную матрицу, то его ограничение на любое инвариантное подпространство L также имеет диагональную матрицу в некотором базисе подпространства L.

40.38. Доказать, что всякое корневое подпространство линейного оператора $\mathcal{A}$ инвариантно относительно любого линейного оператора $\mathcal{B}$, перестановочного с $\mathcal{A}$.

40.39. Доказать, что если матрица линейного оператора приводится к жордановой форме, то всякое инвариантное подпространство является прямой суммой своих пересечений с его корневыми подпространствами.

* * *

40.40. Пусть $A \in \mathbf{M}_n(\mathbb{C})$. Рассмотрим в пространстве $\mathbf{M}_{n\times m}(\mathbb{C})$ оператор L_A, где $L_A(X) = AX$. Найти собственные значения L_A. Найти корневые подпространства оператора L_A, где A — верхнетреугольная матрица.

40.41. Пусть $A \in \mathbf{M}_n(\mathbb{C})$, $B \in \mathbf{M}_m(\mathbb{C})$, причём A и B не имеют общих собственных значений. Доказать, что:

а) если X — матрица размера $n \times m$ и $AX - XB = 0$, то $X = 0$;

б) уравнение $AX - XB = C$, где X, C — матрицы размера $n \times m$, имеет и притом единственное решение.

40.42. Пусть $\mathcal{A}$ — линейный оператор в конечномерном комплексном векторном пространстве V. Доказать, что в V существует базис, в котором матрица оператора $\mathcal{A}$ верхнетреугольная.

40.43. Пусть $\mathcal{A}$ — линейный оператор в конечномерном вещественном пространстве V. Доказать, что в V существует базис, в котором матрица оператора $\mathcal{A}$ имеет блочно-верхнетреугольный вид

$$\begin{pmatrix} \boxed{A_1} & & & * \\ & \boxed{A_2} & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \boxed{A_n} \end{pmatrix},$$

где квадратные блоки $A_1, \ldots, A_n$ имеют размер не выше 2.

40.44. Пусть $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ — линейные операторы в конечномерном комплексном векторном пространстве и ранг оператора $\mathcal{AB} - \mathcal{BA}$ не превосходит 1. Доказать, что существует общий собственный вектор для $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$.

§ 41. Жорданова форма и её приложения. Минимальный многочлен

41.1. Найти жорданову форму матрицы:

а) $\begin{pmatrix} 1 & -3 & 4 \\ 4 & -7 & 8 \\ 6 & -7 & 7 \end{pmatrix}$; б) $\begin{pmatrix} 4 & -5 & 7 \\ 1 & -4 & 9 \\ -4 & 0 & 5 \end{pmatrix}$;

в) $\begin{pmatrix} 4 & 6 & 0 \\ -3 & -5 & 0 \\ -3 & -6 & 1 \end{pmatrix}$; г) $\begin{pmatrix} 3 & 0 & 8 \\ 3 & -1 & 6 \\ -2 & 0 & -5 \end{pmatrix}$;

д) $\begin{pmatrix} -2 & 8 & 6 \\ -4 & 10 & 6 \\ 4 & -8 & -4 \end{pmatrix}$; е) $\begin{pmatrix} 1 & -3 & 0 & 3 \\ -2 & -6 & 0 & 13 \\ 0 & -3 & 1 & 3 \\ -1 & -4 & 0 & 8 \end{pmatrix}$;

ж) $\begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 & -7 \\ 9 & -3 & -7 & -1 \\ 0 & 0 & 4 & -8 \\ 0 & 0 & 2 & -4 \end{pmatrix}$;

з) $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix}$;

и) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 0 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}$; к) $\begin{pmatrix} n & n-1 & n-2 & \dots & 1 \\ 0 & n & n-1 & \dots & 2 \\ 0 & 0 & n & \dots & 3 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & n \end{pmatrix}$;

л) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 2 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 2 & 3 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & 2 & 3 & \dots & n \end{pmatrix}$; м) $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}$;

н) $\begin{pmatrix} \alpha & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ 0 & \alpha & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ 0 & 0 & \alpha & \dots & a_{3n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \alpha \end{pmatrix}$, где $a_{12}, a_{23}, \dots, a_{n-1,n} \neq 0$.

41.2. Доказать, что жорданова форма матрицы $A + \alpha E$ равна $A_j + \alpha E$, где A_j — жорданова форма матрицы A.

41.3. Пусть A — жорданова клетка порядка n с элементом α на главной диагонали.

а) Найти матрицу $f(A)$, где $f(x)$ — многочлен.

б) Найти жорданову форму матрицы A^2.

41.4. Найти жорданову форму матрицы

$$\begin{pmatrix} \alpha & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & \alpha & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \alpha & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \alpha \end{pmatrix}.$$

41.5. Найти жорданову форму матрицы:

а) A^2; б) A^{-1} (A — невырожденная матрица);

если A имеет жорданову форму A_j.

41.6. Найти жорданову форму матрицы A и выяснить геометрический смысл соответствующего линейного оператора $\mathcal{A}$, если:

а) $A^2 = E$; б) $A^2 = A$.

41.7. Доказать, что всякая периодическая комплексная матрица подобна диагональной матрице, и найти вид этой диагональной матрицы.

41.8. Доказать, что матрица нильпотентна тогда и только тогда, когда все ее характеристические числа равны нулю.

41.9. Доказать, что для всякого линейного оператора $\mathcal{A}$ ранга 1 в комплексном векторном пространстве существует такое число k, что $\mathcal{A}^2 = k\mathcal{A}$.

41.10. Найти жорданову форму матрицы линейного оператора $\mathcal{A}$ и базис $(f_1, \dots, f_n)$, в котором $\mathcal{A}$ имеет эту матрицу, если в базисе $(e_1, \dots, e_n)$ оператор $\mathcal{A}$ задается матрицей:

а) $\begin{pmatrix} 3 & 2 & -3 \\ 4 & 10 & -12 \\ 3 & 6 & -7 \end{pmatrix}$; б) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -3 & -3 & 3 \\ -2 & -2 & 2 \end{pmatrix}$;

в) $\begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$; г) $\begin{pmatrix} 6 & -9 & 5 & 4 \\ 7 & -13 & 8 & 7 \\ 8 & -17 & 11 & 8 \\ 1 & -2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$.

41.11. Найти жорданову форму матрицы линейного оператора в комплексном векторном пространстве, имеющем только одну инвариантную прямую.

41.12. Доказать, что максимальное число линейно независимых собственных векторов линейного оператора $\mathcal{A}$ с собственным значением λ равно числу клеток с диагональным элементом λ в жордановой форме матрицы оператора $\mathcal{A}$.

41.13. Доказать, что множество линейных операторов в n-мерном комплексном векторном пространстве, перестановочных с данным оператором $\mathcal{A}$, является векторным пространством размерности $\geqslant n$.

41.14. Доказать, что если линейный оператор $\mathcal{B}$ в комплексном векторном пространстве перестановочен с любым линейным оператором, перестановочным с оператором $\mathcal{A}$, то $\mathcal{B}$ — многочлен от $\mathcal{A}$.

41.15. Доказать, что если матрицы A и B удовлетворяют соотношению $AB - BA = B$, то матрица B нильпотентна.

41.16. В пространстве комплексных многочленов степени не выше 2 по x и y действует оператор $\mathcal{A} : f(x,y) \to f(x+1, y+1)$. Найти жорданову форму оператора $\mathcal{A}$.

41.17. В пространстве комплексных полиномов от x, y степени не выше n действует оператор $\mathcal{A} = \dfrac{\partial}{\partial x} + \dfrac{\partial}{\partial y}$. Найти жорданову форму $\mathcal{A}$.

41.18. Доказать, что любая матрица подобна своей транспонированной.

41.19. В пространстве $\mathbf{M}_2(\mathbb{C})$ рассмотрим линейный оператор $L_A(X) = AX$, где $X \in \mathbf{M}_2(\mathbb{C})$ и A — фиксированная матрица из $\mathbf{M}_2(\mathbb{C})$. Найти жорданову форму оператора L_A, зная жорданову форму A.

41.20. Доказать, что для любой невырожденной квадратной комплексной матрицы A и любого натурального числа k уравнение $X^k = A$ имеет решение.

41.21. Решить уравнения:

а) $X^2 = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 5 \end{pmatrix}$; б) $X^2 = \begin{pmatrix} 6 & 2 \\ 3 & 7 \end{pmatrix}$.

41.22. Используя жорданову форму и задачи 17.7–17.9, вычислить:

а) $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}^{50}$; б) $\begin{pmatrix} 7 & -4 \\ 14 & -8 \end{pmatrix}^{64}$.

41.23. Найти минимальный многочлен диагональной матрицы с различными элементами на главной диагонали.

41.24. Найти минимальный многочлен жордановой клетки порядка n с числом α на главной диагонали.

41.25. Доказать, что минимальный многочлен клеточно-диагональной матрицы равен наименьшему общему кратному минимальных многочленов её клеток.

41.26. Найти минимальный многочлен:

а) тождественного оператора;

б) нулевого оператора;

в) оператора проектирования n-мерного пространства V на k-мерное подпространство L $(0 < k < n)$;

г) оператора отражения;

д) нильпотентного оператора индекса k;

е) оператора $\mathcal{A}$ из 40.31, а);

ж) оператора $\mathcal{A}$ из 40.31, б);

з) оператора $\mathcal{A}$ из 40.32, а);

и) оператора $\mathcal{A}$ из 40.32, б);

к) оператора L_A из 40.40;

л) оператора $\mathcal{A}$ из 41.16.

41.27. Найти минимальный многочлен матрицы:

а) $\begin{pmatrix} 3 & -1 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$; б) $\begin{pmatrix} 4 & -2 & 2 \\ -5 & 7 & -5 \\ -6 & 6 & -4 \end{pmatrix}$.

41.28. Пусть линейный оператор $\mathcal{A}$ в базисе (e_1, e_2, e_3) пространства V имеет матрицу

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Найти минимальный многочлен $g(t)$ оператора $\mathcal{A}$ и разложить пространство V в прямую сумму инвариантных подпространств в соответствии с разложением минимального многочлена на взаимно простые множители.

41.29. Доказать, что минимальный многочлен матрицы порядка $\geqslant 2$ и ранга 1 имеет степень 2.

41.30. Что можно сказать о жордановой форме матрицы линейного оператора $\mathcal{A}$ в комплексном пространстве, если $\mathcal{A}^3 = \mathcal{A}^2$?

41.31. Доказать, что некоторая степень минимального многочлена матрицы делится на её характеристический многочлен.

41.32. Доказать, что для подобия двух матриц необходимо, но не достаточно, чтобы они имели одинаковые характеристический и минимальный многочлены.

41.33. Доказать, что если степень минимального многочлена линейного оператора $\mathcal{A}$ равна размерности пространства, то всякий оператор, перестановочный с $\mathcal{A}$, является многочленом от $\mathcal{A}$.

41.34. Линейный оператор называется *полупростым*, если для любого инвариантного подпространства имеется инвариантное дополнительное подпространство.

Доказать, что:

а) ограничение полупростого оператора на инвариантное подпространство также является полупростым оператором;

б) линейный оператор полупрост тогда и только тогда, когда пространство является прямой суммой минимальных инвариантных подпространств;

в) если для линейного оператора $\mathcal{A}$ существует разложение пространства в прямую сумму инвариантных подпространств, на каждом из которых ограничение оператора $\mathcal{A}$ полупросто, то $\mathcal{A}$ полупрост на всем пространстве.

41.35. Доказать, что если минимальный многочлен линейного оператора $\mathcal{A}$ в пространстве V является произведением взаимно простых многочленов $g_1(x)$ и $g_2(x)$, то V может быть разложено в прямую сумму двух инвариантных подпространств таких, что ограничения оператора $\mathcal{A}$ на эти подпространства имеют минимальные многочлены $g_1(x)$ и $g_2(x)$ соответственно.

41.36. Доказать, что для любого линейного оператора существует такое разложение пространства в прямую сумму инвариантных подпространств, что минимальные многочлены его ограничений на эти подпространства являются степенями различных неприводимых многочленов.

41.37. Доказать, что если минимальный многочлен линейного оператора $\mathcal{A}$ является неприводимым многочленом степени k, то для любого $x \neq 0$ векторы $x, \mathcal{A}x, \ldots, \mathcal{A}^{k-1}x$ составляют базис минимального инвариантного подпространства.

41.38. Доказать, что линейный оператор полупрост тогда и только тогда, когда его минимальный многочлен не имеет кратных неприводимых множителей.

41.39. Доказать, что линейный оператор в векторном пространстве над полем K характеристики 0 полупрост тогда и только тогда, когда он обладает собственным базисом над некоторым расширением поля K.

41.40. Доказать, что сумма двух перестановочных полупростых линейных операторов над полем характеристики 0 является полупростым оператором.

41.41. Пусть $\mathcal{A}$ — линейный оператор в векторном пространстве над полем K характеристики 0 и $K[\mathcal{A}]$ — кольцо линейных операторов, представимых в виде многочленов от $\mathcal{A}$. Доказать, что если минимальный многочлен оператора $\mathcal{A}$ является степенью неприводимого многочлена $p(x)$, то:

а) элементы кольца $K[\mathcal{A}]$, делящиеся в этом кольце на элемент $p(\mathcal{A})$, образуют идеал I, отличный от $K[\mathcal{A}]$;

б) для всякого оператора $\mathcal{B} \in I$ минимальный многочлен оператора $\mathcal{A} + \mathcal{B}$ делится на $p(x)$;

в) существует оператор $\mathcal{B} \in I$ такой, что минимальный многочлен оператора $\mathcal{A} + \mathcal{B}$ равен $p(x)$.

41.42. Доказать, что всякий линейный оператор $\mathcal{A}$ в векторном пространстве над полем характеристики 0 может быть представлен в виде суммы полупростого и нильпотентного операторов, являющихся многочленами от $\mathcal{A}$.

41.43. Доказать, что всякий линейный оператор $\mathcal{A}$ можно единственным образом представить в виде суммы перестановочных полупростого и нильпотентного операторов.

41.44. Доказать, что если степень минимального многочлена $g(x)$ линейного оператора $\mathcal{A}$ в векторном пространстве V над полем K равна размерности пространства и $g(t)$ является степенью многочлена, неприводимого над K, то:

а) V нельзя разложить в прямую сумму двух инвариантных подпространств;

б) V является циклическим относительно $\mathcal{A}$.

41.45. Пусть $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ — собственные значения матрицы $A \in \in \mathbf{M}_n(\mathbb{C})$.

Доказать, что:

а) для любого натурального числа k

$$\operatorname{tr} A^k = \lambda_1^k + \ldots + \lambda_n^k;$$

б) коэффициенты характеристического полинома матрицы A являются многочленами от $\operatorname{tr} A, \ldots, \operatorname{tr} A^n$;

в) если $\operatorname{tr} A = \operatorname{tr} A^2 = \ldots = \operatorname{tr} A^n = 0$, то матрица A нильпотентна.

* * *

41.46. Пусть

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \ldots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \ldots & 1 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 1 & \ldots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & \ldots & 0 & 0 \end{pmatrix} \in \mathbf{M}_n(\mathbb{C})$$

и $S = \frac{1}{\sqrt{2}}(E + iB)$. Доказать, что для жордановой клетки $J(n, \lambda) \in \mathbf{M}_n(\mathbb{C})$ справедливо равенство

$$SJ(n, \lambda)S^{-1} = \lambda E + \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n-1}[E_{k,k+1} + E_{k+1,k} + i(E_{n-k+1,k+1} - E_{n-k,k})].$$

41.47. Доказать, что каждая комплексная матрица подобна симметрической.

§ 42. Нормированные пространства. Неотрицательные матрицы

42.1. Пусть K — нормированное поле (см. 66.35) с нормой $|x|$. Доказать, что следующие функции в K^n являются нормами:

а) $\|(a_1, \ldots, a_n)\| = |a_1| + \ldots + |a_n|$;

б) $\|(a_1, \ldots, a_n)\| = \max(|a_1|, \ldots, |a_n|)$;

в) $\|(a_1, \ldots, a_n)\| = \sqrt{|a_1|^2 + \ldots + |a_n|^2}$.

42.2. Пусть K — локально компактное нормированное поле, V — конечномерное векторное пространство над K. Доказать, что любые

две нормы $\|x\|_1$, $\|x\|_2$ в V эквивалентны, т.е. существуют такие положительные действительные числа C_1, C_2, что для всех $x \in V$

$$C_1\|x\|_1 \leqslant \|x\|_2 \leqslant C_2\|x\|_1.$$

42.3. Пусть K — нормированное поле, V — конечномерное векторное пространство с базисом $(e_1, \ldots, e_m)$. Пусть $x_n = x_{n1}e_1 + \ldots + x_{nm}e_m \in V$, $x_{ij} \in K$, $n \geqslant 1$. Доказать, что последовательность векторов x_n сходится тогда и только тогда, когда сходятся последовательности x_{ni} для $i = 1, \ldots, m$.

42.4. Пусть K — полное нормированное поле и V — конечномерное нормированное векторное пространство над K. Доказать, что V полно.

42.5. Пусть K — нормированное поле и V — нормированное векторное пространство над K. Обозначим через $L(V)$ множество всех таких линейных операторов $\mathcal{A}$ в V, что число $\|\mathcal{A}(x)\|$ ограничено, если $\|x\| = 1$. Доказать, что:

а) $L(V)$ — подпространство в пространстве всех линейных операторов в V;

б) $L(V)$ является нормированной алгеброй с нормой

$$\|\mathcal{A}\| = \sup_{\|x\|=1} \|\mathcal{A}(x)\|;$$

в) если V конечномерно, то $L(V)$ — пространство всех операторов в V.

42.6. Пусть K — нормированное поле и в K^n заданы нормы а), б) из задачи 42.1. Доказать, что (согласно задаче 42.5) нормы в $\mathbf{M}_n(K) = L(V)$ имеют вид:

а) $\|A\| = \max\limits_{1\leqslant j\leqslant n} \left(\sum\limits_{i=1}^{n} |a_{ij}|\right)$; б) $\|A\| = \max\limits_{1\leqslant i\leqslant n} \left(\sum\limits_{j=1}^{n} |a_{ij}|\right)$.

42.7. Пусть K — нормированное поле. Для $A = (a_{ij}) \in \mathbf{M}_n(K)$ положим:

а) $\|A\|_1 = \sum\limits_{i,j=1}^{n} |a_{ij}|$; б) $\|A\|_2 = \sqrt{\sum\limits_{i,j=1}^{n} |a_{ij}|^2}$;

в) $\|A\|_3 = n \cdot \max\limits_{1\leqslant i,j\leqslant n} |a_{ij}|$.

Доказать, что каждая из этих функций задает в $\mathbf{M}_n(K)$ структуру нормированной алгебры.

42.8. Доказать, что для любой матрицы $A \in \mathbf{M}_n(\mathbb{C})$ определены матрицы e^A, $\sin A$, $\cos A$.

42.9. Пусть $A \in \mathbf{M}_n(\mathbb{C})$. Доказать, что:

а) $\sin 2A = 2\sin A\cos A$; б) $e^{iA} = \cos A + i\sin A$;

в) $\sin A = \frac{1}{2}(e^{iA} - e^{-iA})$; г) $\cos A = \frac{1}{2}(e^{iA} + e^{-iA})$.

42.10. Если $A, B \in \mathbf{M}_n(\mathbb{C})$ и $AB = BA$, то $e^{A+B} = e^A e^B$.

42.11. Пусть A — нормированная алгебра над полным нормированным полем K. Доказать, что если $x \in A$, то существует предел

$$\rho(x) = \lim_{n\to\infty} \|x^n\|^{1/n}.$$

* * *

42.12. Пусть x — элемент банаховой алгебры A над полным нормированным полем K. Доказать, что радиус сходимости ряда $\sum_{n\geqslant 0} t^n x^n \in A[[t]]$ равен $\rho(x)^{-1}$ (см. задачу 42.11).

42.13. Пусть x — элемент банаховой алгебры A над полным нормированным полем K. *Спектром* $\mathrm{Sp}(x)$ называется множество всех таких $\lambda \in K$, что элемент $x - \lambda$ необратим в A.

Доказать, что:

а) радиус наименьшего круга в K с центром в нуле, содержащего $\mathrm{Sp}(x)$, равен $\rho(x)$;

б) множество $\mathrm{Sp}(x)$ компактно в K.

42.14. Пусть $A \in \mathbf{M}_n(\mathbb{C})$ и $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ — все собственные значения матрицы A. Доказать, что

$$\max_{1\leqslant i\leqslant n} |\lambda_i| = \rho(A) \leqslant \|A\|,$$

где $\|A\|$ — произвольная норма в алгебре $\mathbf{M}_n(\mathbb{C})$, индуцированная в силу 42.5, б) некоторой нормой в $\mathbb{C}^n$.

42.15. Пусть x — элемент банаховой алгебры A над полным нормированном полем K и $f(t) \in K[[t]]$. Доказать, что если $\rho(x)$ меньше радиуса сходимости $f(t)$, то ряд $f(x)$ сходится.

42.16. Пусть x — элемент банаховой алгебры A над полным нормированным полем K, g — обратимый элемент A и $f(t) \in K[[t]]$. Доказать, что ряд $f(x)$ сходится тогда и только тогда, когда сходится $f(gxg^{-1})$, причём $f(gxg^{-1}) = gf(x)g^{-1}$.

42.17. Пусть a — элемент банаховой алгебры над полным нормированным полем K. Предположим, что $f(t) \in K[[t]]$, причём ряд $f(a)$ сходится. Пусть у a имеется аннулирующий многочлен степени n. Доказать, что $f(a) \in \langle 1, a, a^2, \ldots, a^{n-1} \rangle$.

42.18. Пусть $A \in \mathbf{M}_n(\mathbb{C})$ и $\lambda_0, \ldots, \lambda_n$ — все корни характеристического многочлена матрицы A кратностей $k_0, \ldots, k_n$. Предположим, что $\lambda_0, \ldots, \lambda_n$ лежат внутри круга сходимости ряда $u(t) \in \mathbb{C}[[t]]$.

Доказать, что

$$u(A) = \sum_{i=0}^{n} G_i(A) \sum_{k=0}^{k_i} \sum_{l=0}^{k} \frac{1}{l!} \left[\frac{d^l u}{dx^l}(\lambda_i) \cdot \frac{d^l}{dx^l} G_i(x)^{-1} \big|_{x=\lambda_i} (A - \lambda_i E)^k \right],$$

где $G_i(t) = \prod_{j \neq i} (t - \lambda_j)^{k_j}$.

42.19. Вычислить:

а) $\exp \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$; б) $\exp \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ 6 & -3 \end{pmatrix}$; в) $\exp \begin{pmatrix} 4 & 2 & -5 \\ 6 & 4 & -9 \\ 5 & 3 & 7 \end{pmatrix}$;

г) $\ln \begin{pmatrix} 4 & -15 & 6 \\ 1 & -4 & 2 \\ 1 & -5 & 3 \end{pmatrix}$; д) $\sin \begin{pmatrix} \pi - 1 & 1 \\ -1 & \pi + 1 \end{pmatrix}$.

42.20. Найти определитель матрицы e^A, где A — квадратная матрица порядка n.

42.21. Пусть $A \in \mathbf{M}_n(\mathbb{C})$ и

$$x(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{pmatrix}$$

— непрерывно дифференцируемая вектор-функция. Доказать, что решением системы дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами

$$\frac{d}{dt} x(t) = A x(t)$$

с начальным условием $x(t_0)$ является вектор-функция $x(t) = e^{At} x(t_0)$.

42.22. Пусть A — неотрицательная матрица и A^k — положительная матрица для некоторого натурального числа k. Доказать, что $\rho(A) > 0$.

42.23. Привести пример такой неотрицательной 2×2-матрицы, не являющейся положительной, что A^2 является положительной матрицей.

42.24. Пусть неотрицательная матрица A имеет положительный собственный вектор. Доказать, что матрица A подобна неотрицательной матрице, у которой суммы элементов каждой строки одинаковы.

42.25. Пусть A, B — положительные матрицы, причём матрица $A - B$ также положительна. Доказать, что $\rho(A) > \rho(B)$.

42.26. Пусть A — невырожденная неотрицательная матрица, причём и обратная матрица A^{-1} также неотрицательна. Доказать, что $A = DP$, где D — диагональная неотрицательная обратимая матрица, P — перестановочная матрица.

42.27. Пусть A — неотрицательная матрица, x — такой ненулевой комплексный вектор, что $Ax - \alpha x$ — неотрицательный вектор для некоторого вещественного числа α. Доказать, что $\rho(A) > \alpha$.

42.28. Пусть A — неотрицательная матрица, причём ${}^tA$ имеет положительный собственный вектор. Доказать, что если $Ax - \rho(A)x$ — неотрицательный вектор для некоторого ненулевого вектора x, то $Ax = \rho(A)x$.

42.29. Пусть A — неотрицательная матрица, причём матрица A^k положительна для некоторого натурального числа k. Доказать, что:

а) A имеет положительный собственный вектор;

б) $\rho(A)$ — собственное значение A кратности 1.

42.30. Пусть неотрицательная матрица A имеет собственный вектор $x = (x_1, \ldots, x_n)$, где $x_1, \ldots, x_r > 0$, $x_{r+1} = \ldots = x_n = 0$. Доказать, что тогда существует такая перестановочная матрица P, что $P^{-1}AP = \begin{pmatrix} B & C \\ 0 & D \end{pmatrix}$, где $B \in \mathbf{M}_r(\mathbb{R})$, $D \in \mathbf{M}_{n-r}(\mathbb{R})$, причём B имеет положительный собственный вектор.

42.31. Пусть A — неотрицательная матрица. Доказать, что существует положительная матрица B, перестановочная с A, в том и только том случае, если существуют положительные собственные векторы у матриц A и ${}^tA$.

42.32. Пусть A — неотрицательная трехдиагональная матрица. Доказать, что все собственные значения A вещественны.

42.33. Пусть A — неотрицательная матрица. Доказать, что $\rho(E+A) = 1 + \rho(A)$.

42.34. Для неотрицательных матриц A найти неотрицательные собственные векторы x и $\rho(A)$:

а) $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$; б) $\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 2 \end{pmatrix}$;

в) $\begin{pmatrix} 1 & 4 & 8 \\ 0 & 2 & 6 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$; г) $\begin{pmatrix} 3 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 5 \\ 5 & 7 & 1 & 6 \\ 0 & 1 & 0 & 4 \end{pmatrix}$.

Глава X

МЕТРИЧЕСКИЕ ВЕКТОРНЫЕ ПРОСТРАНСТВА

§ 43. Геометрия метрических пространств

43.1. Какие из векторных пространств с билинейными формами из задачи 37.1 являются метрическими?

43.2. Доказать, что вещественная часть $f(x,y)$ и мнимая часть $g(x,y)$ эрмитовой функции на комплексном векторном пространстве V инвариантны относительно умножения на i, т.е. для любых векторов $x, y \in V$

$$f(ix, iy) = f(x, y), \quad g(ix, iy) = g(x, y).$$

43.3. Доказать, что метрическое векторное пространство является прямой суммой подпространства L и его ортогонального дополнения $L^\perp$ тогда и только тогда, когда скалярное произведение на L невырождено и что в этом случае скалярное произведение на $L^\perp$ также невырождено.

43.4. В пространстве $\mathbf{M}_n(\mathbb{C})$ с эрмитовым скалярным произведением

$$(X, Y) = \mathrm{tr}(X^t \overline{Y})$$

найти ортогональное дополнение к подпространству:

а) матриц с нулевым следом;

б) эрмитовых матриц;

в) косоэрмитовых матриц;

г) верхних треугольных матриц.

43.5. Показать, что эрмитово и евклидово пространства являются нормированными.

43.6. Какие из нормирований пространств $\mathbb{R}^n$, $\mathbb{C}^n$ из задачи 42.1 индуцированы евклидовой или эрмитовой метрикой?

43.7. Дополнить до ортогонального базиса систему векторов евклидова и эрмитова пространства:

а) $((1,-2,2,-3),(2,-3,2,4))$;

б) $((1,1,1,2),(1,2,3,-3))$;

в) $\left(\left(\frac{2}{3},\frac{1}{3},\frac{2}{3}\right),\left(\frac{1}{3},\frac{2}{3},-\frac{2}{3}\right)\right)$;

г) $\left(\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2},\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right),\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2},-\frac{1}{2},-\frac{1}{2}\right)\right)$;

д) $((1,1-i,2),(-2,-1+3i,3-i))$;

е) $((-i,2,-4+i),(4-i,-1,i))$.

43.8. Найти ортогональную проекцию вектора x евклидова (эрмитова) пространства на линейную оболочку ортонормированной системы векторов $(e_1,\ldots,e_k)$.

43.9. Доказать, что в любых двух подпространствах евклидова (эрмитова) пространства можно выбрать ортонормированные базисы $(e_1,\ldots,e_k)$ и $(f_1,\ldots,f_l)$ таким образом, чтобы $(e_i,f_j)=0$ при $i\neq j$ и $(e_i,f_i)\geqslant 0$.

43.10. Пусть $(e_1,\ldots,e_k)$ и $(f_1,\ldots,f_l)$ — ортонормированные базисы подпространств L и M евклидова (эрмитова) пространства, $A=((e_i,f_j))$ — матрица порядка $k\times l$. Доказать, что все характеристические числа матрицы ${}^tA\cdot A$ принадлежат отрезку $[0,1]$ и не зависят от выбора базисов в подпространствах L и M.

43.11. Доказать, что всякая вещественная симметрическая матрица ранга $\leqslant n$ с неотрицательными (соответственно положительными) главными минорами является матрицей Грама некоторой системы (соответственно линейно независимой системы) векторов n-мерного евклидова пространства.

Доказать аналогичное утверждение для эрмитовой матрицы и эрмитова пространства.

43.12. Доказать, что сумма квадратов длин проекций векторов любого ортонормированного базиса евклидова (эрмитова) пространства на k-мерное подпространство равна k.

43.13. Пусть G — матрица скалярного произведения в базисе $(e_1,\ldots,e_n)$ евклидова пространства V. Найти матрицу перехода к сопряжённому базису $(f_1,\ldots,f_n)$ и матрицу скалярного произведения

в этом базисе.

43.14. Пусть S — матрица перехода от базиса $\mathbf{e}$ к базису $\mathbf{e}'$. Найти матрицу перехода от базиса $\mathbf{e}'$, сопряжённого к $\mathbf{e}$, к базису $\mathbf{f}'$, сопряжённому к $\mathbf{f}$:

а) в евклидовом пространстве;

б) в эрмитовом пространстве.

43.15. С помощью процесса ортогонализации построить ортогональный базис линейной оболочки системы векторов евклидова (эрмитова) пространства:

а) $((1,2,2,-1),(1,1,-5,3),(3,2,8,-7))$;

б) $((1,1,-1,-2),(5,8,-2,-3),(3,9,3,8))$;

в) $((2,1,3,-1),(7,4,3,-3),(1,1,-6,0),(5,7,7,8))$;

г) $((2,1,-i),(1-i,2,0),(-i,0,1-i))$;

д) $((0,1-i,2),(-i,2+3i,i),(0,0,2i))$.

43.16. Найти базис ортогонального дополнения линейной оболочки системы векторов евклидова (эрмитова) пространства:

а) $((1,0,2,1),(2,1,2,3),(0,1,-2,1))$;

б) $((1,1,1,1),(-1,1,-1,1),(2,0,2,0))$;

в) $((0,1+2i,-i),(1,-1,2-i))$.

43.17. Доказать, что системы линейных уравнений, задающих линейное подпространство в $\mathbb{R}^n$ и его ортогональное дополнение, связаны следующим образом: коэффициенты линейно независимой системы, задающей одно из этих подпространств, являются координатами векторов базиса другого подпространства.

43.18. Найти уравнения, задающие ортогональное дополнение к подпространству, заданному системой уравнений:

а) $\begin{cases} 2x_1 + x_2 + 3x_3 - x_4 = 0, \\ 3x_1 + 2x_2 - 2x_4 = 0, \\ 3x_1 + x_2 + 4x_3 - x_4 = 0; \end{cases}$

б) $\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 + 4x_3 - 3x_4 = 0, \\ 3x_1 - x_2 + 11x_3 - 13x_4 = 0, \\ 4x_1 + x_2 + 18x_3 - 23x_4 = 0; \end{cases}$

в) $\begin{cases} x_1 + (1-i)x_2 - ix_3 = 0, \\ -ix_1 + 4x_2 = 0. \end{cases}$

43.19. Найти проекцию вектора x на подпространство L и ортогональную составляющую вектора x:

а) $x = (4, -1, -3, 4)$ и $L = \langle(1, 1, 1, 1), (1, 2, 2, -1), (1, 0, 0, 3)\rangle$;

б) $x = (5, 2, -2, 2)$ и $L = \langle(2, 1, 1, -1), (1, 1, 3, 0), (1, 2, 8, 1)\rangle$;

в) $x = (7, -4, -1, 2)$ и L задано системой уравнений

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + x_3 + 3x_4 = 0, \\ 3x_1 + 2x_2 + 2x_3 + x_4 = 0, \\ x_1 + 2x_2 + 2x_3 - 4x_4 = 0; \end{cases}$$

г) $x = (0, 1 + i, -i)$ и $L = \langle(-i, 2 + i, 0), (3, -i + 1, i)\rangle$;

д) $x = (i, 2 - i, 0)$ и L задано системой уравнений

$$\begin{cases} (2 + i)x_1 - ix_2 + 2x_3 + ix_4 = 0, \\ (2 + i)x_1 - ix_2 + 2x_3 + ix_4 = 0, \\ 5x_1 + (-1 + i)x_2 + x_3 = 0. \end{cases}$$

43.20. Доказать, что если в процессе ортогонализации система векторов $a_1, \ldots, a_n$ переходит в систему $b_1, \ldots, b_n$, то вектор b_k есть ортогональная составляющая вектора a_k относительно линейной оболочки системы $a_1, \ldots, a_{k-1}$ $(k > 1)$.

43.21. Найти расстояние от вектора x до подпространства, заданного системой уравнений:

а) $x = (2, 4, 0, -1)$, $\begin{cases} 2x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 = 0, \\ 2x_1 + 4x_2 + 2x_3 + 4x_4 = 0; \end{cases}$

б) $x = (3, 3, -4, 2)$, $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 - x_4 = 0, \\ x_1 + 3x_2 + x_3 - 3x_4 = 0; \end{cases}$

в) $x = (3, 3, -1, 1, -1)$, $2x_1 - 2x_2 + 3x_3 - 2x_4 + 2x_5 = 0$;

г) $x = (3, 3, -1, 1, -1)$, $x_1 - 3x_2 + 2x_4 - x_5 = 0$;

д) $x = (0, -i, 1 + i)$, $x_1 + ix_2 - (2 - i)x_3 = 0$;

е) $x = (1, -1, i)$, $x_1 + (5 + 4i)x_2 - ix_3 = 0$.

43.22. Пусть $(e_1, \ldots, e_k)$ — ортонормированная система векторов n-мерного евклидова (эрмитова) пространства. Доказать, что для любого вектора x выполняется *неравенство Бесселя*

$$\sum_{i=1}^{k} |(x, e_i)|^2 \leqslant \|x\|^2,$$

причём равенство достигается для любого x тогда и только тогда, когда $k = n$, т.е. данная система векторов является ортонормированным базисом пространства V (*равенство Парсеваля.*)

43.23. Пользуясь неравенством Коши, доказать, что

$$\left|\sum_{i=1}^{k} a_i b_i\right|^2 \leqslant \sum_{i,j=1}^{k} |a_i|^2 |b_i|^2$$

для любых комплексных чисел $a_1, \ldots, a_k, b_1, \ldots, b_k$.

43.24. Доказать, что квадрат расстояния от вектора x евклидова (эрмитова) пространства до подпространства с базисом $(e_1, \ldots, e_k)$ равен отношению определителей Грама систем векторов $(e_1, \ldots, e_k, x)$ и $(e_1, \ldots, e_k)$.

43.25. Доказать, что определитель Грама любой системы векторов:

а) в процессе ортогонализации не меняется;

б) неотрицателен;

в) равен нулю тогда и только тогда, когда система линейно зависима;

г) не превосходит произведения квадратов длин векторов системы, причём равенство имеет место тогда и только тогда, когда векторы попарно ортогональны или один из них нулевой.

43.26. Доказать, что определитель матрицы положительно определённой квадратичной формы не превосходит произведения элементов её главной диагонали.

43.27. Доказать, что для любой вещественной квадратной матрицы $A = (a_{ij})$ порядка n выполняется *неравенство Адамара*

$$(\det A)^2 \leqslant \prod_{i=1}^{n} \left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij}^2 \right),$$

причём равенство имеет место тогда и только тогда, когда либо

$$\sum_{k=1}^{n} a_{ik} a_{jk} = 0 \quad (i, j = 1, \ldots, n; \quad i \neq j),$$

либо матрица A имеет нулевую строку.

Сформулировать и доказать аналогичное утверждение для комплексной матрицы A.

43.28. Найти длины сторон и внутренние углы треугольника ABC в пространстве $\mathbb{R}^5$:

а) $A = (2, 4, 2, 4, 2)$, $B = (6, 4, 4, 4, 6)$, $C = (5, 7, 5, 7, 2)$;

б) $A = (1, 2, 3, 2, 1)$, $B = (3, 4, 0, 4, 3)$,

$$C = \left(1 + \frac{5}{26}\sqrt{78},\ 2 + \frac{5}{13}\sqrt{78},\ 3 + \frac{10}{13}\sqrt{78},\ 2 + \frac{5}{13}\sqrt{78},\ 1 + \frac{5}{26}\sqrt{78}\right).$$

43.29. С помощью скалярного произведения векторов доказать, что:

а) сумма квадратов диагоналей параллелограмма равна сумме квадратов его сторон;

б) квадрат стороны треугольника равен сумме квадратов двух других сторон без удвоенного произведения этих сторон на косинус угла между ними.

43.30. Методом наименьших квадратов решить переопределённую систему линейных уравнений:

а) $\begin{cases} x_1 + x_2 - 3x_3 = -1, \\ 2x_1 + x_2 - 2x_3 = 1, \\ x_1 + x_2 + x_3 = 3, \\ x_1 + 2x_2 - 3x_3 = 1; \end{cases}$ б) $\begin{cases} 2x_1 - 5x_2 + 3x_3 + x_4 = 5, \\ 3x_1 - 7x_2 + 3x_3 - x_4 = -1, \\ 5x_1 - 9x_2 + 6x_3 + 2x_4 = 7, \\ 4x_1 - 6x_2 + 3x_3 + x_4 = 8. \end{cases}$

43.31. (*n-мерная теорема Пифагора.*) Доказать, что квадрат диагонали n-мерного прямоугольного параллелепипеда равен сумме квадратов его рёбер, выходящих из одной вершины.

43.32. Найти число диагоналей n-мерного куба, ортогональных данной диагонали.

43.33. Найти длину диагонали n-мерного куба с ребром a и углы между диагоналями куба и его рёбрами.

43.34. Найти радиус шара, описанного около n-мерного куба с ребром a, и решить неравенство $R < a$.

43.35. Доказать, что длина ортогональной проекции ребра n-мерного куба на любую его диагональ равна $1/n$ длины диагонали.

43.36. Вычислить объём n-мерного параллелепипеда со сторонами:

а) $(1, -1, 1, -1)$, $(1, 1, 1, 1)$, $(1, 0, -1, 0)$, $(0, 1, 0, -1)$;

б) $(1, 1, 1, 1)$, $(1, -1, -1, 1)$, $(2, 1, 1, 3)$, $(0, 1, -1, 0)$;

в) $(1,1,1,2,1)$, $(1,0,0,1,-2)$, $(2,1,-1,0,2)$, $(0,7,3,-4,-2)$, $(39,-37,51,-29,5)$;
г) $(1,0,0,2,5)$, $(0,1,0,3,4)$, $(0,0,1,4,7)$, $(2,-3,4,11,12)$, $(0,0,0,0,1)$.

43.37. Доказать, что для объёма параллелепипеда выполняется неравенство

$$V(a_1,\ldots,a_k,b_1,\ldots,b_l) \leqslant V(a_1,\ldots,a_k)\cdot V(b_1,\ldots,b_l),$$

причём равенство имеет место тогда и только тогда, когда $(a_i,b_j)=0$ при всех i и j.

43.38. Найти угол между вектором x и подпространством L:
а) $L=\langle(3,4,-4,-1),(0,1,-1,2)\rangle$, $x=(2,2,1,1)$;
б) $L=\langle(5,3,4,-3),(1,1,4,5),(2,-1,1,2)\rangle$, $x=(1,0,3,0)$;
в) $L=\langle(1,1,1,1),(1,2,0,0),(1,3,1,1)\rangle$, $x=(1,1,0,0)$;
г) $L=\langle(0,0,0,1),(1,-1,-1,1),(-3,3,3,0)\rangle$, $x=(1,2,3,0)$.

43.39. Доказать, что если каждые два различных из k векторов евклидова пространства V образуют между собой угол $\pi/3$, то $k\leqslant\dim V$.

43.40. Доказать, что если каждые два различных из k векторов евклидова пространства образуют тупой угол, то $k\leqslant 1+\dim V$.

43.41. Найти угол между диагональю n-мерного куба и его k-мерной гранью.

43.42. Найти угол между двумерными гранями $a_0a_1a_2$ и $a_0a_3a_4$ правильного четырехмерного симплекса $a_0a_1a_2a_3a_4$.

43.43. Найти угол между подпространствами

$$\langle(1,0,0,0),(0,1,0,0,)\rangle, \qquad \langle(1,1,1,1),(1,-1,1,-1)\rangle.$$

43.44. Многочлены

$$P_0(x)=1, \quad P_k(x)=\frac{1}{2^k k!}\frac{d^k}{dx^k}\left[(x^2-1)^k\right] \quad (k=1,2,\ldots,n)$$

называются *многочленами Лежандра.*

а) Доказать, что многочлены Лежандра образуют ортогональный базис в евклидовом пространстве $\mathbb{R}[x]_n$ со скалярным произведением

$$\int_{-1}^{1} f(x)g(x)\,dx.$$

б) Найти явный вид многочленов $P_k(x)$ для $k \leqslant 4$.

в) Доказать, что $\deg P_k(x) = k$, и найти развёрнутое выражение для $P_k(x)$ при всех k.

г) Вычислить длину многочлена Лежандра $P_k(x)$.

д) Вычислить значение $P_k(1)$.

е) Доказать, что при применении процесса ортогонализации к базису $(1, x, x^2, \ldots, x^n)$ пространства $\mathbb{R}[x]_n$ получается базис, элементы которого лишь постоянными множителями отличаются от соответствующих многочленов Лежандра, и найти эти множители.

ж) Доказать, что интеграл $\displaystyle\int_{-1}^{1} f(x)^2\,dx$, где $f(x)$ — многочлен степени n с вещественными коэффициентами со старшим коэффициентом 1, достигает своего минимума

$$\frac{2^{2n+1}}{(2n+1)\binom{2n}{n}^2}$$

при

$$f(x) = \frac{2^n}{\binom{2n}{n}} P_n(x).$$

43.45. В пространстве $\mathbb{R}[x]_n$ со скалярным произведением

$$\int_{-1}^{1} f(x)g(x)\,dx$$

найти:

а) объём параллелепипеда $P(1, x, \ldots, x^n)$;

б) расстояние от вектора x^n до подпространства $\mathbb{R}[x]_{n-1}$.

43.46. В пространстве L непрерывных функций на отрезке $[-\pi, \pi]$ со скалярным произведением

$$(f, g) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)g(t)dt$$

найти проекцию функции t^m на подпространство

$$V = \langle 1, \cos t, \sin t, \ldots, \cos nt, \sin nt\rangle.$$

43.47. Пусть V — псевдоевклидово пространство сигнатуры (p, q) и W — подпространство в V. Доказать, что:

а) если скалярное произведение на W положительно определено, то $\dim W \leqslant p$;

б) если $(x, x) = 0$ для любого $x \in W$, то $\dim W \leqslant \min(p, q)$.

43.48. Пусть на векторном пространстве задано невырожденное скалярное произведение сигнатуры (p, q) и ограничение его на подпространство W — невырожденное скалярное произведение сигнатуры (p', q'). Доказать, что ограничение скалярного произведения на $W^{\perp}$ невырождено и имеет сигнатуру $(p - p', q - q')$.

43.49. Доказать, что в псевдоевклидовом пространстве сигнатуры (p, q), где p и q отличны от нуля, существует базис, состоящий из изотропных векторов.

§ 44. Сопряжённые и нормальные операторы

44.1. Доказать следующие свойства операции перехода к сопряжённому оператору в метрическом пространстве:

а) $\mathcal{A}^{**} = \mathcal{A}$;

б) $(\mathcal{A} + \mathcal{B})^* = \mathcal{A}^* + \mathcal{B}^*$;

в) $(\mathcal{A}\mathcal{B})^* = \mathcal{B}^*\mathcal{A}^*$;

г) $(\lambda\mathcal{A})^* = \overline{\lambda}\mathcal{A}^*$;

д) $\mathcal{A}^*\mathcal{A}$ и $\mathcal{A}\mathcal{A}^*$ — самосопряжённые операторы;

е) если оператор $\mathcal{A}$ невырожден, то $(\mathcal{A}^{-1})^* = (\mathcal{A}^*)^{-1}$.

44.2. Найти матрицу оператора $\mathcal{A}^*$ в базисе $\mathbf{e}$ метрического векторного пространства V, если оператор $\mathcal{A}$ имеет в этом базисе матрицу A, а скалярное произведение — матрицу G.

44.3. Пусть (e_1, e_2) — ортонормированный базис метрического векторного пространства и оператор $\mathcal{A}$ имеет в базисе $(e_1, e_1 + e_2)$ матрицу $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$. Найти матрицу оператора $\mathcal{A}^*$ в этом базисе.

44.4. Найти оператор, сопряжённый к проектированию координатной плоскости на ось абсцисс параллельно биссектрисе первой и третьей четвертей.

44.5. Пусть $\mathcal{A}$ — проектирование метрического векторного пространства V на подпространство V_1 параллельно подпространству V_2. Доказать, что:

а) $V = V_1^{\perp} \oplus V_2^{\perp}$;

б) $\mathcal{A}^*$ — проектирование пространства V на $V_2^{\perp}$ параллельно $V_1^{\perp}$.

44.6. Доказать, что если подпространство метрического векторного пространства инвариантно относительно линейного оператора $\mathcal{A}$, то его ортогональное дополнение инвариантно относительно оператора $\mathcal{A}^*$.

44.7. Доказать, что ядро и образ сопряжённого оператора $\mathcal{A}^*$ являются ортогональными дополнениями соответственно к образу и ядру оператора $\mathcal{A}$.

44.8. Доказать, что если x — собственный вектор операторов $\mathcal{A}$ и $\mathcal{A}^*$ в метрическом векторном пространстве с собственными значениями λ и μ, то $\mu = \overline{\lambda}$.

44.9. Пусть V — пространство вещественных бесконечно дифференцируемых периодических функций периода $h > 0$ со скалярным произведением $\int_0^h f(x)g(x)\,dx$.

а) Найти оператор, сопряжённый к оператору дифференцирования $\mathcal{D}$.

б) Доказать, что отображения $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$, заданные правилами

$$\mathcal{A}(f) = \sum_{i=0}^{n} u_i \mathcal{D}^i(f), \qquad \mathcal{B}(f) = \sum_{i=0}^{n} (-1)^i \mathcal{D}^i(u_i f),$$

где $u_0, u_1 \ldots, u_n \in V$ — фиксированные функции, являются линейными операторами в V и $\mathcal{B} = \mathcal{A}^*$.

в) Доказать, что оператор, определённый правилом

$$\mathcal{A}(f) = \sin^2 \frac{2\pi}{h} x \mathcal{D}^2(f) + \frac{2\pi}{h} \sin \frac{4\pi}{h} x \mathcal{D}(f),$$

является самосопряжённым.

44.10. Пусть V — пространство вещественных бесконечно дифференцируемых функций на отрезке $[a, b]$ со скалярным произведением $\int_a^b f(x)g(x)\,dx$. Доказать, что:

а) если функции $u_0, \ldots, u_n \in V$ удовлетворяют условиям

$$\mathcal{D}^i(u_j)(a) = \mathcal{D}^i(u_j)(b) = 0 \quad (j = 1, \ldots, n;\ i = 0, 1, \ldots, j-1),$$

то отображения $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$, определённые правилами

$$\mathcal{A}(f) = \sum_{i=0}^{n} u_i \mathcal{D}^i(f), \qquad \mathcal{B}(f) = \sum_{i=0}^{n} (-1)^i \mathcal{D}^i(u_i f),$$

являются линейными операторами в V и $\mathcal{B} = \mathcal{A}^*$;

б) линейный оператор $\mathcal{A}$, определённый правилом

$$\mathcal{A}(f) = (x-a)^2(x-b)^2\mathcal{D}^2(f) + 2(x-a)(x-b)(2x-a-b)\mathcal{D}(f),$$

самосопряжён.

44.11. Доказать, что если линейные операторы $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$ в пространстве $\mathbb{R}[x]$ со скалярным произведением $\int_a^b f(x)g(x)\,dx$ определены правилами

$$\mathcal{A}(f) = \int_a^b P(x,y)f(y)\,dy, \qquad \mathcal{B}(f) = \int_a^b P(x,y)f(y)\,dy,$$

где $P(x,y) \in \mathbb{R}[x,y]$, то $\mathcal{B} = \mathcal{A}^*$.

44.12. Доказать, что если $\mathcal{A}$ — самосопряжённый оператор, то функция $f(x,y) = (\mathcal{A}x, y)$ эрмитова.

44.13. Доказать, что если $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$ — самосопряжённые операторы в метрическом векторном пространстве V и $(\mathcal{A}x, x) = (\mathcal{B}x, x)$ для всех $x \in V$, то $\mathcal{A} = \mathcal{B}$.

44.14. Доказать, что оператор $\mathcal{A}$ в евклидовом или эрмитовом пространстве V нормален тогда и только тогда, когда $|\mathcal{A}x| = |\mathcal{A}^*x|$ для всех $x \in V$.

44.15. Доказать, что если x — собственный вектор нормального оператора $\mathcal{A}$ в евклидовом или эрмитовом пространстве с собственным значением λ, то x — собственный вектор оператора $\mathcal{A}^*$ с собственным значением $\overline{\lambda}$.

44.16. Доказать, что собственные векторы нормального оператора в метрическом векторном пространстве с различными собственными значениями ортогональны.

44.17. Доказать, что:

а) ортогональное дополнение к линейной оболочке собственного вектора нормального оператора $\mathcal{A}$ в евклидовом или эрмитовом пространстве инвариантно относительно $\mathcal{A}$;

б) оператор в эрмитовом пространстве нормален тогда и только тогда, когда он имеет ортонормированный собственный базис;

в) оператор в евклидовом или метрическом пространстве нормален тогда и только тогда, когда любой его собственный вектор является собственным для сопряжённого оператора.

44.18. Доказать, что любое множество перестановочных нормальных операторов в эрмитовом пространстве имеет общий ортонормированный базис.

44.19. Доказать, что если нормальный оператор $\mathcal{A}$ в эрмитовом пространстве перестановочен с оператором $\mathcal{B}$, то $\mathcal{A}$ перестановочен с $\mathcal{B}^*$.

44.20. Пусть $\mathcal{A}, B$ — нормальные операторы в эрмитовом пространстве, причём характеристические многочлены этих операторов равны. Доказать, что матрицы операторов $\mathcal{A}$ и B в любом базисе подобны.

44.21. Пусть $\mathcal{A}$ — нормальный нильпотентный оператор в эрмитовом пространстве. Тогда $\mathcal{A} = 0$.

44.22. Оператор $\mathcal{A}$ в эрмитовом пространстве нормален тогда и только тогда, когда $\mathcal{A}^* = p(\mathcal{A})$ для некоторого полинома $p(t)$.

44.23. Для всякого многочлена

$$f(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i \in K[x]$$

положим

$$\overline{f}(x) = \sum_{i=0}^{n} \overline{a}_i x^i.$$

Доказать, что если $\mathcal{A}$ — оператор в метрическом пространстве, то:

а) $f(\mathcal{A})^* = \overline{f(\mathcal{A}^*)}$;

б) если $f(\mathcal{A}) = 0$, то $\overline{f(\mathcal{A}^*)} = 0$.

44.24. Пусть $\mathcal{A}$ — нормальный оператор в метрическом векторном пространстве V и $f(x) \in K[x]$.

Доказать, что:

а) ядро $\operatorname{Ker} f(\mathcal{A})$ инвариантно относительно $\mathcal{A}^*$;

б) $\operatorname{Ker} \overline{f(\mathcal{A}^*)} = \operatorname{Ker} f(\mathcal{A})$;

в) если $f(x) = f_1(x) f_2(x)$, где $f_1(x)$ и $f_2(x)$ взаимно просты, то $\operatorname{Ker} f(\mathcal{A})$ является ортогональной прямой суммой подпространств $\operatorname{Ker} f_1(\mathcal{A})$ и $\operatorname{Ker} f_2(\mathcal{A})$;

г) если $(f(\mathcal{A}))^n = 0$, то $f(\mathcal{A}) = 0$.

44.25. Пусть $\mathcal{A}$ — нормальный оператор в евклидовом пространстве V, причём $\mathcal{A}^2 = -E$. Доказать, что $\mathcal{A}^* = -\mathcal{A}$.

44.26. Пусть $p(t) = t^2 + at + b$ — вещественный неприводимый многочлен. Предположим, что $\mathcal{A}$ — нормальный оператор в евклидовом пространстве, причём $p(\mathcal{A}) = 0$. Доказать, что $\mathcal{A}^* = -\mathcal{A} - aE$.

44.27. Пусть $\mathcal{A}$ — нормальный линейный оператор в евклидовом пространстве V, U — двумерное инвариантное относительно $\mathcal{A}$ подпространство в V, причём $\mathcal{A}$ не имеет в U собственных векторов. Доказать, что:

а) U инвариантно относительно $\mathcal{A}^*$;

б) $U^{\perp}$ инвариантно относительно $\mathcal{A}$ и $\mathcal{A}^*$.

44.28. Пусть $\mathcal{A}$ — нормальный линейный оператор в двумерном евклидовом пространстве U, причём $\mathcal{A}$ не имеет собственных векторов. Пусть $\mathbf{e} = (e_1, e_2)$ — ортонормированный базис. Доказать, что матрица оператора $\mathcal{A}$ в базисе $\mathbf{e}$ имеет вид

$$\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}.$$

44.29. Пусть $\mathcal{A}$ — нормальный оператор в евклидовом пространстве V. Доказать, что в V существует ортонормированный базис, в котором матрица оператора $\mathcal{A}$ имеет блочно-диагональный вид

$$\begin{pmatrix} A_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & A_n \end{pmatrix},$$

размер клеток A_i не выше двух, причём клетки A_i размера два имеют вид

$$\begin{pmatrix} a_i & -b_i \\ b_i & a_i \end{pmatrix}.$$

44.30. Доказать, что всякий оператор в евклидовом (эрмитовом) пространстве является суммой симметрического и кососимметрического (эрмитова и косоэрмитова) операторов.

44.31. Доказать, что всякий оператор $\mathcal{A}$ в евклидовом пространстве V кососимметричен тогда и только тогда, когда для любого $x \in V$ векторы x и $\mathcal{A}x$ ортогональны.

44.32. Доказать, что для всякого кососимметрического оператора в евклидовом пространстве существует ортонормированный ба-

зис, в котором его матрица имеет клеточно-диагональный вид, где по главной диагонали стоят нули или клетки вида

$$\begin{pmatrix} 0 & -\alpha \\ \alpha & 0 \end{pmatrix}, \qquad \alpha \in \mathbb{R}.$$

§ 45. Самосопряжённые операторы. Приведение квадратичных функций к главным осям

45.1. Доказать, что произведение двух самосопряжённых операторов в метрическом векторном пространстве является самосопряжённым оператором тогда и только тогда, когда эти операторы перестановочны.

45.2. Доказать, что если $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$ — самосопряжённые операторы в метрическом векторном пространстве, то:

а) оператор $\mathcal{AB} + \mathcal{BA}$ самосопряжён;

б) при $\overline{\lambda} = -\lambda$ оператор $\lambda(\mathcal{AB} - \mathcal{BA})$ самосопряжён.

45.3. Доказать, что проектирование метрического пространства $L_1 \oplus L_2$ на подпространство L_1 параллельно L_2 является самосопряжённым оператором тогда и только тогда, когда L_1 и L_2 ортогональны.

45.4. Найти собственный ортонормированный базис и матрицу в этом базисе оператора, заданного в некотором ортонормированном базисе матрицей:

а) $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$; б) $\begin{pmatrix} 11 & 2 & -8 \\ 2 & 2 & 10 \\ -8 & 10 & 5 \end{pmatrix}$;

в) $\begin{pmatrix} 17 & -8 & 4 \\ -8 & 17 & -4 \\ 4 & -4 & 11 \end{pmatrix}$; г) $\begin{pmatrix} 5 & -1 & -1 \\ -1 & 5 & -1 \\ -1 & -1 & 5 \end{pmatrix}$;

д) $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$; е) $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$;

ж) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$.

45.5. Доказать, что функции

$$\frac{1}{\sqrt{2}},\ \cos x,\ \sin x,\ \ldots,\ \cos nx,\ \sin nx$$

составляют собственный ортонормированный базис для симметрического оператора $\dfrac{d^2}{dx^2}$ в пространстве

$$V_n = \{a_0 + a_1\cos x + b_1 \sin x + \ldots + a_n \cos nx + b_n \sin nx \mid \quad a_i, b_i \in \mathbb{R}\}$$

со скалярным произведением $\dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} f(x)g(x)\,dx.$

45.6. Доказать, что многочлены Лежандра (задача 43.44) составляют собственный базис для самосопряжённого оператора, определённого правилом

$$(\mathcal{A}(f))(x) = (x^2-1)f''(x) + 2xf'(x),$$

в пространстве многочленов степени $\leqslant n$ со скалярным произведением $\displaystyle\int_{-1}^{1} f(x)g(x)\,dx.$

45.7. Найти собственный ортонормированный базис и матрицу в этом базисе эрмитова оператора, заданного в некотором ортонормированном базисе матрицей:

а) $\begin{pmatrix} 3 & 2+2i \\ 2-2i & 1 \end{pmatrix}$; б) $\begin{pmatrix} 3 & -i \\ i & 3 \end{pmatrix}$; в) $\begin{pmatrix} 3 & 2-i \\ 2+i & 7 \end{pmatrix}$.

45.8. В пространстве матриц $\mathbf{M}_n(\mathbb{C})$ положим

$$(A, B) = \operatorname{tr}(A \cdot {}^t\overline{B}).$$

Доказать, что:

а) $\mathbf{M}_n(\mathbb{C})$ — эрмитово пространство;

б) всякая унитарная матрица в этом пространстве имеет длину $\sqrt{n}$;

в) операторы $X \mapsto AX$ и $X \mapsto {}^t\overline{A}X$ в пространстве $\mathbf{M}_n(\mathbb{C})$ сопряжены;

г) оператор $X \mapsto AX$, где A — унитарная матрица, является унитарным.

45.9. Доказать, что самосопряжённые операторы евклидова или эрмитова пространства перестановочны тогда и только тогда, когда они имеют общий ортонормированный собственный базис.

45.10. Доказать, что самосопряжённый линейный оператор в евклидовом или эрмитовом пространстве:

а) неотрицателен тогда и только тогда, когда все его собственные значения неотрицательны;

б) положителен тогда и только тогда, когда все его собственные значения положительны.

45.11. Доказать, что если $\mathcal{A}$ — оператор в евклидовом или эрмитовом пространстве, то $\mathcal{A}^*\mathcal{A}$ — неотрицательный самосопряжённый оператор и положителен тогда и только тогда, когда оператор $\mathcal{A}$ обратим.

45.12. Доказать, что если два неотрицательных самосопряжённых оператора в евклидовом или эрмитовом пространстве перестановочны, то их произведение — неотрицательный самосопряжённый оператор.

45.13. Доказать, что для всякого неотрицательного (положительного) самосопряжённого оператора $\mathcal{A}$ в евклидовом или эрмитовом пространстве существует такой неотрицательный (положительный) самосопряжённый оператор $\mathcal{B}$, что $\mathcal{B}^2 = \mathcal{A}$.

45.14. Пусть оператор $\mathcal{A}$ в трехмерном евклидовом пространстве в некотором ортонормированном базисе задан матрицей

$$\begin{pmatrix} 13 & 14 & 4 \\ 14 & 24 & 18 \\ 4 & 18 & 29 \end{pmatrix}.$$

Найти в этом базисе матрицу положительного самосопряжённого оператора $\mathcal{B}$ такого, что $\mathcal{B}^2 = \mathcal{A}$.

45.15. Доказать, что собственные значения произведения двух неотрицательных самосопряжённых операторов в евклидовом или эрмитовом пространстве, один из которых обратим, являются вещественными и неотрицательными.

45.16. Доказать, что неотрицательный самосопряжённый оператор ранга r в евклидовом или эрмитовом пространстве является суммой r неотрицательных самосопряжённых операторов ранга 1.

45.17. Доказать, что всякий линейный оператор $\mathcal{A}$ эрмитова пространства единственным образом представим в виде

$$\mathcal{A} = \mathcal{A}_1 + i\mathcal{A}_2,$$

где $\mathcal{A}_1$ и $\mathcal{A}_2$ — эрмитовы операторы.

45.18. Пусть A — вещественная матрица Якоби, т.е. симметрическая матрица вида

$$\begin{pmatrix} \alpha_1 & \beta_1 & 0 & \dots & 0 \\ \beta_1 & \alpha_2 & \beta_2 & \dots & 0 \\ 0 & \beta_2 & \alpha_3 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \beta_{n-1} \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \alpha_n \end{pmatrix},$$

причём $\beta_1 \cdot \ldots \cdot \beta_{n-1} \neq 0$. Доказать, что A не имеет кратных собственных значений.

45.19. Найти ортогональное преобразование, приводящее квадратичную функцию к главным осям:

а) $6x_1^2 + 5x_2^2 + 7x_3^2 - 4x_1x_2 + 4x_1x_3$;

б) $11x_1^2 + 5x_2^2 + 2x_3^2 + 16x_1x_2 + 4x_1x_3 - 20x_2x_3$;

в) $x_1^2 + x_2^2 + 5x_3^2 - 6x_1x_2 - 2x_1x_3 + 2x_2x_3$;

г) $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + 4x_1x_2 + 4x_1x_3 + 4x_2x_3$;

д) $x_1^2 - 5x_2^2 + x_3^2 + 4x_1x_2 + 2x_1x_3 + 4x_2x_3$;

е) $2x_1x_2 - 6x_1x_3 - 6x_2x_4 + 2x_3x_4$;

ж) $3x_1^2 + 8x_1x_2 - 3x_2^2 + 4x_3^2 - 4x_3x_4 + x_4^2$;

з) $x_1^2 + 2x_1x_2 + x_2^2 - 2x_3^2 - 4x_3x_4 - 2x_4^2$;

и) $9x_1^2 + 5x_2^2 + 5x_3^2 + 8x_4^2 + 8x_2x_3 - 4x_2x_4 + 4x_3x_4$;

к) $4x_1^2 - 4x_2^2 - 8x_2x_3 + 2x_3^2 - 5x_4^2 + 6x_4x_5 + 3x_5^2$.

45.20. Доказать, что если $f(x) = \sum_{i=1}^{r} \lambda_i x_i^2$, то

$$\max(|\lambda_1|, \ldots, |\lambda_r|) = \max_{|x|=1} |f(x)|.$$

45.21. Привести эрмитову квадратичную функцию к главным осям:

а) $5|x_1|^2 + i\sqrt{3}x_1\overline{x}_2 - i\sqrt{3}\overline{x}_1x_2 + 6|x_2|^2$;

б) $2|x_1|^2 + |x_2|^2 + 2ix_1\overline{x}_2 - 2i\overline{x}_1x_2 + 2i\overline{x}_2x_3 - 2ix_2\overline{x}_3$;

в) $|x_1|^2 + 2|x_2|^2 + 3|x_3|^2 - 2\overline{x}_1x_2 + 2ix_1\overline{x}_2 + 2i\overline{x}_2x_3 - 2ix_2\overline{x}_3$.

§ 46. Ортогональные и унитарные операторы. Полярное разложение

46.1. Доказать, что ортогональные (унитарные) операторы образуют группу относительно умножения.

46.2. Доказать, что если оператор в евклидовом (эрмитовом)

пространстве сохраняет длины векторов, то он ортогонален (унитарен).

46.3. Доказать, что если векторы x и y евклидова (эрмитова) пространства имеют одинаковую длину, то существует ортогональный (унитарный) оператор, переводящий x в y.

46.4. Пусть $x_1, \ldots, x_k$ и $y_1, \ldots, y_k$ — две системы векторов евклидова (эрмитова) пространства. Доказать, что ортогональный (унитарный) оператор, переводящий x_i в y_i $(i = 1, \ldots, k)$, существует тогда и только тогда, когда $(x_i, x_j) = (y_i, y_j)$ при всех i и j от 1 до k.

46.5. а) Пусть w — ненулевой вектор евклидова (эрмитова) пространства. Для любого вектора x положим

$$U_w(x) = x - 2\frac{(x, w)}{(w, w)}w.$$

Доказать, что $U_w(w) = -w$ и $U_w(y) = y$, если $x \in \langle w\rangle^{\perp}$.

б) Пусть x, y — ненулевые векторы евклидова (эрмитова) пространства, причём $y \notin \langle x\rangle$. Доказать, что найдется такой вектор w, что

$$U_w(x) = \frac{\|x\|}{\|y\|}\,y.$$

46.6. Найти канонический базис и матрицу в этом базисе ортогонального оператора, заданного в некотором ортонормированном базисе матрицей:

а) $\frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$; б) $\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 & -\sqrt{2} \\ 1 & 1 & \sqrt{2} \\ \sqrt{2} & -\sqrt{2} & 0 \end{pmatrix}$;

в) $\frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 2 & 2 & -1 \\ -1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$; г) $\frac{1}{4}\begin{pmatrix} 3 & 1 & -\sqrt{6} \\ 1 & 3 & \sqrt{6} \\ \sqrt{6} & -\sqrt{6} & 2 \end{pmatrix}$;

д) $\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & -\sqrt{2} & -1 \\ 1 & \sqrt{2} & -1 \\ \sqrt{2} & 0 & \sqrt{2} \end{pmatrix}$; е) $\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$;

ж) $\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$; з) $\frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & 2 & -1 \\ -1 & 2 & 2 \\ 2 & -1 & 2 \end{pmatrix}$;

и) $\frac{1}{9}\begin{pmatrix} 1 & -8 & 4 \\ 4 & 4 & 7 \\ -8 & 1 & 4 \end{pmatrix}$; к) $\frac{1}{7}\begin{pmatrix} 3 & -2 & 6 \\ 6 & 3 & -2 \\ -2 & 6 & 3 \end{pmatrix}$;

л) $\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{3\sqrt{2}} & \frac{4}{3\sqrt{2}} & \frac{1}{3\sqrt{2}} \\ \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}$; м) $\begin{pmatrix} \frac{3}{4} & \frac{1}{4} & +\frac{\sqrt{6}}{4} \\ \frac{1}{4} & \frac{3}{4} & -\frac{\sqrt{6}}{4} \\ -\frac{\sqrt{6}}{4} & +\frac{\sqrt{6}}{4} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$.

46.7. Найти собственный ортонормированный базис и матрицу в этом базисе унитарного оператора, заданного в некотором ортонормированном базисе матрицей:

а) $\begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$ $(\alpha \neq k\pi)$; б) $\frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix} 1+i & 1 \\ -1 & 1-i \end{pmatrix}$;

в) $\frac{1}{9}\begin{pmatrix} 4+3i & 4i & -6-2i \\ -4i & 4-3i & -2-6i \\ 6+2i & -2-6i & 1 \end{pmatrix}$; г) $\frac{1}{4}\begin{pmatrix} 2+3i & -\sqrt{3} \\ \sqrt{3} & 2-3i \end{pmatrix}$;

д) $\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} i & 1 \\ -1 & -i \end{pmatrix}$.

46.8. Доказать, что унитарная матрица порядка 2 с определителем, равным 1, подобна вещественной ортогональной матрице.

46.9. Доказать, что если $\mathcal{A}$ — унитарный оператор в эрмитовом пространстве и оператор $\mathcal{A}-\mathcal{E}$ обратим, то оператор $i(\mathcal{A}-\mathcal{E})^{-1}(\mathcal{A}+\mathcal{E})$ эрмитов.

46.10. Пусть $\mathcal{A}$ — эрмитов оператор. Доказать, что:

а) оператор $\mathcal{A} - i\mathcal{E}$ обратим;

б) оператор $\mathcal{B} = (\mathcal{A} - i\mathcal{E})^{-1}(\mathcal{A} + i\mathcal{E})$ унитарен;

в) оператор $\mathcal{B} - \mathcal{E}$ обратим;

г) $\mathcal{A} = i(\mathcal{B} - \mathcal{E})^{-1}(\mathcal{B} + \mathcal{E})$.

46.11. Доказать, что для всякого эрмитова оператора $\mathcal{A}$ оператор $e^{i\mathcal{A}}$ унитарен и, обратно, всякий унитарный оператор представим в виде $e^{i\mathcal{A}}$, где $\mathcal{A}$ — эрмитов оператор.

46.12. Пусть V — евклидово пространство с базисом (e_1, e_2, e_3) и $\mathcal{A}$ — ортогональный оператор в V с определителем 1. Доказать, что

$$\mathcal{A} = \mathcal{A}_\varphi \mathcal{B}_\theta \mathcal{A}_\psi,$$

где $\mathcal{A}_\varphi$ и $\mathcal{A}_\psi$ — повороты в плоскости $\langle e_1, e_2\rangle$ на углы φ и ψ, $\mathcal{B}_\theta$ — поворот плоскости $\langle e_2, e_3\rangle$ на угол θ.

46.13. Пусть V — пространство эрмитовых матриц порядка 2 над полем $\mathbb{R}$ с нулевым следом и $(A, B) = \operatorname{tr} AB$ $(A, B \in V)$. Доказать, что:

а) V — евклидово пространство с ортонормированным базисом

$$e_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad e_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad e_3 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 0 & i \\ -i & 0 \end{pmatrix};$$

б) оператор, определенный правилом $X \mapsto AX^t\overline{A}$ $(X \in V)$, где A — унитарная матрица, является ортогональным;

в) для всякого ортогонального оператора $\mathcal{A}$ в пространстве V существует такая унитарная матрица порядка 2 с определителем 1, что $\mathcal{A}(X) = AX^t\overline{A}$ для всех $X \in V$.

46.14. Доказать, что всякий ортогональный оператор $\mathcal{A}$ в евклидовом пространстве является произведением отражений относительно гиперплоскостей и минимальное число множителей равно коразмерности подпространства $\operatorname{Ker}(\mathcal{A} - \mathcal{E})$.

46.15. Доказать, что если $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$ — положительные самосопряжённые операторы, $\mathcal{A} = \mathcal{B}\mathcal{C}$ и оператор $\mathcal{C}$ ортогонален (унитарен), то $\mathcal{C} = \mathcal{E}$.

46.16. Представить в виде произведения положительного самосопряжённого и ортогонального операторов оператор, заданный в некотором ортонормированном базисе матрицей:

а) $\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$; б) $\begin{pmatrix} 1 & -4 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$; в) $\begin{pmatrix} 4 & -2 & 2 \\ 4 & 4 & -1 \\ -2 & 4 & 2 \end{pmatrix}$.

46.17. Доказать, что в разложении $\mathcal{A} = \mathcal{B}\mathcal{C}$ оператора в евклидовом (эрмитовом) пространстве, где $\mathcal{B}$ — неотрицательный самосопряжённый (эрмитов) оператор, $\mathcal{C}$ — ортогональный (унитарный) оператор, оператор $\mathcal{B}$ определён однозначно.

46.18. Доказать, что для всякого унитарного оператора $\mathcal{A}$ и любого натурального числа k существует унитарный оператор $\mathcal{B}$, являющийся многочленом от $\mathcal{A}$ и такой, что $\mathcal{B}^k = \mathcal{E}$.

* * *

46.19. Доказать, что самосопряжённый оператор $\mathcal{A}$ положителен, когда коэффициенты $c_1, \ldots, c_n$ его характеристического полинома $t^n + c_1 t^{n-1} + \ldots + c_n$ отличны от нуля и имеют чередующиеся знаки.

46.20. Пусть $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$ — самосопряжённые операторы, причём $\mathcal{A}$ положителен. Доказать, что собственные значения оператора $\mathcal{AB}$ вещественны.

46.21. Пусть $\mathcal{A}$ — положительный и $\mathcal{B}$ — неотрицательный операторы. Доказать, что собственные значения $\mathcal{AB}$ вещественны и неотрицательны.

46.22. Пусть $\mathcal{A}$ — самосопряжённый оператор. Доказать, что следующие условия эквивалентны:

а) все собственные значения $\mathcal{A}$ лежат в интервале $[a, b]$;

б) оператор $\mathcal{A} - \lambda\mathcal{E}$ отрицателен при $\lambda > b$ и положителен при $\lambda < a$.

46.23. Пусть $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$ — самосопряжённые операторы, собственные значения которых лежат соответственно в интервалах $[a, b]$ и $[c, d]$. Доказать, что собственные значения $\mathcal{A} + \mathcal{B}$ лежат в интервале $[a + c, b + d]$.

46.24. Пусть $\mathcal{A}$ — самосопряжённый положительный оператор. Доказать, что оператор $e^{\mathcal{A}}$ положителен и самосопряжён.

46.25. Пусть $\mathcal{A} = \mathcal{BU}$ — полярное разложение оператора $\mathcal{A}$, где $\mathcal{B}$ — неотрицательный самосопряжённый оператор, $\mathcal{U}$ — унитарный оператор. Доказать, что $\mathcal{A}$ нормален тогда и только тогда, когда $\mathcal{BU} = \mathcal{UB}$.

46.26. Пусть $\mathcal{A} = \mathcal{BU}$ — полярное разложение оператора $\mathcal{A}$, где $\mathcal{B}$ — неотрицательный самосопряжённый оператор, $\mathcal{U}$ — унитарный оператор. Предположим, что $\lambda_1 \geqslant \ldots \geqslant \lambda_n \geqslant 0$ — собственные значения $\mathcal{B}$. Рассмотрим в пространстве операторов норму, соответствующую согласно утверждению задачи 42.5, б) норме в эрмитовом пространстве. Доказать, что:

а) $||\mathcal{A}|| = \lambda_1$;

б) если оператор $\mathcal{A}$ обратим, то $\lambda_n > 0$ и $||\mathcal{A}^{-1}|| = \dfrac{1}{\lambda_n}$.

46.27. Пусть A — невырожденная квадратная комплексная матрица размера n. Рассмотрим систему линейных уравнений $AX = b$. Пусть X_0 — точное решение, X_1 — приближенное, $r = b - AX_1$ —

вектор невязки. Доказать, что

$$\frac{\|X_0 - X_1\|}{\|X_0\|} \leqslant \|A\| \cdot \|A^{-1}\| \cdot \frac{\|r\|}{\|b\|}.$$

46.28. Пусть A — квадратная комплексная матрица. Доказать, что $A = U_1 D U_2$, где U_1, U_2 — унитарные матрицы, D — диагональная матрица. По главной диагонали D стоят квадратные корни из собственных значений матрицы $A \cdot {}^t A$.

46.29. Пусть $A = (a_{ij})$ — комплексная квадратная матрица порядка n. Доказать, что:

а) $\det(A \cdot {}^t\overline{A}) \leqslant \left(\sum\limits_{i=1}^{n} |a_{1i}|^2\right) \ldots \left(\sum\limits_{i=1}^{n} |a_{ni}|^2\right)$;

б) $|\det A| \leqslant n^{n/2} \cdot (\max\limits_{ij} |a_{ij}|)^n$;

в) указанная в б) оценка точная.

46.30. Пусть $A \in \mathbf{M}_n(\mathbb{C})$. Доказать, что $A = UR$, где U — унитарная матрица, а R — верхнетреугольная. Если $A \in \mathbf{M}_n(\mathbb{R})$, то $A = QR$, где Q — ортогональная, а R — вещественная верхнетреугольная матрица.

46.31. Пусть $A \in \mathbf{M}_n(\mathbb{C})$. Доказать, что ${}^t\overline{A}A = {}^t\overline{R}R$, где R — верхнетреугольная матрица. Если $A \in \mathbf{M}_n(\mathbb{R})$, то R можно выбрать из $\mathbf{M}_n(\mathbb{R})$.

46.32. Доказать, что всякая унитарная матрица является произведением вещественной ортогональной и комплексной симметрической матриц.

46.33. Пусть V — комплексное векторное пространство со скалярным произведением (в поле $\mathbb{C}$ рассматривается тождественный автоморфизм). Доказать, что для любого симметрического оператора $\mathcal{A}$ в пространстве V существует жорданов базис, в котором матрица скалярного произведения клеточно-диагональна с клетками

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & \ldots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \ldots & 1 & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 1 & \ldots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & \ldots & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

того же размера, что и жордановы клетки матрицы оператора $\mathcal{A}$.

Глава XI

ТЕНЗОРЫ

§ 47. Основные понятия

В этом параграфе V — n-мерное векторное пространство, $n \geqslant 2$, $(e_1, \ldots, e_n)$ — базис V, $(e^1, \ldots, e^n)$ — сопряжённый базис пространства V^*.

47.1. Какие из следующих тензоров, заданных своими координатами, разложимы:

а) $t_{ij} = ij$; б) $t^i_j = \delta_{1i} j$; в) $t^{ij} = i + j$;

г) $t^k_{ij} = 2^{i+j+k^2}$; д) $t^{ij}_k = \delta_{ij}\delta_{jk}$; е) $t_{ijk} = \delta_{ij}\delta_{jk}\delta_{k1}$?

47.2. Найти значение $F(v, f)$ тензора

$$F = e^1 \otimes e_2 + e^2 \otimes (e_1 + 3e_3) \in \mathbb{T}^1_1(V),$$

где $v = e_1 + 5e_2 + 4e_3, \quad f = e^1 + e^2 + e^3$.

47.3. Найти значение тензора $A \otimes B - B \otimes A \in \mathbb{T}^0_5(V)$ от набора $(v_1, \ldots, v_5)$:

а) $A = e^1 \otimes e^2 + e^2 \otimes e^3 + e^2 \otimes e^2 \in \mathbb{T}^0_2(V)$,
$B = e^1 \otimes e^1 \otimes (e^1 - e^3) \in \mathbb{T}^0_3(V)$,
$v_1 = e_1, \quad v_2 = e_1 + e_2, \quad v_3 = e_2 + e_3, \quad v_4 = v_5 = e_2$;

б) $A = e^1 \otimes e^2 + e^2 \otimes e^3 + e^3 \otimes e^1 \in \mathbb{T}^0_2(V)$,
$B \in \mathbb{T}^0_3(V)$, все координаты тензора B равны 1,
$v_1 = e_1 + e_2, \quad v_2 = e_2 + e_3, \quad v_3 = e_3 + e_1, \quad v_4 = v_5 = e_2$.

47.4. Найти значение $F(v, v, v, f, f)$ тензора $F \in \mathbb{T}^2_3(V)$, если все координаты тензора F равны 3, и $v = e_1 + 2e_2 + 3e_3 + 4e_4$, $f = e^1 - e^4$.

47.5. Найти координату $\widetilde{t}^{12}_{123}$ тензора $T \in \mathbb{T}^2_3(V)$, все координаты которого в базисе (e_1, e_2, e_3) равны 2, в базисе

$$(\widetilde{e}_1, \widetilde{e}_2, \widetilde{e}_3) = (e_1, e_2, e_3) \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

47.6. Найти координаты с индексами 1, 2, 3, 3, 3 произведений $A \otimes B$ и $B \otimes A$ тензоров

$$A = e^1 \otimes e^2 + e^3 \otimes e^3 \in \mathbb{T}^0_2(V), \qquad B = B(v_1, v_2, v_3) \in \mathbb{T}^0_3(V),$$

где $B(v_1, v_2, v_3)$ — определитель, составленный из координат v_1, v_2, v_3 в базисе (e_1, e_2, e_3).

47.7. Найти координаты:

а) $\widetilde{t}^1_{21}$ тензора $e^1 \otimes e^2 \otimes (e_1 + e_2) \in \mathbb{T}^1_2(V)$ в базисе

$$(\widetilde{e}_1, \widetilde{e}_2) = (e_1, e_2) \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix};$$

б) $\widetilde{t}^{12}_1$ тензора $T \in \mathbb{T}^2_1(V)$, все координаты которого равны 1, в базисе

$$(\widetilde{e}_1, \widetilde{e}_2) = (e_1, e_2) \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 5 \end{pmatrix};$$

в) $\widetilde{t}^{12}_{31}$ тензора $e^2 \otimes e^1 \otimes e_3 \otimes e_1 + e^3 \otimes e^3 \otimes e_1 \otimes e_2 \in \mathbb{T}^2_2(V)$ в базисе

$$(\widetilde{e}_1, \widetilde{e}_2, \widetilde{e}_3) = (e_1, e_2, e_3) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

47.8. Найти координаты тензоров:

а) $(e_1 + e_2) \otimes (e_1 - e_2)$;

б) $(e_1 + e_2) \otimes (e_1 + e_2)$;

в) $(e_1 + 2e_2) \otimes (e_1 + e_2) - (e_1 + e_2) \otimes (e_1 + 2e_2)$;

г) $(e_1 + 2e_2) \otimes (e_3 + e_4) - (e_1 - 2e_2) \otimes (e_3 - e_4)$.

47.9. Пусть $n = 4$, $T = e^1 \otimes e_2 + e^2 \otimes e_3 + e^3 \otimes e_4 \in \mathbb{T}^1_1(V)$. Найти все такие:

а) $f \in V^*$, что $T(v, f) = 0$ для любого $v \in V$;

б) $v \in V$, что $T(v, f) = 0$ для любого $f \in V^*$.

47.10. Пусть $n = 3$, поле $K = \mathbf{Z}_p$, $T = e^1 \otimes e_2 + e^2 \otimes e_3 \in \mathbb{T}_1^1(V)$. Найти число пар $(v, f) \in V \times V^*$, для которых $T(v, f) = 0$.

47.11. Найти ранг билинейных функций:

а) $(e^1 + e^2) \otimes (e^1 + e^3) - e^1 \otimes e^1 - e^2 \otimes e^2$;

б) $(e^1 - 2e^3) \otimes (e^1 + 3e^2 - e^4) + (e^1 - 2e^3) \otimes e^4$;

в) $(e^1 + e^3) \otimes (e^2 + e^4) - (e^2 - e^4) \otimes (e^1 - e^3)$.

47.12. Доказать, что:

а) ранг билинейной функции $u \otimes v$, где элементы $u, v \in V^*$ отличны от 0, равен 1;

б) ранг билинейной функции $\sum_{i=1}^{k} u_i \otimes v_i$, где $u_i, \ldots, u_k$, $v_1, \ldots$ $\ldots, v_k \in V^*$, не превосходит k.

47.13. Найти полную свертку тензоров:

а) $(e_1 + 3e_2 - e_3) \otimes (e^1 - 2e^3 + 3e^4) - (e_1 + e_3) \otimes (e^1 - 3e^3 + e^4)$;

б) $(e_1 + 2e_2 + 3e_3) \otimes (e^1 + e^2 - 2e^3) - (e_1 - e_2 + e_4) \otimes (e^2 - 2e^3 - 3e^4)$;

в) $e_1 \otimes (e^1 + e^2 + e^3 + e^4) + e_2 \otimes (e^1 + 2e^2 + 2e^3 + 4e^4) + 2e_3 \otimes (e^1 - e^2 - e^4)$.

47.14. Пусть $\alpha\colon\ V^* \otimes V \to L(V)$ — канонический изоморфизм. Вычислить $\alpha(t)v$ при $n = 4$, где:

а) $t = e^1 \otimes e_3$, $\quad v = e_1 + e_2 + e_3 + e_4$;

б) $t = (e^1 + e^2) \otimes (e_3 + e_4)$, $\quad v = 2e_1 + 3e_2 + 2e_3 + 3e_4$.

47.15. Найти $x \in V^* \otimes V$ такой, что $\alpha(x) = \alpha(t)^2$ для t, равного:

а) $(2e^1 - e^3) \otimes (e_1 + e_2)$; б) $e^1 \otimes e_2 + (e^1 + 2e^2) \otimes e_3$.

47.16. Пусть на пространстве V задано скалярное произведение с матрицей

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Провести опускание и подъем индексов у тензоров:

а) $e^1 \otimes e_3 + e^2 \otimes e_4$; б) $(e^1 + e^2) \otimes (e_3 + e_4) - (e^1 + e^3) \otimes e_3$;

в) $t_j^i = \delta_{2i} + \delta_{4j}$; г) $t_j^i = i\delta_{ij}$.

47.17. Доказать, что если оператор $\mathcal{A}$ диагонализируем, то оператор $\mathcal{A}^{\otimes^k}$ также диагонализируем.

47.18. Пусть a — след оператора $\mathcal{A}$, d — его определитель. Найти:

а) $\operatorname{tr}(\mathcal{A} \otimes \mathcal{A})$; б) $\operatorname{tr}\left(\mathcal{A}^{\otimes^k}\right)$; в) $\det(\mathcal{A} \otimes \mathcal{A})$.

47.19. Найти жорданову форму матрицы оператора $\mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$, если матрицы операторов $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$ имеют соответственно жорданову форму:

а) $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$; б) $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$;

в) $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

§ 48. Симметрические и кососимметрические тензоры

48.1. Установить изоморфизм пространств $(\mathbb{T}^p_q(V))^*$ и $\mathbb{T}^q_p(V)$.

48.2. Доказать следующие свойства операторов Sym и Alt в пространстве $\mathbb{T}^q_0(V)$:

а) пересечение ядер $\operatorname{Ker}\operatorname{Sym}$ и $\operatorname{Ker}\operatorname{Alt}$ равно нулю при $q = 2$ и отлично от нуля при $q > 2$;

б) $\operatorname{Sym} \cdot \operatorname{Alt} = \operatorname{Alt} \cdot \operatorname{Sym} = 0$;

в) оператор $\mathcal{P} = (\mathcal{E} - \operatorname{Sym})(\mathcal{E} - \operatorname{Alt})$ — проектирование.

Найти ранг оператора $\mathcal{P}$ при $q = 3$.

48.3. Доказать, что если основное поле имеет характеристику 0, то линейная оболочка тензоров вида v^k $(v \in V)$ совпадает с $S^k(V)$.

48.4. Установить изоморфизм:

а) $S^q(V_1 \oplus V_2)$ и $\oplus_{i=1}^q S^i(V_1) \otimes S^{q-i}(V_2)$;

б) $\Lambda^q(V_1 \oplus V_2)$ и $\oplus_{i=1}^q \Lambda^i(V_1) \otimes \Lambda^{q-i}(V_2)$.

48.5. Доказать, что при $\dim V > 2$ пространства $\Lambda^2(\Lambda^2(V))$ и $\Lambda^4(V)$ не совпадают.

48.6. Доказать, что для любой невырожденной билинейной функции f на пространстве V существует невырожденная билинейная функция F на пространстве $\Lambda^2 V$, для которой

$$F(v_1 \wedge v_2, v_3 \wedge v_4) = \det \begin{pmatrix} f(v_1, v_3) & f(v_1, v_4) \\ f(v_2, v_3) & f(v_2, v_4) \end{pmatrix}.$$

48.7. Найти след оператора $\Lambda^q(\mathcal{A})$ по его матрице $\mathcal{A}$:

а) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ $(q = 2)$; б) $\begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -4 & 4 \\ 0 & 0 & -3 & 1 \end{pmatrix}$ $(q = 4)$;

в) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ $(q = 2, 3)$.

48.8. Найти жорданову форму матрицы оператора $\Lambda^2(\mathcal{A})$, если матрица $\mathcal{A}$ имеет жорданову форму:

а) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$; б) $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$;

в) $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

48.9. Доказать, что если $\operatorname{tr} \Lambda^q(\mathcal{A}) = 0$ для всех $q > 0$, то оператор $\mathcal{A}$ нильпотентен.

48.10. Доказать, что в n-мерном пространстве V ненулевой оператор вида $\Lambda^{n-1}(\mathcal{A})$ на $\Lambda^{n-1}(V)$ либо невырожден, либо имеет ранг 1.

48.11. Доказать, что k-мерное подпространство $W \subseteq V$ инвариантно относительно линейного оператора $\mathcal{A}$ тогда и только тогда, когда $\Lambda^k W$ инвариантно относительно $\Lambda^k(\mathcal{A})$.

48.12. Доказать, что для всякого бивектора $\xi \in \Lambda^2(V)$ существует базис $(e_1, \ldots, e_n)$ пространства V, для которого

$$\xi = e_1 \wedge e_2 + e_3 \wedge e_4 + \ldots + e_{k-1} \wedge e_k$$

при некотором чётном k.

48.13. (*Лемма Картана.*) Пусть система $v_1, \ldots, v_k$ векторов пространства V линейно независима и $t_1, \ldots, t_k \in V$. Доказать, что

$$v_1 \wedge t_1 + \ldots + v_k \wedge t_k = 0$$

тогда и только тогда, когда $t_1, \ldots, t_k \in \langle v_1, \ldots, v_k \rangle$, и матрица, составленная из элементов α_{ij}, где $t_i = \sum_{j=1}^{k} \alpha_{ij} v_j$, симметрическая.

48.14. Доказать, что бивектор ξ разложим тогда и только тогда, когда $\xi \wedge \xi = 0$.

48.15. Доказать, что для $\xi \in \Lambda^p(V)$, $x \in V$, $x \neq 0$, равенство $\xi \wedge x = 0$ выполняется тогда и только тогда, когда $\xi = x \wedge \theta$ для некоторого $\theta \in \Lambda^{p-1}(V)$.

48.16. Пусть $\xi \in \Lambda^p(V)$ — ненулевой p-вектор и

$$W = \{x \in V \mid \xi \wedge x = 0\}.$$

Доказать, что:

а) $\dim W \leqslant p$;

б) $\dim W = p$ тогда и только тогда, когда ξ разложим;

в) наименьшее подпространство, в p-й степени которого лежит p-вектор ξ, есть $U = \{\xi(v, \ldots, v_{p-1}) \mid v_i \in V^*\}$.

г) $\dim U \geqslant p$, причём $\dim U = p$ тогда и только тогда, когда ξ разложим.

48.17. Доказать, что внутреннее умножение $i(v^*)$, где $v^* \in V^*$, является дифференцированием алгебры $S(V)$.

48.18. Доказать, что операторы внутреннего умножения $i(v_1^*)$ и $i(v_2^*)$, $v_1^*, v_2^* \in V^*$, коммутируют в алгебре $S(V)$ и антикоммутируют в алгебре $\Lambda(V)$.

Глава XII

АФФИННАЯ, ЕВКЛИДОВА И ПРОЕКТИВНАЯ ГЕОМЕТРИЯ

§ 49. Аффинные пространства

49.1. Доказать, что для любых точек a, b, c аффинного пространства $\overline{ab} + \overline{bc} = \overline{ac}$.

49.2. Доказать, что если $\sum_{i=1}^{k} \lambda_i = 0$, то для любых точек $a_1, \ldots$ $\ldots, a_k$ аффинного пространства вектор $\sum_{i=1}^{k} \lambda_i \overline{aa_i}$ не зависит от точки a.

49.3. Доказать, что если $\sum_{i=1}^{k} \lambda_i = 1$, то для любых точек $a_1, \ldots$ $\ldots, a_k$ аффинного пространства точка $a + \sum_{i=1}^{k} \lambda_i \overline{aa_i}$ (обозначаемая $\sum_{i=1}^{k} \lambda_i a_i$) не зависит от точки a.

49.4. Пусть (P, U) — аффинное подпространство (плоскость) аффинного пространства. Доказать, что:

а) $U = \{\overline{pq} \mid \ p, q \in P\}$;

б) $P = p + U$ для любой точки $p \in P$.

49.5. Доказать, что пересечение любого семейства плоскостей аффинного пространства либо пусто, либо является плоскостью.

49.6. Пусть S — непустое подмножество аффинного пространства A. Доказать, что:

а) подмножество $\langle S \rangle = a + \langle \overline{ax} \mid x \in S \rangle$, где $a \in S$, не зависит от a и является наименьшей плоскостью, содержащей S;

б) $\langle S \rangle = \left\{ \sum_{i=1}^{k} \lambda_i a_i \;\middle|\; \sum_{i=1}^{k} \lambda_i = 1,\ a_i \in S,\ k \in \mathbb{N} \right\}$.

49.7. Доказать, что подмножество аффинного независимого множества аффинно независимо.

49.8. Доказать, что любое максимальное аффинно независимое подмножество множества S в аффинном пространстве содержит $k+1$ точек, где $k = 1 + \dim\langle S\rangle$.

49.9. Пусть в аффинном пространстве (A, V) заданы две системы аффинных координат: $(a, e_i, \ldots, e_n)$ и $(a', e'_1, \ldots, e'_n)$, а $(a_1, \ldots, a_n)$ — координаты точки a' в первой системе и $B = (b_{ij})$ — матрица перехода от базиса $(e_1, \ldots, e_n)$ к базису $(e'_1, \ldots, e'_n)$ в векторном пространстве V. Выразить координаты $(x_1, \ldots, x_n)$ точки $x \in A$ в первой системе через её координаты $(x'_1, \ldots, x'_n)$ во второй системе, и наоборот.

49.10. Найти систему уравнений и параметрические уравнения, задающие аффинную оболочку множества:

а) $(-1, 1, 0, 1), (0, 0, 2, 0), (-3, -1, 5, 4), (2, 2, -3, -3)$;

б) $(1, 1, 1, -1), (0, 0, 6, -7), (2, 3, 6, -7), (3, 4, 1, -1)$.

49.11. Пусть $a_i = (a_{i1}, \ldots, a_{in})$ $(i = 1, \ldots, s)$ — точки в n-мерном аффинном пространстве. Доказать неравенства

$$\operatorname{rk}(a_{ij}) - 1 \leqslant \dim\langle a_1, \ldots, a_s\rangle \leqslant \operatorname{rk}(a_{ij})$$

и указать условия, при которых левые неравенства превращаются в равенства.

49.12. Доказать, что любые две прямые в аффинном пространстве содержатся в трехмерной плоскости.

49.13. Пусть $P_1 = a_1 + L_1$, $P_2 = a_2 + L_2$ — две плоскости в аффинном пространстве. Доказать, что:

а) $P_1 \cap P_2 = \varnothing$ тогда и только тогда, когда $\overline{a_1a_2} \notin L_1 + L_2$;

б) если $P_1 \cap P_2 \neq \varnothing$, то

$$\dim\langle P_1 \cup P_2\rangle = \dim P_1 + \dim P_2 - \dim(P_1 \cap P_2);$$

в) если $P_1 \cap P_2 = \varnothing$, то

$$\dim\langle P_1 \cup P_2\rangle = \dim P_1 + \dim P_2 - \dim(L_1 \cap L_2) + 1.$$

49.14. Доказать, что для любых плоскостей $P_1, \ldots, P_s$ аффинного пространства

$$\dim\langle P_1 \cup \ldots \cup P_s\rangle \leqslant \dim P_1 + \ldots + \dim P_s + s - 1.$$

49.15. Доказать, что *степень параллельности* двух непересекающихся плоскостей P_1, P_2 равна:

а) наибольшему из чисел k, для которых существуют параллельные плоскости $Q_1 \subseteq P_1$ и $Q_2 \subseteq P_2$ размерности k;

б) наибольшей размерности плоскости, содержащейся в P_1 и параллельной P_2, если $\dim P_1 \leqslant \dim P_2$.

49.16. Найти размерность аффинной оболочки объединения плоскостей P_1 и P_2 и размерность их пересечения или степень их параллельности, если:

а) $P_1 : \begin{cases} 3x_1 + 2x_2 + 2x_3 + 2x_4 = 2, \\ 2x_1 + 3x_2 + 2x_3 + 5x_4 = 3, \end{cases}$

$P_2 : \begin{cases} 2x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 5, \\ 5x_1 - x_2 + 3x_3 - 5x_4 = 2; \end{cases}$

б) $P_1 : \begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 + 5x_4 = 6, \\ 4x_1 + 5x_2 + 4x_3 + 3x_4 = 2, \end{cases}$

$P_2 : \begin{cases} x_1 = 1 - t_1, \\ x_2 = 1 + 2t_1 + t_2, \\ x_3 = 1 - 2t_1 + 2t_2, \\ x_4 = 1 + t_1 + t_2; \end{cases}$

в) $P_1 : \begin{cases} 3x_1 = 1 + 2t_1, \\ x_2 = 3 + 2t_2, \\ x_3 = 5 + 4t_2 \\ x_4 = 4 + 3t_1 + 2t_2 \\ x_5 = 2 + t_1 + 2t_2, \end{cases}$ $\quad P_2 : \begin{cases} x_1 = -6 + 4t, \\ x_2 = 2 + 3t, \\ x_3 = 2 + 7t, \\ x_4 = -2 + 5t, \\ x_5 = -3 + 3t. \end{cases}$

49.17. Пусть $P_1 = a_1 + L_1$ и $P_2 = a_2 + L_2$ — две непересекающиеся плоскости. Доказать, что минимальная размерность плоскости, содержащей P_1 и параллельной P_2, равна

$$\dim P_1 + \dim P_2 - \dim(L_1 \cap L_2).$$

49.18. Пусть P_1, P_2 — две плоскости в аффинном пространстве A над полем K, $\langle P_1 \cup P_2 \rangle = A$, $P_1 \cap P_2 = \varnothing$ и пусть λ — фиксированный элемент из K, $\lambda \neq 0, 1$. Найти геометрическое место точек $\lambda a_1 + (1 - \lambda) a_2$, где a_1 и a_2 пробегают соответственно P_1 и P_2.

49.19. Пусть $P_1 = a_1 + L_1$ и $P_2 = a_2 + L_2$ — скрещивающиеся плоскости в аффинном пространстве. Доказать, что для любой точки

$b \notin P_1 \cup P_2$ существует не более одной прямой, проходящей через b и пересекающей P_1 и P_2, причём такая прямая существует тогда и только тогда, когда $b \in \langle P_1 \cup P_2 \rangle$, но $\overline{a_1 b} \notin L_1 + L_2$ и $\overline{a_2 b} \notin L_1 + L_2$.

49.20. Найти прямую, проходящую через точку b и пересекающую плоскости P_1 и P_2:

а) $b = (6, 5, 1, -1)$,

$$P_1 : \begin{cases} -x_1 + 2x_2 + x_3 = 1, \\ x_1 + x_4 = 1, \end{cases} \qquad P_2 : \begin{cases} x_1 = 4 + t, \\ x_2 = 4 + 2t, \\ x_3 = 5 + 3t, \\ x_4 = 4 + 4t; \end{cases}$$

б) $b = (5, 9, 2, 10, 10)$,

$$P_1 : \begin{cases} x_1 - x_2 - x_4 + x_5 = 2, \\ x_1 - x_3 - x_4 + x_5 = 1, \\ 5x_1 + 3x_2 - 2x_3 - x_5 = 0, \end{cases} \qquad P_2 : \begin{cases} x_1 = 3, \\ x_2 = 2 + 6t_1 + 5t_2, \\ x_3 = 0, \\ x_4 = 5 + 4t_1 + 3t_2, \\ x_5 = 6 + t_1 + 2t_2; \end{cases}$$

в) $b = (6, -1, -5, 1)$,

$$P_1 : \begin{cases} x_1 = 3 + 2t, \\ x_2 = 5 - t, \\ x_3 = 3 - t, \\ x_4 = 6 + t, \end{cases} \qquad P_2 : \begin{cases} -6x_1 + 2x_2 - 5x_3 + 4x_4 = 1, \\ 9x_1 - x_2 + 6x_3 - 6x_4 = 5. \end{cases}$$

49.21. Пусть $a_0, a_1, \ldots, a_n$ — аффинно независимые точки n-мерного аффинного пространства A. Доказать, что всякая точка $a \in A$ единственным образом представляется в виде $a = \sum_{i=0}^{n} \lambda_i a_i$, где $\sum_{i=0}^{n} \lambda_i = 1$.

49.22. Пусть $(a_0, e_1, \ldots, e_n)$ — аффинная система координат в аффинном пространстве (A, V), $a_i = a_0 + e_i$ $(i = 1, \ldots, n)$. Найти *барицентрические координаты* точки $x = (x_1, \ldots, x_n)$ относительно системы точек $a_0, a_1, \ldots, a_n$.

49.23. Пусть (A, V) — аффинное пространство над полем K, $|K| \geqslant 3$, P — непустое подмножество в A. Доказать, что P является плоскостью тогда и только тогда, когда вместе с любыми двумя различными точками a, $b \in P$ в P содержится прямая $\langle a, b \rangle$. Верно ли это утверждение, если K — поле из двух элементов?

49.24. Доказать, что всякое аффинное преобразование, дифференциал которого не имеет собственного значения 1, обладает неподвижной точкой.

49.25. Доказать, что для любых двух точек a, b аффинного пространства (A, V) и любого невырожденного линейного оператора $\mathcal{A}$ в пространстве V существует единственное аффинное преобразование f, удовлетворяющее условиям $f(a) = b$ и $Df = \mathcal{A}$, где Df — дифференциал отображения f.

49.26. Доказать, что для любых аффинных преобразований f и g

$$D(fg) = Df \cdot Dg,$$

где Df — дифференциал отображения f.

49.27. Пусть f — аффинное отображение аффинного пространства A в аффинное пространство B над полем K, $a_1, \ldots, a_s \in A$, $\alpha_1, \ldots, \alpha_s \in K$. Доказать, что:

а) если $\sum_{i=1}^{s} \alpha_i = 1$, то $f\left(\sum_{i=1}^{s} \alpha_i a_i\right) = \sum_{i=1}^{s} \alpha_i f(a_i)$;

б) если $\sum_{i=1}^{s} \alpha_i = 0$, то $Df\left(\sum_{i=1}^{s} \alpha_i a_i\right) = \sum_{i=1}^{s} \alpha_i f(a_i)$.

49.28. Пусть f — аффинное преобразование аффинного пространства (A, V) над полем K, имеющее конечный порядок n. Доказать, что если $\operatorname{char} K \nmid n$, то f имеет неподвижную точку. Верно ли это, если $\operatorname{char} K \mid n$?

49.29. Доказать, что если G — конечная группа аффинных преобразований над полем K и $\operatorname{char} K \nmid |G|$, то преобразования из G обладают общей неподвижной точкой.

49.30. Пусть $a_0, a_1, \ldots, a_n$ и $b_0, b_1, \ldots, b_n$ — два набора аффинно независимых точек в n-мерном аффинном пространстве A. Доказать, что существует единственное аффинное преобразование $f : A \to A$, при котором $f(a_i) = b_i$ $(i = 0, 1, \ldots, n)$.

49.31. Найти все точки, прямые и плоскости трехмерного аффинного пространства, инвариантные относительно аффинного преобразования, переводящего точки a_0, a_1, a_2, a_3 в точки b_0, b_1, b_2, b_3 соответственно:

а) $a_0 = (1, 3, 4)$, $a_1 = (2, 3, 4)$, $a_2 = (1, 4, 4)$, $a_3 = (1, 3, 5)$,
$b_0 = (3, 4, 3)$, $b_1 = (8, 9, 9)$, $b_2 = (-2, -2, -6)$, $b_3 = (5, 7, 8)$;

б) $a_0 = (3,2,3)$, $a_1 = (4,2,3)$, $a_2 = (3,3,3)$, $a_3 = (3,2,4)$,
$b_0 = (2,4,6)$, $b_1 = (1,8,12)$, $b_2 = (-1,-5,-1)$, $b_3 = (6,12,11)$;

в) $a_0 = (2,5,1)$, $a_1 = (3,5,1)$, $a_2 = (2,6,1)$, $a_3 = (2,5,2)$,
$b_0 = (3,7,3)$, $b_1 = (6,11,6)$, $b_2 = (5,17,9)$, $b_3 = (0,-5,-4)$;

г) $a_0 = (2,5,4)$, $a_1 = (3,5,4)$, $a_2 = (2,6,4)$, $a_3 = (2,5,5)$,
$b_0 = (1,6,6)$, $b_1 = (8,16,18)$, $b_2 = (-11,-13,-18)$,
$b_3 = (7,16,19)$.

49.32. Доказать, что две конфигурации P_1, P_2 и Q_1, Q_2 в аффинном пространстве аффинно конгруэнтны в том и только том случае, если

$$\dim P_1 = \dim Q_1, \quad \dim P_2 = \dim Q_2, \quad \dim\langle P_1 \cup P_2\rangle = \dim\langle Q_1 \cup Q_2\rangle,$$

и обе пары имеют одновременно пустое или непустое пересечение.

49.33. Существует ли аффинное преобразование, переводящее точки a, b, c соответственно в точки a_1, b_1, c_1, а прямую l — в прямую l_1, если:

а) $a = (1,1,1,1)$, $b = (2,3,2,3)$, $c = (3,2,3,2)$,
$l = (1,2,2,2) + (0,1,0,1)t$,
$a_1 = (-1,1,-1,1)$, $b_1 = (0,4,0,4)$, $c_1 = (2,2,2,2)$,
$l_1 = (-1,2,0,3) + (1,-5,1,-5)t$;

б) $a = (2,-1,3,-2)$, $b = (3,1,6,-1)$, $c = (5,1,4,1)$,
$l = (2,0,4,-1) + (0,1,2,0)t$,
$a_1 = (1,-2,3,5)$, $b_1 = (2,1,8,7)$, $c_1 = (3,2,10,-6)$,
$l_1 = (1,-1,5,-2) + (0,2,3,-3)t$;

в) $a = (2,-1,2,2,)$, $b = (5,-4,0,3)$, $c = (4,4,6,8)$,
$l = (7,4,10,9) + (4,4,5,6)t$,
$a_1 = (1,3,2,-2)$, $b_1 = (4,-2,0,0)$, $c_1 = (-3,10,6,2)$,
$l_1 = (5,-6,-1,5) + (2,-6,-3,2)t$?

49.34. Существует ли аффинное преобразование, переводящее точки a, b, c, d соответственно в точки a_1, b_1, c_1, d_1, а прямую l — в прямую l_1, если:

а) $a = (1,2,3,4)$, $b = (1,3,3,4)$, $c = (1,2,2,4)$, $d = (1,2,3,3)$,
$l = (-3,2,4,1) + (2,1,-1,-2)t$,
$a_1 = (1,-1,4,2)$, $b_1 = (2,-2,5,3)$, $c_1 = (2,0,3,3)$,
$d_1 = (2,0,5,1)$, $l_1 = (1,-5,2,-12) + (1,1,1,1)t$;

б) $a = (-3,0,2,4)$, $b = (-3,1,3,5)$, $c = (-2,0,3,5)$,
$d = (-2,1,2,5)$, $l = (-1,5,5,6) + (1,1,1,0)t$,

$$a_1 = (-1, 1, 2, 3), \quad b_1 = (1, -4, 3, 5), \quad c_1 = (-4, 8, 1, 7),$$
$$d_1 = (4, -8, 4, 10), \quad l_1 = (4, 5, -1, 1) + (4, -6, 1, 2)t?$$

49.35. Пусть аффинное пространство A равно $\langle P_1 \cup P_2 \rangle$, где P_1 и P_2 — скрещивающиеся плоскости, и G — подгруппа в аффинной группе пространства A, состоящая из преобразований, оставляющих инвариантными P_1 и P_2. Найти орбиты действия G на A.

49.36. Пусть (A, V) — аффинное пространство над полем K. Биективное отображение $f : A \to A$ называется *коллинеацией*, если для любых трех точек $a, b, c \in A$, лежащих на одной прямой, точки $f(a)$, $f(b), f(c)$ также лежат на одной прямой. Доказать, что если $|K| \geqslant 3$, то образ и полный прообраз плоскости $P \subseteq A$ при коллинеации $f\colon A \to A$ являются плоскостями той же размерности, что и P. Верно ли утверждение, если $|K| = 2$?

49.37. Пусть V — векторное пространство над полем K. Отображение $\varphi : V \to V$ называется *полулинейным* относительно некоторого автоморфизма σ поля K, если

$$\varphi(x + y) = \varphi(x) + \varphi(y),$$
$$\varphi(\alpha x) = \sigma(\alpha)\varphi(x),$$

где $x, y \in V$, $\alpha \in K$.

Полуаффинным преобразованием аффинного пространства (A, V) называется пара (f, Df), где $f\colon A \to A$, $Df\colon V \to V$, удовлетворяющая условиям:

Df — биективное полулинейное отображение относительно некоторого автоморфизма поля K;

$f(a + v) = f(a) + Df(v)$ для любых $a \in A$, $v \in V$.

Доказать, что:

а) полуаффинное преобразование является коллинеацией;

б) если (A, V) — аффинное пространство над полем K и $|K| \geqslant 3$, то всякая коллинеация $f : A \to A$ является полуаффинным преобразованием.

49.38. Пусть (B, U) — плоскость аффинного пространства (A, V) и W — подпространство пространства V, дополнительное к U. Доказать, что всякая точка $a \in A$ единственным образом представляется в виде $a = b + w$, где $b \in B$, $w \in W$ и что отображение $a \mapsto b$ (*проектирование* на B параллельно W) является аффинным отображением пространства (A, V) в пространство (B, U).

§ 50. Выпуклые множества

50.1. Доказать, что всякая плоскость аффинного пространства является пересечением конечного числа полупространств.

50.2. Доказать, что подмножество плоскости P аффинного пространства A является *выпуклым многогранником* в P тогда и только тогда, когда оно является выпуклым многогранником в A.

50.3. Пусть выпуклый многогранник M в аффинном пространстве задается системой линейных неравенств

$$f_i(x) \geqslant 0 \qquad (i = 1, \ldots, k; \quad f_i \neq \text{const}).$$

Доказать, что для всякого непустого подмножества $J \subseteq \{1, \ldots, k\}$ множество M^J, задаваемое условиями $f_i(x) = 0$ при $i \in J$, $f_i(x) \geqslant 0$ при $i \notin J$, если оно непусто, является гранью многогранника M, и, обратно, всякая грань многогранника M имеет вид M^J для некоторого множества $J \subseteq \{1, \ldots, k\}$.

50.4. Пусть $a_0, a_1, \ldots, a_n$ — точки n-мерного аффинного пространства, находящиеся в общем положении, H_i $(i = 0, 1, \ldots, n)$ — гиперплоскость, проходящая через все эти точки, кроме a_i, и H_i^+ — ограничиваемое ею полупространство, содержащее точку a_i. Доказать, что

$$\operatorname{conv}\{a_0, a_1, \ldots, a_n\} = \bigcap_{i=0}^{n} H_i^+.$$

50.5. Доказать, что грани n-мерного симплекса

$$\operatorname{conv}\{a_0, a_1, \ldots, a_n\}$$

— это выпуклые оболочки всевозможных собственных подмножеств множества $\{a_0, a_1, \ldots, a_n\}$.

50.6. Найти грани n-мерного параллелепипеда, заданного в некоторой системе аффинных координат неравенствами $0 \leqslant x_i \leqslant 1$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$.

50.7. Найти вершины и описать форму выпуклого многогранника в трехмерном аффинном пространстве, заданного неравенствами

$$x_1 \leqslant 1, \quad x_2 \leqslant 1, \quad x_3 \leqslant 1,$$
$$x_1 + x_2 \geqslant -1, \quad x_1 + x_3 \geqslant -1, \quad x_2 + x_3 \geqslant -1.$$

50.8. Найти вершины и описать форму сечений четырехмерного параллелепипеда, заданного неравенствами $0 \leqslant x_i \leqslant 1$ $(i = 1, 2, 3, 4)$, плоскостями:

а) $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 1$;

б) $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 2$;

в) $x_1 + x_2 + x_3 = 1$;

г) $x_1 + x_2 = x_3 + x_4 = 1$.

50.9. Доказать, что замыкание выпуклого множества выпукло.

50.10. Доказать, что открытое ядро M^0 телесного выпуклого множества M выпукло и его замыкание содержит M.

50.11. Доказать, что образ и полный прообраз выпуклого множества при аффинном отображении являются выпуклыми множествами.

50.12. Доказать, что:

а) при сюръективном аффинном отображении полный прообраз гиперплоскости является гиперплоскостью;

б) полный прообраз полупространства является полупространством.

50.13. Доказать, что выпуклая оболочка множества S состоит из всевозможных комбинаций вида $\sum_{i=1}^{k} \lambda_i a_i$, где

$$a_i \in S, \quad \lambda_i \geqslant 0 \quad (i = 1, \ldots, k), \quad \sum_{i=1}^{k} \lambda_i = 1.$$

50.14. Пусть M — выпуклое множество и $a \notin M$. Доказать, что

$$\operatorname{conv}(M \cup a) = \bigcup_{b \in M} \overline{ab}.$$

50.15. Пусть S — подмножество n-мерного аффинного пространства A. Доказать, что если $\langle S \rangle = A$, то $\operatorname{conv} S$ есть объединение n-мерных симплексов с вершинами в точках множества S.

50.16. Доказать, что выпуклая оболочка компактного множества компактна.

50.17. Пусть M — выпуклое подмножество двумерного аффинного пространства и $a \notin M^0$ (см. 50.10). Доказать, что через точку a можно провести прямую так, что множество M будет лежать по одну сторону от неё.

50.18. Пусть M — выпуклое подмножество n-мерного аффинного пространства A и $a \notin M^0$ (см. 50.10). Доказать, что через точку a можно провести гиперплоскость так, что множество M будет лежать по одну сторону от неё.

50.19. Доказать, что через любую точку замкнутого выпуклого множества, не принадлежащую его открытому ядру, можно провести опорную гиперплоскость.

50.20. Доказать, что всякое замкнутое выпуклое множество M есть пересечение (вообще говоря, бесконечного числа) полупространств.

50.21. Доказать, что всякий замкнутый выпуклый конус в векторном пространстве есть пересечение (вообще говоря, бесконечного числа) полупространств, границы которых проходят через нуль.

50.22. Пусть f_i $(i = 1, \ldots, k)$ — аффинные линейные функции на аффинном пространстве A. Доказать, что система неравенств $f_i(x) \leqslant 0$ $(i = 1, \ldots, k)$ несовместна тогда и только тогда, когда существуют такие числа $\lambda_i \geqslant 0$, что $\sum_{i=1}^{k} \lambda_i f_i$ есть положительная константа.

50.23. Пусть M — компактное выпуклое множество, содержащее окрестность нуля, в векторном пространстве V, рассматриваемом как аффинное пространство, и пусть

$$M^* = \{f \in V^* \mid f(x) \leqslant 1 \text{ для всякого } x \in M\}.$$

Доказать, что:

а) M^* — компактное выпуклое множество в пространстве V^*, содержащее окрестность нуля;

б) $M^{**} = M$ при каноническом отождествлении пространства V^{**} с V.

50.24. Доказать, что всякое компактное выпуклое множество совпадает с выпуклой оболочкой множества своих крайних точек.

50.25. Доказать, что максимум аффинной линейной функции на компактном выпуклом множестве достигается в некоторой крайней точке (но, может быть, достигается и в других точках).

50.26. Доказать, что крайние точки выпуклого многогранника — это его вершины.

50.27. Доказать, что всякий ограниченный выпуклый многогранник совпадает с выпуклой оболочкой множества своих вершин.

50.28. Доказать, что выпуклая оболочка конечного числа точек является выпуклым многогранником.

50.29. Задать системой линейных неравенств выпуклую оболочку указанных точек четырехмерного аффинного пространства и найти трехмерные грани этого выпуклого многогранника:

а) $O = (0,0,0,0)$, $a = (1,0,0,0)$, $b = (0,1,0,0)$, $c = (1,1,0,0)$, $d = (0,0,1,0)$, $e = (0,0,0,1)$, $f = (0,0,1,1)$;

б) $O = (0,0,0,0)$, $a = (1,0,0,0)$, $b = (0,1,0,0)$, $c = (0,0,1,0)$, $d = (1,1,0,0)$, $e = (1,0,1,0)$, $f = (0,1,1,0)$, $g = (1,1,1,0)$, $h = (0,0,0,1)$.

50.30. Пусть M и N — выпуклые множества в аффинном пространстве (A, V). Доказать, что:

а) середины отрезков, соединяющих точки из M с точками из N, образуют выпуклое множество в пространстве A;

б) векторы, соединяющие точки из M с точками из N, образуют выпуклое множество в пространстве V.

50.31. Пусть M и N — непересекающиеся замкнутые выпуклые множества в аффинном пространстве A и одно из них ограничено. Доказать, что существует такая аффинная линейная функция f на пространстве A, что $f(x) < 0$ при всех $x \in M$ и $f(y) > 0$ при всех $y \in N$.

50.32. Пусть M — компактное выпуклое множество в аффинном пространстве A, N — компактное выпуклое множество в векторном пространстве L всех аффинных линейных функций на A и пусть для всякой точки $a \in M$ найдется такая функция $f \in N$, что $f(a) \geqslant 0$. Доказать, что существует такая функция $f_0 \in N$, что $f_0(x) \geqslant 0$ при всех $x \in M$.

50.33. (*Теорема двойственности линейного программирования.*) Пусть F — аффинная билинейная функция на прямом произведении аффинных пространств A и B, и пусть M и N — компактные выпуклые подмножества пространств A и B соответственно.

Доказать, что:

а) $\max\limits_{x \in M} \min\limits_{y \in N} F(x,y) = \min\limits_{y \in N} \max\limits_{x \in M} F(x,y)$;

б) существуют такие точки $x_0 \in M$, $y_0 \in N$, что при всех $x \in M$, $y \in N$

$$F(x, y_0) \leqslant F(x_0, y_0) \leqslant F(x_0, y).$$

50.34. Доказать, что:

а) максимальное число частей (выпуклых многогранников), на которое может разбиваться n-мерное вещественное аффинное пространство k гиперплоскостями, равно

$$\binom{k+1}{n} + \binom{k+1}{n-2} + \binom{k+1}{n-4} + \ldots;$$

б) число частей максимально тогда и только тогда, когда пересечение любых m заданных гиперплоскостей при $m \leqslant n$ есть $(n-m)$-мерная плоскость, а при $m = n+1$ пусто;

в) если число частей максимально, то число ограниченных частей равно $\binom{k-1}{n}$.

50.35. Определить, являются ли ограниченными многогранники, задаваемые следующими неравенствами:

а) $-3x_1 + 5x_2 \leqslant 10, \quad 5x_1 + 2x_2 \leqslant 35, \quad x_1 \geqslant 0, \quad x_2 \geqslant 0;$

б) $-x_1 + x_2 \leqslant 2, \quad 5x_1 - x_2 \leqslant 10;$

в) $3x_1 - x_2 \geqslant 4, \quad -x_1 + 3x_2 \geqslant 4;$

г) $-3x_1 + 4x_2 \leqslant 17, \quad 3x_1 + 4x_2 \leqslant 47, \quad x_1 - x_2 \leqslant 4, \quad x_1 + x_2 \geqslant 0;$

д) $-x_1 + 2x_2 \leqslant 6, \quad 5x_1 - 2x_2 \leqslant 26, \quad x_1 + 2x_2 \geqslant 10;$

е) $5x_1 - 2x_2 \geqslant 6, \quad 5x_1 - 2x_2 \leqslant 36, \quad 2 \leqslant x_1 \leqslant 7.$

50.36. Найти угловые точки многогранников:

а) $x_1 + 2x_2 + x_3 + 3x_4 + x_5 = 5, \quad x_1 + x_3 - 2x_4 = 3,$
$x_1 \geqslant 0, \quad x_2 \geqslant 0, \quad x_3 \geqslant 0, \quad x_4 \geqslant 0, \quad x_5 \geqslant 0;$

б) $x_1 + x_2 - x_3 = 10, \quad x_1 - x_2 + 7x_3 = 7,$
$x_1 \geqslant 0, \quad x_2 \geqslant 0, \quad x_3 \geqslant 0;$

в) $4x_1 + 5x_2 + x_3 + x_4 = 29, \quad 6x_1 - x_2 - x_3 + x_4 = 11,$
$x_1 \geqslant 0, \quad x_2 \geqslant 0, \quad x_3 \geqslant 0, \quad x_4 \geqslant 0;$

г) $x_1 + 2x_2 + x_3 = 4, \quad 2x_1 + 2x_2 + 5x_3 = 5,$
$x_1 \geqslant 0, \quad x_2 \geqslant 0, \quad x_3 \geqslant 0.$

50.37. Найти максимальные и минимальные значения линейной функции z на ограниченном многограннике:

а) $x_1 + 2x_2 + x_3 + 3x_4 + x_5 = 5, \quad 2x_1 + x_3 - 2x_4 = 3,$
$x_1 \geqslant 0, \quad x_2 \geqslant 0, \quad x_3 \geqslant 0, \quad x_4 \geqslant 0, \quad x_5 \geqslant 0,$
$z = x_1 - 2x_2 + x_3 + 3x_5;$

б) $3x_1 - x_2 + 2x_3 + x_4 + x_5 = 12, \quad x_1 - 5x_2 - x_4 + x_5 = -4,$
$x_1 \geqslant 0, \quad x_2 \geqslant 0, \quad x_3 \geqslant 0, \quad x_4 \geqslant 0, \quad x_5 \geqslant 0,$
$z = 4x_1 - x_2 + 2x_3 + x_5;$

в) $5x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4 + x_5 = 42, \quad 4x_1 - 4x_2 + x_3 + x_4 = 16,$
$x_1 \geqslant 0, \quad x_2 \geqslant 0, \quad x_3 \geqslant 0, \quad x_4 \geqslant 0, \quad x_5 \geqslant 0,$
$z = x_1 - 2x_2 + 4x_4 - x_5;$

г) $x_1 - 3x_2 + x_3 + 2x_5 = 8, \quad 4x_2 - 3x_4 - x_5 = 3,$
$x_1 \geqslant 0, \quad x_2 \geqslant 0, \quad x_3 \geqslant 0, \quad x_4 \geqslant 0, \quad x_5 \geqslant 0,$
$z = x_1 - 2x_2 + x_3 - x_5.$

§ 51. Евклидовы пространства

51.1. Найти условия, необходимые и достаточные для того, чтобы данный набор из $\binom{n}{2}$ неотрицательных вещественных чисел служил набором расстояний между:

а) n аффинно независимыми точками евклидова пространства;

б) n произвольными точками евклидова пространства.

51.2. Существует ли в евклидовом пространстве набор точек a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, для которого матрица A есть матрица расстояний $(\rho(a_i, a_j))$, и какова наименьшая размерность пространства, в которое такой набор можно поместить:

а) $$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 2 & 2\sqrt{2} \\ 1 & 0 & \sqrt{5} & \sqrt{5} & 3 \\ 2 & \sqrt{5} & 0 & 2\sqrt{2} & 2 \\ 2 & \sqrt{5} & 2\sqrt{2} & 0 & 2\sqrt{3} \\ 2\sqrt{2} & 3 & 2 & 2\sqrt{3} & 0 \end{pmatrix};$$

б) $$A = \begin{pmatrix} 0 & 3 & \sqrt{5} & \sqrt{5} & 2\sqrt{2} \\ 3 & 0 & \sqrt{14} & \sqrt{14} & \sqrt{17} \\ \sqrt{5} & \sqrt{14} & 0 & \sqrt{2} & \sqrt{17} \\ \sqrt{5} & \sqrt{14} & \sqrt{2} & 0 & 3 \\ 2\sqrt{2} & \sqrt{17} & \sqrt{17} & 3 & 0 \end{pmatrix};$$

в) $$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & \sqrt{5} & 1 \\ 1 & 0 & \sqrt{5} & 2 & \sqrt{2} \\ 2 & \sqrt{5} & 0 & \sqrt{17} & 1 \\ \sqrt{5} & 2 & \sqrt{17} & 0 & \sqrt{10} \\ 1 & \sqrt{2} & 1 & \sqrt{10} & 0 \end{pmatrix};$$

г) $A = \begin{pmatrix} 0 & \sqrt{5} & \sqrt{5} & \sqrt{5} & \sqrt{5} \\ \sqrt{5} & 0 & 2\sqrt{5} & 2\sqrt{2} & 2 \\ \sqrt{5} & 2\sqrt{5} & 0 & 2 & 2\sqrt{2} \\ \sqrt{5} & 2\sqrt{2} & 2 & 0 & 2\sqrt{5} \\ \sqrt{5} & 2 & 2\sqrt{2} & 2\sqrt{5} & 0 \end{pmatrix}$.

51.3. Доказать эквивалентность следующих двух свойств пары плоскостей $\{P, Q\}$ в евклидовом пространстве:

а) любая прямая, лежащая в одной из этих плоскостей, перпендикулярна любой прямой, лежащей в другой плоскости;

б) плоскости P, Q перпендикулярны и либо скрещиваются, либо пересекаются в одной точке.

51.4. Пусть $Q \subset P$ — плоскости в n-мерном евклидовом пространстве E. Доказать, что любая плоскость $P' \subset E$, перпендикулярная P, для которой $P \cap P' = Q$, имеет размерность $\leqslant n - \dim P + \dim Q$ и существует единственная такая плоскость размерности $n - \dim P + \dim Q$.

51.5. Пусть P — плоскость в евклидовом пространстве и точка a не принадлежит P. Доказать, что:

а) существует единственная прямая, проходящая через точку a, пересекающая P и перпендикулярная P;

б) если c — любая точка в P и z — ортогональная составляющая вектора $\overline{ac}$ относительно направляющего подпространства плоскости P, то $a + \langle z \rangle$ — прямая, указанная в а); $a + z$ — точка пересечения этой прямой с P;

в) $\rho(a, P) = |z|$.

51.6. В евклидовом пространстве найти прямую, проходящую через точку a, пересекающую плоскость P и перпендикулярную P, если:

а) $a = (5, -4, 4, 0)$, $\quad P = (2, -1, 2, 3) + \langle (1, 1, 1, 2), (2, 2, 1, 1) \rangle$;

б) $a = (5, 0, 2, 11)$, $\quad P : \begin{cases} x_1 + 5x_2 + x_4 = 10, \\ 5x_1 + x_2 + 3x_3 + 8x_4 = -1. \end{cases}$

51.7. В евклидовом пространстве найти расстояние от точки a до плоскости P, если:

а) $a = (4, 1, -4, -5)$, $\quad P = (3, -2, 1, 5) + \langle (2, 3, -2, -2), (4, 1, 3, 2) \rangle$;

б) $a = (1, 1, -2, -3, -2)$, $\quad P = (3, 7, -5, 4, 1) + \langle (1, 1, 2, 0, 1), (2, 2, 1, 3, 1) \rangle$;

в) $a = (2, 1, -3, 4)$, $P: \begin{cases} 2x_1 - 4x_2 - 8x_3 + 13x_4 = -19, \\ x_1 + x_2 - x_3 + 2x_4 = 1; \end{cases}$

г) $a = (1, -3, -2, 9, -4)$, $P: \begin{cases} x_1 - 2x_2 - 3x_3 + 3x_4 + 2x_5 = -2, \\ x_1 - 2x_2 - 7x_3 + 5x_4 + 3x_5 = 1. \end{cases}$

51.8. В n-мерном евклидовом пространстве найти расстояние от точки $(b_1, \ldots, b_n)$ до гиперплоскости $\sum_{i=1}^{n} a_i x_i = c$.

51.9. В пространстве многочленов со скалярным произведением $(f, g) = \int_{-1}^{1} f(x)g(x)\,dx$ найти расстояние от многочлена x^n до подпространства многочленов степени меньше n.

51.10. В пространстве тригонометрических многочленов со скалярным произведением $(f, g) = \int_{-\pi}^{\pi} f(x)g(x)dx$ найти расстояние от функции $\cos^{n+1} x$ до подпространства

$$\langle 1,\ \cos x,\ \sin x,\ \ldots,\ \cos nx,\ \sin nx \rangle.$$

51.11. Пусть P — плоскость в n-мерном евклидовом пространстве E. Доказать, что через всякую точку $a \in E$ проходит единственная плоскость Q размерности $n - \dim P$, перпендикулярная P и пересекающая её в одной точке.

51.12. Найти в евклидовом пространстве плоскость наибольшей размерности, проходящую через точку a, перпендикулярную плоскости P и пересекающую её в одной точке, если:

а) $a = (2, -1, 3, 5)$, $P = (7, 2, -3, 4) + \langle (-1, 3, 2, 1), (1, 2, 3, -1) \rangle$;

б) $a = (3, -2, 1, 4)$, $P: \begin{cases} 2x_1 + 3x_2 - x_3 - 2x_4 = 4, \\ 3x_1 + 2x_2 - 5x_3 + x_4 = 5. \end{cases}$

51.13. Пусть $P_1 = c_1 + L_1$ и $P_2 = c_2 + L_2$ — две непересекающиеся плоскости в евклидовом пространстве, y и z — соответственно ортогональная проекция и ортогональная составляющая вектора $\overline{c_1 c_2}$ относительно подпространства $L_1 + L_2$, и пусть $y = y_1 + y_2$, где $y_1 \in L_1$, $y_2 \in L_2$.

а) Доказать, что прямая $c_1 + y_1 + \langle z \rangle$ перпендикулярна плоскостям P_1, P_2 и пересекает P_1 в точке $c_1 + y_1$, а P_2 в точке $c_2 - y_2$.

б) Найти расстояние $\rho(P_1, P_2)$.

в) Установить биективное соответствие между $L_1 \cap L_2$ и множеством всех прямых, перпендикулярных P_1 и P_2 и пересекающих

обе плоскости.

г) Показать, что все прямые, описанные в в), параллельны между собой и что их объединение представляет собой плоскость размерности $\dim(L_1 \cap L_2) + 1$.

51.14. В евклидовом пространстве найти расстояние между плоскостями P_1 и P_2, если:

а) $P_1 : \begin{cases} x_1 + 3x_2 + x_3 + x_4 = 3, \\ x_1 + 3x_2 - x_3 + 2x_4 = 6, \end{cases}$
$P_2 = (0, 2, 6, -5) + \langle(-7, 1, 1, 1), (-10, 1, 2, 3)\rangle$;

б) $P_1 : \begin{cases} -x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 3, \\ -3x_2 + 2x_3 - 4x_4 = 4, \end{cases}$
$P_2 = (1, 3, -3, -1) + \langle(1, 0, 1, 1)\rangle$;

в) $P_1 : \begin{cases} x_1 + x_3 + x_4 - 2x_5 = 2, \\ x_2 + x_3 - x_4 - x_5 = 3, \\ x_1 - x_2 + 2x_3 - x_5 = 3, \end{cases}$
$P_2 = (1, -2, 5, 8, 2) + \langle(0, 1, 2, 1, 2), (2, 1, 2, -1, 1)\rangle$;

г) $P_1 : \begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 - x_4 + 3x_5 = 6, \\ x_1 - x_3 - x_4 + 3x_5 = 0, \end{cases}$
$P_2 = (-4, 3, -3, 2, 4) + \langle(2, 0, 1, 1, 1), (-5, 1, 0, 1, 1)\rangle$.

51.15. Точки $a_0, a_1, \ldots, a_n$ в евклидовом пространстве расположены на одинаковом расстоянии d друг от друга. Найти расстояние между плоскостями $\langle a_0, a_1, \ldots, a_k\rangle$ и $\langle a_{k+1}, \ldots, a_n\rangle$.

51.16. Доказать, что конфигурации из двух плоскостей

$$\{a_1 + L_1, a_2 + L_2\} \quad \text{и} \quad \{a'_1 + L'_1, a'_2 + L'_2\}$$

в евклидовом пространстве метрически конгруэнтны тогда и только тогда, когда $\rho(a_1 + L_1, a_2 + L_2) = \rho(a'_1 + L'_1, a'_2 + L'_2)$, и конфигурации подпространств L_1, L_2, L'_1, L'_2 ортогонально конгруэнтны в соответствующем евклидовом векторном пространстве.

51.17. Выяснить, являются ли метрически конгруэнтными в евклидовом пространстве заданные пары плоскостей:

а) $P_1 = (0, 9, 8, -12, 11) + \langle(0, 2, 2, 2, 1), (3, 1, 1, 1, -1)\rangle$,
$P_2 = (-3, -4, -5, 11, -12) + \langle(7, 5, -5, -1, -5), (3, 5, -1, 11, 13)\rangle$;

б) $Q_1 = (2, -5, -11, -8, -10) + \langle(2, -1, 1, -1, 1), (2, -2, 1, 0, 1)\rangle$,
$Q_2 = (8, 8, 10, 9, 11) + \langle(0, 3, 4, -4, -3), (14, -2, -5, 3, 4)\rangle$;

в) $R_1 = (7, -3, -9, -14, 5) + \langle (0, 0, 0, 1, 2), (2, -1, 2, 0, -6) \rangle$,
$R_2 = (0, 10, 9, 14, -5) + \langle (1, 7, 2, 0, 6), (4, -1, 0, 2, -2) \rangle$.

51.18. Найти в евклидовом пространстве геометрическое место точек, через которые можно провести прямую, пересекающую плоскости P_1, P_2 и перпендикулярную этим плоскостям:

а) $P_1 = (1, 2, -1, -9, -13) + \langle (2, 3, 7, 10, 13), (3, 5, 11, 16, 21) \rangle$,

$$P_2: \begin{cases} 3x_1 - 5x_2 + 2x_3 - x_4 + x_5 = -22, \\ 2x_1 + 4x_2 + 3x_3 - x_4 - 3x_5 = -4, \\ 9x_1 + 3x_2 + x_3 - 2x_4 - 2x_5 = -138; \end{cases}$$

б) $P_1 = (3, 7, 2, 4, -3) + \langle (2, 5, 4, 5, 3), (4, 5, 6, 3, 3) \rangle$,

$$P_2: \begin{cases} -3x_1 + 2x_2 + x_3 - 2x_4 + x_5 = -14, \\ 6x_1 - x_2 - 4x_3 + 2x_4 - x_5 = 16, \\ 2x_1 - x_2 + 2x_4 - 3x_5 = 26. \end{cases}$$

51.19. Доказать, что:

а) если движение евклидова пространства имеет две скрещивающиеся инвариантные плоскости, то оно обладает неподвижной точкой;

б) движение f n-мерного евклидова пространства, имеющее неподвижную точку, имеет две скрещивающиеся инвариантные плоскости положительной размерности, если f собственное, $n \geqslant 5$ и нечётно или f несобственное, $n \geqslant 4$ и чётно.

51.20. Пусть $a_0, a_1, \ldots, a_s$ и $b_0, b_1, \ldots, b_s$ — два набора точек в евклидовом пространстве. Доказать, что движение, переводящее каждую из точек a_i в точку b_i, существует тогда и только тогда, когда $\rho(a_i, a_j) = \rho(b_i, b_j)$ $(i, j = 1, \ldots, s)$.

51.21. Доказать, что для всякого движения f евклидова пространства совокупность точек a, на которых достигается минимум расстояния $\rho(a, f(a))$, является плоскостью, инвариантной относительно f, и что ограничение f на эту плоскость есть параллельный перенос.

51.22. Доказать, что если у двух тетраэдров в трехмерном евклидовом пространстве соответствующие двугранные углы равны, то эти тетраэдры подобны.

51.23. Дать геометрическое описание собственного движения f евклидово пространства, если:

а) $Df = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$, $\qquad f(O) = (-2, 4)$;

б) $Df = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, $\quad f(O) = (1,1)$;

в) $Df = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 2 & 2 & -1 \\ -1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$, $\quad f(O) = (1,0,-1)$;

г) $Df = \frac{1}{9}\begin{pmatrix} 4 & 1 & -8 \\ 7 & 4 & 4 \\ 4 & -8 & 1 \end{pmatrix}$, $\quad f(O) = (-1,-7,2)$;

д) $Df = \frac{1}{7}\begin{pmatrix} -2 & 3 & 6 \\ 6 & -2 & 3 \\ 3 & 6 & -2 \end{pmatrix}$, $\quad f(O) = (-2,4,1)$.

51.24. Дать геометрическое описание несобственного движения f евклидово пространства, если:

а) $Df = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $\quad f(O) = (1,0)$;

б) $Df = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & \sqrt{3} \\ \sqrt{3} & -1 \end{pmatrix}$, $\quad f(O) = (1,-\sqrt{3})$.

в) $Df = -\frac{1}{9}\begin{pmatrix} 4 & 1 & -8 \\ 7 & 4 & 4 \\ 4 & -8 & 1 \end{pmatrix}$, $\quad f(O) = (1,1,-2)$;

г) $Df = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$, $\quad f(O) = (4,0,2)$;

д) $Df = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} -1 & 2 & 2 \\ -2 & 1 & -2 \\ 2 & 2 & -1 \end{pmatrix}$, $\quad f(O) = (2,0,0)$;

е) $Df = \frac{1}{7}\begin{pmatrix} -2 & 3 & 6 \\ 3 & 6 & -2 \\ 6 & -2 & 3 \end{pmatrix}$, $\quad f(O) = (-3,1,2)$.

§ 52. Гиперповерхности второго порядка

Обозначения и понятия, используемые в задачах этого параграфа, содержатся в приложении.

52.1. Доказать, что для любых $x, y \in V$ выполняется равенство

$$Q(a_0 + x + y) = q(y) + 2f(x,y) + l(y) + Q(a_0 + x).$$

52.2. Доказать, что если $b = a_0 + v$ $(v \in V)$ — центральная точка квадратичной функции Q, то $Q(b+x) = Q(b-x)$ для любого $x \in V$ и линейная функция $y \mapsto 2f(v,y) + l(y)$ нулевая.

52.3. Доказать, что множество центральных точек (центр) квадратичной функции Q задается системой уравнений

$$\frac{\partial Q}{\partial x_i} = 0 \qquad (i = 1, \ldots, n).$$

52.4. Доказать, что при переходе от аффинной системы координат $(a_0, e_1, \ldots, e_n)$ к системе координат $(a_0, e'_i, \ldots, e'_n)$ по формуле

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = T \begin{pmatrix} x'_1 \\ \vdots \\ x'_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} t_1 \\ \vdots \\ t_n \end{pmatrix}$$

матрицы квадратичных форм Q и q в новой системе координат связаны с их матрицами в старой системе формулами

$$\widetilde{A}'_Q = {}^t\widetilde{T}\widetilde{A}_Q\widetilde{T}, \qquad A'_q = {}^tTA_qT,$$

где

$$\widetilde{T} = \left(\begin{array}{ccc|c} & & & t_1 \\ & T & & \vdots \\ & & & t_n \\ \hline 0 & \ldots & 0 & 1 \end{array}\right)$$

— матрица аффинной замены координат.

52.5. Доказать, что точки пересечения аффинной прямой

$$x_k = x_k^0 + r_k t \qquad (k = 1, \ldots, n)$$

и квадрики $Q(x_1, \ldots, x_n) = 0$ определяются значениями t, удовлетворяющими уравнению

$$At^2 + 2Bt + C = 0,$$

где

$$A = q(r) = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} r_i r_j, \quad C = Q(x_1^0, \ldots, x_n^0),$$

$$B = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial Q}{\partial x_i}(x_1^0, \ldots, x_n^0)\, r_i = \sum_{i,j=1}^{n} (a_{ij} x_j^0 + b_i)\, r_i.$$

52.6. Найти центр квадратичной функции над полем $\mathbb{R}$, заданной в некоторой аффинной системе координат:

а) $2 \sum\limits_{1 \leqslant i < j \leqslant n} x_i x_j + 2 \sum\limits_{i=1}^{n} x_i + 1 = 0$;

б) $\sum\limits_{i=1}^{n} x_i^2 + 2 \sum\limits_{1 \leqslant i < j \leqslant n} x_i x_j + 2 \sum\limits_{i=1}^{n} x_i + 1 = 0$;

в) $\sum\limits_{i=1}^{n-1} x_i x_{i+1} + x_1 + x_n + 1 = 0$;

г) $\sum\limits_{i=1}^{n} x_i^2 + 2 \sum\limits_{1 \leqslant i < j \leqslant n} x_i x_j + x_1 = 0$.

52.7. Две квадратичные функции $Q_i : A \to K$ $(i = 1, 2)$ называются *эквивалентными*, если существует такое аффинное преобразование $f : A \to A$, что $Q_2(x) = \lambda Q_1(f(x))$ для некоторого $\lambda \in K^*$ и всех $x \in A$. Найти число классов эквивалентных квадратичных функций над полем $\mathbf{Z}_3$, если:

а) размерность A равна двум;

б) размерность A равна трем.

52.8. Найти число классов эквивалентных квадратичных функций на n-мерном аффинном пространстве:

а) над полем $\mathbb{C}$; б) над полем $\mathbb{R}$.

52.9. Пусть точка a_0 аффинного пространства (A, V) лежит на квадрике X и вектор $u \in V$ определяет асимптотическое направление. Доказать, что прямая $x = a_0 + tu$ либо целиком лежит на поверхности X, либо пересекает её ровно в одной точке.

52.10. Пусть $u \in V$ — вектор неасимптотического направления квадрики X_Q, т.е. $q(u) \neq 0$. Доказать, что середины хорд квадрики X_Q, параллельных вектору u, лежат в одной гиперплоскости, и найти её уравнение.

52.11. Доказать, что направление u не является асимптотическим для квадрики X, заданной уравнением в аффинных координатах, и найти уравнение гиперплоскости, сопряжённой к этому направлению:

а) $u = (1,1,1,1)$, $\quad X:\ x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_4 - x_1 - x_4 = 0$;

б) $u = (1,0,\ldots,0,1)$, $\quad \sum\limits_{1\leqslant i<j\leqslant n} x_ix_j + x_1 + x_n = 1$.

52.12. Доказать, что если центр квадрики непуст, то он содержится в гиперплоскости, сопряжённой к любому неасимптотическому направлению.

52.13. Доказать, что множество особых точек квадрики есть её пересечение со своим центром.

52.14. Доказать, что особые точки квадрики, если они существуют, образуют плоскость, и написать её уравнения.

52.15. Найти точки пересечения квадрики с прямой:

а) $x_3^2 + x_1x_2 - x_2x_3 - 5x_1 = 0$,
$x_1 = \dfrac{5 - x_2}{3} = \dfrac{10 - x_3}{7}$;

б) $5x_1^2 + 9x_2^2 + 9x_3^2 - 12x_1x_2 - 6x_1x_3 + 12x_1 - 36x_3 = 0$,
$\dfrac{x_1}{3} = \dfrac{x_2}{2} = x_3 - 4$;

в) $x_1^2 - 2x_2^2 + x_3^2 - 2x_1x_2 - x_2x_3 + 4x_1x_3 + 3x_1 - 5x_3 = 0$,
$\dfrac{x_1 + 3}{2} = x_2, \quad x_3 = 0$.

52.16. Найти все прямые, лежащие на квадрике

$$x_1^2 + x_2^2 + 5x_3^2 - 6x_1x_2 + 2x_2x_3 - 2x_1x_3 - 12 = 0$$

и параллельные прямой

$$\frac{x_1 - 1}{2} = \frac{x_2 + 3}{1} = -x_3.$$

52.17. Найти прямые, проходящие через начало координат и лежащие на комплексной квадрике

$$x_2^2 + 3x_1x_2 + 2x_2x_3 - x_1x_3 + 3x_1 + 2x_3 = 0.$$

52.18. Найти уравнение квадрики Q после переноса начала координат в точку O':

а) $Q\colon\ x_1^2 + 5x_2^2 + 4x_3^2 + 4x_1x_2 - 2x_2x_3 - 4x_1x_3 - 2x_1 - 10x_2 + 4x_3 = 0$,
$O' = (3,0,1)$;

б) $Q\colon\ x_1^2 + 2x_2^2 + x_3^2 - 4x_1x_2 + 6x_2x_3 - 2x_1x_3 + 10x_1 - 5 = 0$,
$O' = (-1,1,2)$.

52.19. Найти аффинный тип кривой, являющейся пересечением квадрики и плоскости:

а) $3x_2^2 + 4x_3^2 + 24x_1 + 12x_2 - 72x_3 + 360 = 0$,
$x_1 - x_2 + x_3 = 1$;

б) $x_1^2 + 5x_2^2 + x_3^2 + 2x_1x_2 + 2x_2x_3 + 6x_1x_3 - 2x_1 + 6x_2 + 2x_3 = 0$,
$2x_1 - x_2 + x_3 = 0$;

в) $x_1^2 - 3x_2^2 + x_3^2 - 6x_1x_2 + 2x_2x_3 - 3x_2 + x_3 - 1 = 0$,
$2x_1 - 3x_2 - x_3 + 2 = 0$;

г) $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - 6x_1 - 2x_2 + 9 = 0$,
$x_1 + x_2 - 2x_3 - 1 = 0$.

52.20. Найти аффинный и метрический типы квадрики, заданной в евклидовом пространстве $\mathbb{R}^{n+1}$ уравнениями:

а) $\sum\limits_{i=1}^{n} x_i^2 + \sum\limits_{1\leqslant i<j\leqslant n} x_ix_j + x_1 + x_{n+1} = 0$;

б) $\sum\limits_{1\leqslant i<j\leqslant n} x_ix_j + x_1 + x_2 + \ldots + x_n = 0$.

52.21. Определить аффинный вид квадрики и найти её центр:

а) $4x_1^2 + 2x_2^2 + 12x_3^2 - 4x_1x_2 + 8x_2x_3 + 12x_1x_3 + 14x_1 - 10x_2 + 7 = 0$;

б) $5x_1^2 + 9x_2^2 + 9x_3^2 - 12x_1x_2 - 6x_1x_3 + 12x_1 - 36x_3 = 0$;

в) $5x_1^2 + 2x_2^2 + 2x_3^2 - 2x_1x_2 - 4x_2x_3 + 2x_1x_3 - 4x_2 - 4x_3 + 4 = 0$;

г) $x_1^2 - 2x_2^2 + x_3^2 + 6x_2x_3 - 4x_1x_3 - 8x_1 + 10x_2 = 0$;

д) $x_1^2 + 2x_1x_2 + x_2^2 - x_3^2 + 2x_3 - 1 = 0$;

е) $3x_1^2 + 3x_2^2 + 3x_3^2 - 6x_1 + 4x_2 - 1 = 0$;

ж) $3x_1^2 + 3x_2^2 - 6x_1 + 4x_2 - 1 = 0$;

з) $3x_1^2 + 3x_2^2 - 3x_3^2 - 6x_1 + 4x_2 + 4x_3 + 3 = 0$;

и) $4x_1^2 + x_2^2 - 4x_1x_2 - 36 = 0$;

к) $x_1^2 + 4x_2^2 + 9x_3^2 - 6x_1 + 8x_2 - 36x_3 = 0$;

л) $4x_1^2 - x_2^2 - x_3^2 + 32x_1 - 12x_3 + 44 = 0$;

м) $3x_1^2 - x_2^2 + 3x_3^2 - 18x_1 + 10x_2 + 12x_3 + 14 = 0$;

н) $6x_1^2 + 6x_3^2 + 5x_1 + 6x_2 + 30x_3 - 11 = 0$.

52.22. Определить метрический тип квадрики в евклидовом пространстве и выяснить, является ли она поверхностью вращения:

а) $x_3^2 = 2x_1x_2$;

б) $x_3 = x_1x_2$;

в) $x_3^2 = 3x_1 + 4x_2$;

г) $x_3^2 = 3x_1^2 + 4x_1x_2$;
д) $x_3^2 = x_1^2 + 2x_1x_2 + x_2^2 + 1$;
е) $x_1^2 + 4x_2^2 + 5x_3^2 + 4x_1x_2 + 4x_3 = 0$;
ж) $x_1^2 + 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 + 5 = 0$;
з) $x_3 = x_1^2 + 2x_1x_2 + x_2^2 + 1$;
и) $x_1^2 - 2x_2^2 + x_3^2 + 4x_1x_2 - 8x_1x_3 - 4x_2x_3 - 14x_1 - 14x_2 + 14x_3 + 18 = 0$;
к) $5x_1^2 + 8x_2^2 + 5x_3^2 - 4x_1x_2 + 8x_1x_3 + 4x_2x_3 - 6x_1 + 6x_2 + 6x_3 + 10 = 0$;
л) $2x_1x_2 + 2x_1x_3 + 2x_2x_3 + 2x_1 + 2x_2 + 2x_3 + 1 = 0$;
м) $3x_1^2 + 3x_2^2 + 3x_3^2 - 2x_1x_2 - 2x_1x_3 - 2x_2x_3 - 2x_1 - 2x_2 - 2x_3 - 1 = 0$;
н) $2x_1^2 + 6x_2^2 + 2x_3^2 + 8x_1x_3 - 4x_1 - 8x_2 + 3 = 0$;
о) $4x_1^2 + x_2^2 + 4x_3^2 - 4x_1x_2 - 8x_1x_3 + 4x_2x_3 - 28x_1 + 2x_2 + 16x_3 + 45 = 0$;
п) $2x_1^2 + 5x_2^2 + 2x_3^2 - 2x_1x_2 - 4x_1x_3 + 2x_2x_3 + 2x_1 - 10x_2 - 2x_3 - 1 = 0$;
р) $7x_1^2 + 7x_2^2 + 16x_3^2 - 10x_1x_2 - 8x_1x_3 - 8x_2x_3 - 16x_1 - 16x_2 - 8x_3 + 72 = 0$;
с) $4x_1^2 + 4x_2^2 - 8x_3^2 - 10x_1x_2 + 4x_1x_3 + 4x_2x_3 - 16x_1 - 16x_2 + 10x_3 - 2 = 0$;
т) $2x_1^2 - 7x_2^2 - 4x_3^2 + 4x_1x_2 - 16x_1x_3 + 20x_2x_3 + 60x_1 - 12x_2 + 12x_3 - 90 = 0$;
у) $2x_1x_2 + 2x_1x_3 - 2x_1x_4 - 2x_2x_3 + 2x_2x_4 + 2x_3x_4 - 2x_2 - 4x_3 - 6x_4 + 5 = 0$;
ф) $3x_1^2 + 3x_2^2 + 3x_3^2 + 3x_4^2 - 2x_1x_2 - 2x_1x_3 - 2x_1x_4 - 2x_2x_3 - 2x_2x_4 - 2x_3x_4 = 36$.

52.23. При каких значениях параметра a квадрика

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + 2ax_1x_2 + 2ax_1x_3 + 2ax_2x_3 = 4a$$

является эллипсоидом?

52.24. При каком необходимом и достаточном условии два гиперболоида имеют общий асимптотический конус?

52.25. Найти аффинный и метрический типы квадрики, заданной в евклидовом пространстве $\mathbb{R}^{n+1}$ уравнением

$$a\sum_{i=1}^{n} x_i^2 + 2b \sum_{1\leqslant i<j\leqslant n} x_ix_j + 2c\sum_{i=1}^{n+1} x_i = 0\,,$$

в зависимости от значений параметров a, b и c.

52.26. Квадрика называется *k-планарной*, если через любую её точку проходит хотя бы одна k-мерная плоскость, целиком принадлежащая квадрике, но никакая $(k+1)$-мерная плоскость не содержится в квадрике. Доказать, что:

а) квадрика типа $\mathrm{I}'_{n,s}$ над $\mathbb{R}$ k-планарна, где $k = \min(s, n-s)$;

б) невырожденная квадрика типа $\mathrm{I}_{n,s}$ над $\mathbb{R}$ $(s-1)$-планарна, если $0 \leqslant s \leqslant n/2$, и $(n-s)$-планарна, если $s > n/2$;

в) невырожденная квадрика типа $\mathrm{II}_{n,s}$ над $\mathbb{R}$ s-планарна, если $0 \leqslant s \leqslant n/2$, и $(n-1-s)$-планарна, если $s > n/2$.

52.27. Выяснить, при каких значениях параметров $a, b, c \neq 0$ на квадрике

$$a\sum_{i=1}^{n} x_i^2 + 2b \sum_{1 \leqslant i<j \leqslant n} x_i x_j + 2c\sum_{i=1}^{n+1} x_i = 0$$

в пространстве $\mathbb{R}^{n+1}$ лежит плоскость наибольшей размерности, и найти размерность этой плоскости.

* * *

52.28. Пусть $(e_1, \ldots, e_n)$ — базис векторного пространства V над полем K характеристики, отличной от 2.

а) Доказать, что при $n = 4$ все разложимые элементы $v_1 \wedge v_2$ в $\bigwedge^2 V$ удовлетворяют невырожденному однородному квадратичному уравнению $Q(x_0, \ldots, x_5) = 0$ (*квадрика Плюккера*).

б) Доказать, что все разложимые векторы в пространстве $\bigwedge^r V$, $2 \leqslant r \leqslant n-2$, удовлетворяют системе однородных квадратичных уравнений

$$Q_i(x_0, \ldots, x_{\binom{n}{r}-1}) = 0.$$

в) Пусть на пространстве V имеется невырожденная квадратичная форма Q. Тогда на пространстве $\bigwedge^p V$ можно ввести квадратичную форму $Q^{(p)}$ по формулам

$$Q^{(0)} = 1,$$

$$Q^{(p)}(v_1 \wedge \ldots \wedge v_p) = \det \begin{pmatrix} Q(v_1, v_1) & \ldots & Q(v_1, v_p) \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ Q(v_p, v_1) & \ldots & Q(v_p, v_p) \end{pmatrix}.$$

Доказать, что полученное продолжение формы Q на алгебру $\bigwedge(V)$ является невырожденной квадратичной формой на $\bigwedge(V)$.

г) *Ориентацией* n-мерного векторного пространства с невырожденной квадратичной формой Q называется элемент $d \in \bigwedge^n V$, для которого $Q^{(n)}(d) = 1$. Доказать, что если $\det Q$ является квадратом в

поле K, то на V имеются ровно две ориентации, и для любой из них (скажем, d) можно определить изоморфизм векторных пространств $\lambda_d : V \to \bigwedge^{n-1} V$, удовлетворяющий соотношению

$$v \wedge x = Q(v, \lambda_d^{-1} x)d = Q^{(n-1)}(\lambda_d v, x)d, \qquad v \in \bigwedge^{n-1} V,\ x \in V.$$

(Q — билинейная форма, соответствующая квадратичной форме Q).

д) Используя изоморфизм λ_d из предыдущего пункта, определим в случае $\dim V = 3$ билинейное отображение $V \times V \to V$ с помощью формулы

$$[x, y] = \lambda_d^{-1}(x \wedge y), \qquad x, y \in V.$$

Доказать, что так определенное умножение в V наделяет V структурой алгебры Ли над K.

§ 53. Проективные пространства

53.1. Найти какое-нибудь проективное преобразование плоскости, переводящее заданные прямые в заданные прямые:

а) $x = 0 \mapsto x = 0, \quad y = 0 \mapsto x = 1$;

б) $x + y = 1 \mapsto x = 1, \quad x + y = 0 \mapsto y = 0$.

53.2. Найти какое-нибудь проективное преобразование плоскости, переводящее заданные кривые в заданные кривые:

а) $x^2 + y^2 = 1 \mapsto y = x^2$;

б) $x^2 - y^2 = 1 \mapsto x^2 + y^2 = 1$.

53.3. Найти какое-нибудь проективное преобразование плоскости, переводящее окружность $x^2 + y^2 = 1$ в себя и:

а) точку $(0, 0)$ в точку $(1/2, 0)$;

б) прямую $x = 2$ в бесконечно удаленную прямую.

53.4. Найти какое-нибудь проективное преобразование пространства, переводящее заданную квадрику в заданную квадрику:

а) $x^2 + y^2 + z^2 = 1 \mapsto xy - z^2 = 1$;

б) $xy = z \mapsto x^2 + y^2 - z^2 = 1$;

в) $xy = z^2 \mapsto y = x^2$.

53.5. Найти максимальную размерность плоскостей, содержащихся в квадрике:

а) $x_1^2 + \ldots + x_k^2 - x_{k+1}^2 - \ldots - x_n^2 = 1$;

б) $x_1^2 + \ldots + x_k^2 - x_{k+1}^2 - \ldots - x_n^2 = x_n$.

53.6. Доказать, что над полем комплексных чисел любое проективное преобразование имеет по крайней мере одну неподвижную точку.

53.7. Доказать, что в вещественном проективном пространстве чётной размерности любое проективное преобразование имеет неподвижную точку.

53.8. Доказать, что если проективное преобразование n-мерного проективного пространства над бесконечным полем имеет конечное число неподвижных точек, то это число не превосходит $n+1$.

53.9. Доказать, что для всякого конечного множества точек A в проективном пространстве над бесконечным полем существует содержащая его аффинная карта A.

53.10. Доказать, что любое $(k-1)$-мерное подпространство в $\mathbb{P}^n$ можно покрыть k аффинными картами и нельзя покрыть меньшим числом аффинных карт.

53.11. Найти число точек n-мерного проективного пространства над полем из q элементов.

53.12. Найти число k-мерных подпространств n-мерного проективного пространства над полем из q элементов.

53.13. Найти число проективных преобразований n-мерного проективного пространства над полем из q элементов.

53.14. Пусть M_1 и M_2 — непересекающиеся плоскости в $\mathbb{P}^n$, L_1 и L_2 — непересекающиеся плоскости, имеющие те же размерности. Доказать, что существует проективное преобразование, которое переводит M_1 в L_1 и M_2 в L_2.

53.15. Доказать, что если проективное преобразование переводит некоторую аффинную карту в себя, то оно индуцирует аффинное преобразование на этой карте.

53.16. Доказать, что всякое биективное преобразование двумерной проективной плоскости, переводящее прямые в прямые и сохраняющее двойное отношение точек на каждой прямой, является проективным.

53.17. Доказать, что с помощью подходящего проективного преобразования любые четыре прямые на проективной плоскости, из которых никакие три не пересекаются в одной точке, можно перевести

в любые четыре прямые, обладающие тем же свойством.

53.18. Доказать, что существует проективное преобразование плоскости, сохраняющее заданный треугольник и переводящее заданную точку внутри этого треугольника в любую другую заданную точку внутри него.

53.19. Доказать, что существует преобразование плоскости, сохраняющее окружность и переводящее заданную точку внутри этой окружности в любую другую заданную точку внутри нее.

53.20. Доказать, что с помощью одной линейки нельзя построить центр заданной окружности.

53.21. Доказать с помощью проективных преобразований, что отрезки, соединяющие вершины треугольника с точками противоположных сторон, пересекаются в одной точке тогда и только тогда, когда эти точки являются точками касания некоторого вписанного в треугольник эллипса.

53.22. На картине изображена аллея. Расстояние от первого дерева до линии горизонта вдоль линии аллеи обозначим через l, расстояние между k-м и $(k+1)$-м деревьями — через a_k. Выразить:

а) a_3 через a_1 и a_2;

б) a_2 через l и a_1.

53.23. Проективное преобразование плоскости называется *гомологией*, если оно сохраняет все точки, лежащие на некоторой прямой (*оси гомологии*), и все прямые, проходящие через некоторую точку (*центр гомологии*). Доказать, что:

а) существует единственная гомология с заданной осью l и заданным центром O, переводящая заданную точку $A \neq O$, $A \notin l$, в заданную точку $A' \neq O$, $A' \notin l$, лежащую на прямой OA;

б) всякое проективное преобразование плоскости есть произведение двух гомологий.

53.24. Доказать, что существует единственное проективное преобразование плоскости, сохраняющее окружность $x^2 + y^2 = 1$ и переводящее заданные три точки на этой окружности в заданные три точки, также лежащие на этой окружности.

53.25. (*Теорема Дезарга.*) Доказать, что если прямые AA', BB', CC' пересекаются в одной точке, то точки пересечения прямых AB и $A'B'$, BC и $B'C'$, AC и $A'C'$ лежат на одной прямой.

53.26. (*Теорема Паскаля.*) Доказать, что точки пересечения противоположных сторон шестиугольника, вписанного в окружность, лежат на одной прямой.

53.27. (*Теорема Паппа.*) Доказать, что точки пересечения противоположных сторон шестиугольника, вершины которого находятся поочередно на двух заданных прямых, лежат на одной прямой.

53.28. Пусть a_1, a_2, a_3, a_4 — прямые на плоскости, проходящие через точку O, l — прямая, не проходящая через O. Доказать, что двойное отношение точек пересечения прямых a_1, a_2, a_3, a_4 с прямой l не зависит от l (двойное отношение прямых a_1, a_2, a_3, a_4).

53.29. Пусть f — невырожденная билинейная функция на $(n+1)$-мерном векторном пространстве V. Каждому $(k+1)$-мерному подпространству $U \subset V$ сопоставим $(n-k)$-мерное подпространство

$$U^{\perp} = \{y \in V \mid \ f(x,y) = 0 \text{ для всякого } x \in U\}.$$

Этим соответствием в проективном пространстве $\mathbb{P}(V)$ определено отображение K_f, которое каждой k-мерной плоскости сопоставляет $(n-k-1)$-мерную плоскость (*корреляция* относительно функции f).

Доказать, что:

а) корреляция сохраняет инцидентность, т.е.

$$U_1 \subset U_2 \leftrightarrow K_f(U_1) \supset K_f(U_2);$$

б) если функция f симметрическая или кососимметрическая, то корреляция K_f инволютивна, т.е.

$$K_f(K_f(U)) = U;$$

в) композиция корреляции и проективного преобразования есть корреляция;

г) всякая корреляция есть композиция фиксированной корреляции и некоторого проективного преобразования.

53.30. Доказать, что всякая корреляция проективной прямой действует на точки так же, как некоторое проективное преобразование.

53.31. Доказать, что корреляция на проективной плоскости сохраняет двойное отношение.

53.32. Доказать, что корреляция на проективной плоскости относительно симметрической билинейной функции f переводит каждую

точку кривой $f(x, x) = 0$ в касательную к этой кривой, проходящую через данную точку.

53.33. Сформулировать теорему (*теорема Брианшона*), получаемую из теоремы Паскаля (см. 53.26) применением корреляции.

53.34. С помощью понятия корреляции доказать, что точки пересечения касательных к данной окружности, проведенных через концы всевозможных хорд, проходящих через заданную точку, лежат на одной прямой.

ЧАСТЬ III

ОСНОВНЫЕ АЛГЕБРАИЧЕСКИЕ СТРУКТУРЫ

Глава XIII

ГРУППЫ

§ 54. Алгебраические операции. Полугруппы

54.1. Ассоциативна ли операция $*$ на множестве M, если
а) $M = \mathbb{N}$, $x * y = x^y$; б) $M = \mathbb{N}$, $x * y = \text{НОД}(x, y)$;
в) $M = \mathbb{N}$, $x * y = 2xy$; г) $M = \mathbb{Z}$, $x * y = x - y$;
д) $M = \mathbb{Z}$, $x * y = x^2 + y^2$; е) $M = \mathbb{R}$, $x * y = \sin x \cdot \sin y$;
ж) $M = \mathbb{R}^*$, $x * y = x \cdot y^{x/|x|}$?

54.2. Пусть S — полугруппа матриц $\begin{pmatrix} x & y \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, где $x, y \in \mathbb{R}$, с операцией умножения. Найти в этой полугруппе левые и правые нейтральные элементы, элементы, обратимые слева или справа относительно этих нейтральных.

54.3. На множестве M определена операция $\circ$ по правилу $x \circ y = x$. Доказать, что $(M, \circ)$ — полугруппа. Что можно сказать о нейтральных и обратимых элементах этой полугруппы? В каких случаях она является группой?

54.4. На множестве M^2, где M — некоторое множество, определена операция $\circ$ по правилу $(x, y) \circ (z, t) = (x, t)$. Является ли M^2 полугруппой относительно этой операции? Существует ли в M^2 нейтральный элемент?

54.5. Сколько элементов содержит полугруппа, состоящая из всех степеней матрицы

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}?$$

Является ли эта полугруппа группой?

54.6. Доказать, что полугруппы $(2^M, \cup)$ и $(2^M, \cap)$ изоморфны.

54.7. Сколько существует неизоморфных между собой полугрупп порядка 2?

54.8. Доказать, что во всякой конечной полугруппе найдется идемпотент.

54.9. Полугруппа называется *моногенной*, если она состоит из положительных степеней одного из своих элементов (такой элемент является *порождающим*).

Доказать, что:

а) моногенная полугруппа конечна тогда и только тогда, когда содержит идемпотент;

б) конечная моногенная полугруппа либо является группой, либо имеет только один порождающий элемент;

в) любые две бесконечные моногенные полугруппы изоморфны;

г) всякая конечная моногенная полугруппа изоморфна полугруппе вида $S(n, k)$, определенной на множестве$\{a_1, \ldots, a_n\}$ следующим образом:

$$a_i + a_j = \begin{cases} a_{i+j}, & \text{если} \quad i + j \leqslant n, \\ a_{k+l+1}, & \text{если} \quad i + j > n, \end{cases}$$

где l — остаток от деления числа $i + j - n - 1$ на $n - k$.

§ 55. Понятие группы. Изоморфизм групп

55.1. Какие из указанных числовых множеств с операциями являются группами:

а) $(A, +)$, где A — одно из множеств $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$;

б) $(A, \cdot)$, где A — одно из множеств $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$;

в) $(A_0, \cdot)$, где A — одно из множеств $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$, а $A_0 = A \setminus \{0\}$;

г) $(n\mathbb{Z}, +)$, где n — натуральное число;

д) $(\{-1, 1\}, \cdot)$;

е) множество степеней данного вещественного числа $a \neq 0$ с целыми показателями относительно умножения;

ж) множество всех комплексных корней фиксированной степени n из 1 относительно умножения;

з) множество комплексных корней всех степеней из 1 относительно умножения;

и) множество комплексных чисел с фиксированным модулем r относительно умножения;

к) множество ненулевых комплексных чисел с модулем, не превосходящим фиксированное число r, относительно умножения;

л) множество ненулевых комплексных чисел, расположенных на лучах, выходящих из начала координат и образующих с лучом Ox углы $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n$, относительно умножения;

м) множество всех непрерывных отображений $\varphi : [0, 1] \to [0, 1]$, для которых $\varphi(0) = 0, \varphi(1) = 1$, и $x < y \Rightarrow \varphi(x) < \varphi(y)$, относительно суперпозиции?

55.2. Доказать, что полуинтервал $[0, 1)$ с операцией $\oplus$, где $\alpha \oplus \beta$ — дробная часть числа $\alpha + \beta$, является группой. Какой из групп из задачи 55.1 изоморфна эта группа? Доказать, что всякая её конечная подгруппа является циклической.

55.3. Доказать, что 2^M — группа относительно операции симметрической разности Δ (см. 1.4).

55.4. Пусть G — группа относительно умножения. Зафиксируем в G элемент a и зададим в G операцию $x \circ y = x \cdot a \cdot y$. Доказать, что G относительно новой операции $\circ$ является группой, изоморфной $(G, \cdot)$.

55.5. Какие из указанных ниже совокупностей отображений множества $M = \{1, 2, \ldots, n\}$ в себя образуют группу относительно умножения:

а) множество всех отображений;

б) множество всех инъективных отображений;

в) множество всех сюръективных отображений;

г) множество всех биективных отображений;

д) множество всех чётных перестановок;

е) множество всех нечётных перестановок;

ж) множество всех транспозиций;

з) множество всех перестановок, оставляющих неподвижными элементы некоторого подмножества $S \subseteq M$;

и) множество всех перестановок, при которых образы всех элементов некоторого подмножества $S \subseteq M$ принадлежат этому подмножеству;

к) множество

$$\{E, (12)(34), (13)(24), (14)(23)\};$$

л) множество

$$\{E, (13), (24), (12)(34), (13)(24), (14)(23), (1234), (1432)\}?$$

55.6. Какие из указанных множеств квадратных вещественных матриц фиксированного порядка образуют группу:

а) множество симметрических (кососимметрических) матриц относительно сложения;

б) множество симметрических (кососимметрических) матриц относительно умножения;

в) множество невырожденных матриц относительно сложения;

г) множество невырожденных матриц относительно умножения;

д) множество матриц с фиксированным определителем d относительно умножения;

е) множество диагональных матриц относительно сложения;

ж) множество диагональных матриц относительно умножения;

з) множество диагональных матриц, все элементы диагоналей которых отличны от 0, относительно умножения;

и) множество верхних треугольных матриц относительно умножения;

к) множество верхних нильтреугольных матриц относительно умножения;

л) множество верхних нильтреугольных матриц относительно сложения;

м) множество верхних унитреугольных матриц относительно умножения;

н) множество всех ортогональных матриц относительно умножения;

о) множество матриц вида $f(A)$, где A — фиксированная нильпотентная матрица, $f(t)$ — произвольный многочлен со свободным членом, отличным от 0, относительно умножения;

п) множество верхних нильтреугольных матриц относительно операции $X \circ Y = X + Y - XY$;

р) множество ненулевых матриц вида $\begin{pmatrix} x & y \\ -y & x \end{pmatrix}$ $(x, y \in \mathbb{R})$ относительно умножения;

с) множество ненулевых матриц вида $\begin{pmatrix} x & y \\ \lambda y & x \end{pmatrix}$ $(x, y \in \mathbb{R})$, где λ — фиксированное вещественное число, относительно умножения;

т) множество матриц

$$\left\{ \pm\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \pm\begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}, \quad \pm\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \pm\begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix} \right\}$$

относительно умножения?

55.7. Показать, что множество $\mathbf{O}_n(\mathbb{Z})$ всех целочисленных ортогональных матриц размера n образует группу относительно умножения. Найти порядок этой группы.

55.8. Доказать, что множество верхних нильтреугольных матриц порядка 3 является группой относительно операции

$$X \circ Y = X + Y + \frac{1}{2}[X, Y].$$

55.9. Пусть X — множество точек кривой $y = x^3$, l — прямая, проходящая через точки $a, b \in X$ (касательная к X при $a = b$), c — её третья точка пересечения с X и m — прямая, проходящая через начало координат O и точку c (касательная к X при $c = 0$).

Положим $a \oplus b = d$, где d — третья точка пересечения m и X или O, если m касается X в точке O. Доказать, что $(X, \oplus)$ — коммутативная группа.

55.10. Доказать, что множество функций вида

$$y = \frac{ax + b}{cx + d},$$

где $a,\ b,\ c,\ d \in \mathbb{R}$ и $ad - bc \neq 0$, является группой относительно операции композиции функций.

55.11. Доказать, что коммутатор

$$[x, y] = xyx^{-1}y^{-1}$$

элементов x, y группы G обладает свойствами:

а) $[x, y]^{-1} = [y, x]$;

б) $[xy, z] = x[y, z]x^{-1}[x, z]$;

в) $[z, xy] = [z, x]x[z, y]x^{-1}$.

55.12. Пусть задано разложение подстановки σ в произведение независимых циклов

$$\sigma = (i_1, \ldots, i_k)(j_1, \ldots, j_m) \ldots$$

Найти разложение подстановки σ^{-1} в произведение независимых циклов.

55.13. Какие из следующих равенств тождественно выполняются в группе $\mathbf{S}_3$:

а) $x^6 = 1$;

б) $[[x, y], z] = 1$;

в) $[x^2, y^2] = 1$?

55.14. Доказать, что в группе верхних унитреугольных матриц порядка 3 выполняется тождество

$$(xy)^n = x^n y^n [x, y]^{-n(n-1)/2}, \qquad n \in \mathbb{N}.$$

55.15. Доказать, что если в группе G выполняется тождество $[[x, y], z] = 1$, то в G выполняются тождества

$$[x, yz] = [x, y][x, z], \qquad [xy, z] = [x, z][y, z].$$

55.16. Доказать, что если в группе G выполняется тождество $x^2 = 1$, то G коммутативна.

55.17. Какие из отображений групп $f : \mathbb{C}^* \mapsto \mathbb{R}^*$ являются гомоморфизмами:

а) $f(z) = |z|$; б) $f(z) = 2|z|$; в) $f(z) = \dfrac{1}{|z|}$;

г) $f(z) = 1 + |z|$; д) $f(z) = |z|^2$; е) $f(z) = 1$;

ж) $f(z) = 2$?

55.18. Для каких групп G отображение $f : G \mapsto G$, определенное правилом:

а) $f(x) = x^2$, б) $f(x) = x^{-1}$,

является гомоморфизмом?

При каком условии эти отображения являются изоморфизмами?

55.19. Сопоставим каждой матрице $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathbf{GL}(2, \mathbb{C})$ функцию $y = \dfrac{ax+b}{cx+d}$ (см. задачу 55.10). Будет ли это отображение гомоморфизмом?

55.20. Разбить на классы попарно изоморфных групп следующий набор групп:

$$\mathbb{Z}, \quad n\mathbb{Z}, \quad \mathbb{Q}, \quad \mathbb{R}, \quad \mathbb{Q}^*, \quad \mathbb{R}^*, \quad \mathbb{C}^*, \quad \mathbf{UT}_2(A),$$

где A — одно из колец $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$.

55.21. Найти все изоморфизмы между группами $(\mathbf{Z}_4, +)$ и $(\mathbf{Z}_5^*, \cdot)$.

55.22. Доказать, что группа порядка 6 либо коммутативна, либо изоморфна группе $\mathbf{S}_3$.

55.23. Доказать, что если рациональное число a не равно нулю, то отображение $\varphi: x \mapsto ax$ является автоморфизмом группы $\mathbb{Q}$. Найти все автоморфизмы группы $\mathbb{Q}$.

55.24. Пусть G — ненулевая аддитивная группа, состоящая из вещественных чисел, такая, что в каждом ограниченном промежутке содержится лишь конечное число её элементов. Доказать, что $G \simeq \mathbb{Z}$.

55.25. Привести примеры плоских геометрических фигур, группы движения которых изоморфны:

а) $\mathbf{Z}_2$; б) $\mathbf{Z}_3$; в) $\mathbf{S}_3$; г) $\mathbf{V}_4$.

55.26. Какие из следующих групп изоморфны между собой:

группа $\mathbf{D}_4$ движений квадрата;

группа кватернионов $\mathbf{Q}_8$;

группа из задачи 55.5, л);

группа из задачи 55.5, т)?

55.27. Доказать, что группы собственных движений тетраэдра, куба и октаэдра изоморфны соответственно группам $\mathbf{A}_4$, $\mathbf{S}_4$, $\mathbf{S}_4$.

55.28. Пусть G — множество всех пар элементов (a, b), $a \neq 0$, из поля k относительно операции $(a, c) \circ (c, d) = (ac, ad + b)$. Доказать, что G является группой, изоморфной группе всех линейных функций $x \mapsto ax + b$ относительно суперпозиции.

55.29. Пусть G — множество всех вещественных чисел, отличных от -1. Доказать, что G является группой относительно умножения

$$x \cdot y = x + y + xy.$$

55.30. Доказать, что:

а) множество всех автоморфизмов произвольной группы является группой относительно композиции;

б) отображение

$$\sigma : x \mapsto axa^{-1},$$

где a — фиксированный элемент группы G, является автоморфизмом группы G (внутренним автоморфизмом);

в) множество всех внутренних автоморфизмов произвольной группы является группой относительно композиции.

55.31. Найти группы автоморфизмов групп:

а) $\mathbb{Z}$; б) $\mathbf{Z}_p$; в) $\mathbf{S}_3$;

г) $\mathbf{V}_4$; д) $\mathbf{D}_4$; е) $\mathbf{Q}_8$.

55.32. Доказать, что отображение $a \mapsto \sigma$, сопоставляющее каждому элементу a группы G перестановку $\sigma : x \mapsto ax$ множества G, является инъективным гомоморфизмом группы G в группу S_G.

55.33. Найти в соответствующих группах $\mathbf{S}_n$ подгруппы, изоморфные группам:

а) $\mathbf{Z}_3$; б) $\mathbf{D}_4$; в) $\mathbf{Q}_8$.

55.34. Пусть σ — перестановка степени n и $A_\sigma = (\delta_{i\sigma(j)})$ — квадратная матрица порядка n. Доказать, что если G — некоторая группа перестановок степени n, то множество матриц A_σ, где $\sigma \in G$, образует группу, изоморфную группе G.

55.35. Найти в соответствующих группах матриц $\mathbf{GL}_n(\mathbb{C})$ подгруппы, изоморфные группам:

а) $\mathbf{Z}_3$; б) $\mathbf{D}_4$; в) $\mathbf{Q}_8$.

55.36. Найти в группе вещественных матриц порядка 4 подгруппу, изоморфную группе $\mathbf{Q}_8$.

55.37. Доказать, что группу $\mathbf{U}_{p^\infty}$ нельзя отобразить гомоморфно на конечную группу, отличную от единичной.

55.38. Будут ли изоморфны группы

а) $\mathbf{SL}_2(3)$; б) $\mathbf{S}_4$; в) $\mathbf{A}_5$?

§ 56. Подгруппы, порядок элемента группы. Смежные классы

56.1. Доказать, что во всякой группе:

а) пересечение любого набора подгрупп является подгруппой;

б) объединение двух подгрупп является подгруппой тогда и только тогда, когда одна из подгрупп содержится в другой;

в) если подгруппа C содержится в объединении подгрупп A и B, то либо $C \subseteq A$, либо $C \subseteq B$.

56.2. Доказать, что конечная подполугруппа любой группы является подгруппой. Верно ли это утверждение, если подполугруппа бесконечна?

56.3. Найти порядок элемента группы:

а) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 3 & 1 & 5 & 4 \end{pmatrix} \in \mathbf{S}_5$; б) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 2 & 3 & 4 & 5 & 1 & 6 \end{pmatrix} \in \mathbf{S}_6$;

в) $\dfrac{-\sqrt{3}}{2} + \dfrac{1}{2}i \in \mathbb{C}^*$; г) $\dfrac{1}{\sqrt{2}} - \dfrac{1}{\sqrt{2}}i \in \mathbb{C}^*$;

д) $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \in \mathbf{GL}_4(\mathbb{R})$; е) $\begin{pmatrix} 0 & i \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathbf{GL}_2(\mathbb{C})$;

ж) $\begin{pmatrix} -1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbf{GL}_2(\mathbb{C})$; з) $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \in \mathbf{GL}_2(\mathbb{C})$;

и) $\begin{pmatrix} \lambda_1 & * & \ldots & * \\ 0 & \lambda_2 & * & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & \ldots & 0 & \lambda_n \end{pmatrix} \in \mathbf{GL}_n(\mathbb{C})$,

где $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ — различные корни k-й степени из 1.

56.4. Пусть p — простое нечётное число, X — целочисленная квадратная матрица размера n, причём матрица $E + pX$ лежит в $\mathbf{SL}_n(\mathbb{Z})$ и имеет конечный порядок. Доказать, что $X = 0$.

56.5. Доказать, что:

а) элемент $\dfrac{3}{5} + \dfrac{4}{5}i$ группы $\mathbb{C}^*$ имеет бесконечный порядок;

б) число $\dfrac{1}{\pi} \operatorname{arctg} \dfrac{4}{3}$ иррационально.

56.6. Сколько элементов порядка 6 содержится в группе:

а) $\mathbb{C}^*$; б) $\mathbf{D}_2(\mathbb{C})$; в) $\mathbf{S}_5$; г) $\mathbf{A}_5$?

56.7. Доказать, что во всякой группе:

а) элементы x и yxy^{-1} имеют одинаковый порядок;

б) элементы ab и ba имеют одинаковый порядок;

в) элементы xyz и zyx могут иметь разные порядки.

56.8. Пусть элементы x и y группы G имеют конечный порядок и $xy = yx$.

а) Доказать, что если порядки элементов x и y взаимно просты, то порядок произведения xy равен произведению их порядков.

б) Доказать, что существуют показатели k и l такие, что порядок произведения $x^k y^l$ равен наименьшему общему кратному порядков x и y.

в) Верны ли эти утверждения для некоммутирующих элементов x и y?

56.9. Доказать, что:

а) если элемент x группы G имеет бесконечный порядок, то $x^k = x^l$ тогда и только тогда, когда $k = l$;

б) если элемент x группы G имеет порядок n, то $x^k = x^l$ тогда и только тогда, когда $n|(k-l)$;

в) если элемент x группы G имеет порядок n, то $x^k = e$ тогда и только тогда, когда $n|k$.

56.10. Доказать, что в группе $\mathbf{S}_n$:

а) порядок нечётной перестановки является чётным числом;

б) порядок любой перестановки является наименьшим общим кратным длин независимых циклов, входящих в её разложение.

56.11. Найти порядок элемента x^k, если порядок элемента x равен n.

56.12. Пусть G — конечная группа, $a \in G$. Доказать, что $G = \langle a \rangle$ тогда и только тогда, когда порядок a равен $|G|$.

56.13. Найти число элементов порядка p^m в циклической группе порядка p^n, где p — простое число, $0 < m \leqslant n$.

56.14. Пусть $G = \langle a \rangle$ — циклическая группа порядка n. Доказать, что:

а) элементы a^k и a^l имеют одинаковые порядки тогда и только тогда, когда НОД$(k, n) =$ НОД(l, n);

б) элемент a^k является порождающим элементом G тогда и только тогда, когда k и n взаимно просты;

в) всякая подгруппа $H \subseteq G$ порождается элементом вида a^d, где $d|n$;

г) для всякого делителя d числа n существует единственная подгруппа $H \subseteq G$ порядка d.

56.15. В циклической группе $\langle a \rangle$ порядка n найти все элементы g, удовлетворяющие условию $g^k = e$, и все элементы порядка k при:

а) $n = 24, \quad k = 6$; б) $n = 24, \quad k = 4$;

в) $n = 100, \quad k = 20$; г) $n = 100, \quad k = 5$;

д) $n = 360, \quad k = 30$; е) $n = 360, \quad k = 12$;

ж) $n = 360, \quad k = 7$.

56.16. Найти все подгруппы в циклической группе порядка:

а) 24; б) 100; в) 360; г) 125;

д) p^n (p — простое число)

56.17. Предположим, что в некоторой неединичной группе все неединичные элементы имеют одинаковый порядок p. Доказать, что p является простым числом.

56.18. Пусть G — конечная группа и $d(G)$ — наименьшее среди натуральных чисел s таких, что $g^s = e$ для всякого элемента $g \in G$ (*период группы* G).

Доказать, что:

а) период $d(G)$ делит $|G|$ и равен наименьшему общему кратному порядков элементов группы G;

б) если группа G коммутативна, то существует элемент $g \in G$ порядка $d(G)$;

в) конечная коммутативная группа является циклической тогда и только тогда, когда $d(G) = |G|$.

Верны ли утверждения б) и в) для некоммутативной группы?

56.19. Существует ли бесконечная группа, все элементы которой имеют конечный порядок?

56.20. *Периодической частью* группы G называется множество всех её элементов конечного порядка.

а) Доказать, что периодическая часть коммутативной группы является подгруппой.

б) Верно ли утверждение а) для некоммутативной группы?

в) Найти периодическую часть групп $\mathbb{C}^*$ и $\mathbf{D}_n(\mathbb{C})^*$.

г) Доказать, что если в коммутативной группе G есть элементы бесконечного порядка и все они содержатся в подгруппе H, то H совпадает с G.

56.21. Доказать, что в коммутативной группе множество элементов, порядки которых делят фиксированное число n, является подгруппой. Верно ли это утверждение для некоммутативной группы?

56.22. Найти все конечные группы, в которых существует наибольшая собственная подгруппа.

56.23. Является ли циклической группа $(\mathbb{Z}/15\mathbb{Z})^*$ обратимых элементов кольца $\mathbb{Z}/15\mathbb{Z}$?

56.24. Множество всех подгрупп группы G *образует цепь*, если для любых двух её подгрупп одна содержится в другой.

а) Доказать, что подгруппы циклической группы порядка p^n, где p — простое число, образуют цепь.

б) Найти все конечные группы, в которых подгруппы образуют цепь.

в) Найти все группы, у которых подгруппы образуют цепь.

56.25. Представить группу $\mathbb{Q}$ в виде объединения возрастающей цепочки циклических подгрупп.

56.26. Установить изоморфизм между группами $\mathbf{U}_n$ комплексных корней степени n из 1 и группой $\mathbf{Z}_n$ вычетов по модулю n.

56.27. Какие из групп $\langle g\rangle$, порожденных элементом $g \in G$, изоморфны:

а) $G = \mathbb{C}^*, \quad g = -\dfrac{1}{\sqrt{2}} + \dfrac{1}{\sqrt{2}}i;$

б) $G = \mathbf{GL}_2(\mathbb{C}), \quad g = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ i & 0 \end{pmatrix};$

в) $G = \mathbf{S}_6, \quad g = (3\,2\,6\,5\,1);$

г) $G = \mathbb{C}^*, \quad g = 2 - i;$

д) $G = \mathbb{R}^*, \quad g = 10;$

е) $G = \mathbb{C}^*, \quad g = \cos\dfrac{6\pi}{5} + i\sin\dfrac{6\pi}{5};$

ж) $G = \mathbb{Z}, \quad g = 3?$

56.28. Доказать, что во всякой группе чётного порядка имеется элемент порядка 2.

56.29. Будет ли группа обратимых элементов кольца вычетов $\mathbf{Z}_{16}$ циклической?

56.30. Доказать, что всякая собственная подгруппа группы $\mathbf{U}_{p^\infty}$ является циклической конечного порядка.

56.31. Доказать, что:

а) в мультипликативной группе поля для любого натурального числа n существует не более одной подгруппы порядка n;

б) всякая конечная подгруппа мультипликативной группы поля является циклической;

в) мультипликативная группа конечного поля является циклической.

56.32. Найти все подгруппы в группах:

а) $\mathbf{S}_3$; б) $\mathbf{D}_4$; в) $\mathbf{Q}_8$; г) $\mathbf{A}_4$.

56.33. Доказать, что если подгруппа H группы $\mathbf{S}_n$ содержит одно из множеств

$$\{(1\,2), (1\,3), \ldots, (1\,n)\} \quad \{(1\,2), (1\,2\,3\ldots n)\},$$

то $H = \mathbf{S}_n$.

56.34. Найти все элементы группы G, коммутирующие с данным элементом $g \in G$ (централизатор элемента g), если:

а) $G = \mathbf{S}_4, \quad g = (1\,2)(3\,4)$;

б) $G = \mathbf{SL}_2(\mathbb{R}), \quad g = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}$;

в) $G = \mathbf{S}_n, \quad g = (1\,2\,3\,\ldots\,n)$.

56.35. Для многочлена f от переменных x_1, x_2, x_3, x_4 положим

$$G_f = \{\sigma \in \mathbf{S}_4 \mid f(x_{\sigma(1)}, x_{\sigma(2)}, x_{\sigma(3)}, x_{\sigma(4)}) = f(x_1, x_2, x_3, x_4)\}.$$

Доказать, что G_f — подгруппа в $\mathbf{S}_4$, и найти эту подгруппу для многочлена:

а) $f = x_1x_2 + x_3x_4$; б) $f = x_1x_2x_3$;

в) $f = x_1 + x_2$; г) $f = x_1x_2x_3x_4$;

д) $f = \prod\limits_{1 \leqslant j < i \leqslant 4} (x_i - x_j)$.

56.36. Найти смежные классы:

а) аддитивной группы $\mathbb{Z}$ по подгруппе $n\mathbb{Z}$, n — натуральное число;

б) аддитивной группы $\mathbb{C}$ по подгруппе $\mathbb{Z}[i]$ целых гауссовых чисел, т.е. чисел $a+bi$ с целыми a, b;

в) аддитивной группы $\mathbb{R}$ по подгруппе $\mathbb{Z}$;

г) аддитивной группы $\mathbb{C}$ по подгруппе $\mathbb{R}$;

д) мультипликативной группы $\mathbb{C}^*$ по подгруппе $\mathbf{U}$ чисел с модулем 1;

е) мультипликативной группы $\mathbb{C}^*$ по подгруппе $\mathbb{R}^*$;

ж) мультипликативной группы $\mathbb{C}^*$ по подгруппе положительных вещественных чисел;

з) группы подстановок $\mathbf{S}_n$ по стационарной подгруппе элемента n;

и) аддитивной группы вещественных (3×2)-матриц по подгруппе всех матриц (a_{ij}) с условием $a_{31}=a_{32}=a_{22}=0$;

к) аддитивной группы всех многочленов степени не выше 5 с комплексными коэффициентами по подгруппе многочленов степени не выше 3;

л) циклической группы $\langle a\rangle_6$ по подгруппе $\langle a^4\rangle$.

56.37. Пусть g — невырожденная матрица из $\mathbf{GL}_n(\mathbb{C})$ и $H = \mathbf{SL}_n(\mathbb{C})$. Доказать, что смежный класс gH состоит из всех матриц $a\in\mathbf{GL}_n(\mathbb{C})$, определитель которых равен определителю матрицы g.

56.38. Пусть H — подгруппа в группе G. Доказать, что отображение $xH\mapsto Hx^{-1}$ задаёт биекцию между множеством левых и множеством правых смежных классов G по H.

56.39. Пусть $g_1,\ g_2$ — элементы группы G и $H_1,\ H_2$ — подгруппы в G. Доказать, что следующие свойства эквивалентны:

а) $g_1H_1\subseteq g_2H_2$; б) $H_1\subseteq H_2$ и $g_2^{-1}g_1\in H_2$.

56.40. Пусть $g_1,\ g_2$ — элементы группы G и $H_1,\ H_2$ — подгруппы в G. Доказать, что непустое множество $g_1H_1\cap g_2H_2$ является левым смежным классом G по подгруппе $H_1\cap H_2$.

56.41. Пусть K — правый смежный класс группы G по подгруппе H. Доказать, что если $x,y,z\in K$, то $xy^{-1}z\in K$.

56.42. Пусть K — непустое подмножество в группе G, причём если $x,y,z\in K$, то $xy^{-1}z\in K$. Доказать, что K является правым смежным классом группы G по некоторой подгруппе H.

56.43. Пусть $H_1,\ H_2$ — подгруппы в группе G, причём $H_1\subseteq H_2$. Если индекс H_1 в H_2 равен n, а индекс H_2 в G равен m, то индекс H_1 в G равен mn.

56.44. Доказать, что в группе диэдра все осевые симметрии образуют смежный класс по подгруппе вращений.

§ 57. Действие группы на множестве. Отношение сопряжённости

57.1. Найти все орбиты группы G невырожденных линейных операторов, действующих на n-мерном пространстве V, если:

а) G — группа всех невырожденных линейных операторов;

б) G — группа ортогональных операторов;

в) G — группа операторов, матрицы которых в базисе $(e_1, \ldots, e_n)$ диагональны;

г) G — группа операторов, матрицы которых в базисе $(e_1, \ldots, e_n)$ верхние треугольные.

57.2. Найти стационарную подгруппу G_a вектора $a = e_1 + e_2 + \ldots \ldots + e_n$, если:

а) G — группа из 57.1, в); б) G — группа из 57.1, г).

57.3. Найти стационарную подгруппу G_x и орбиту вектора x, если:

а) G — группа всех ортогональных операторов в трехмерном евклидовом пространстве;

б) G — группа всех собственных ортогональных операторов в двумерном евклидовом пространстве.

57.4. Пусть G — группа всех невырожденных линейных операторов в n-мерном векторном пространстве V и X — множество всех подпространств размерности k в X.

а) Найти орбиты группы G в X.

б) Пусть $e_1, \ldots, e_n$ — такой базис в V, что $e_1, \ldots, e_k$ — базис некоторого подпространства U. Найти в базисе $e_1, \ldots, e_n$ матрицы операторов из стационарной подгруппы G_U.

57.5. Пусть G — группа всех невырожденных линейных операторов в n-мерном векторном пространстве V и F — множество флагов в V, т.е. наборов $f = (V_0, V_1, \ldots, V_n)$ подпространств в V, причём $0 = V_0 < V_1 < \ldots < V_n = V$.

а) Найти орбиты G в F.

б) Пусть $e_i \in V_i \setminus V_{i-1}$, $i = 1, \ldots, n$. Доказать, что $e_1, \ldots, e_n$ — базис V.

в) В базисе $e_1, \ldots, e_n$ найти матрицы операторов из стационарной подгруппы G_f.

57.6. Пусть G — группа всех невырожденных линейных операторов в n-мерном векторном пространстве V и X (соответственно Y) — множество всех ненулевых разложимых q-векторов из $\Lambda^q V$ (из $S^q(V)$).

а) Найти орбиты действия G в X и Y.

б) Найти стационарную подгруппу G_a разложимого q-вектора a (вектора из $S^q(V)$).

57.7. Пусть G — группа всех невырожденных линейных операторов в n-мерном вещественном (комплексном) пространстве V и B — множество всех симметричных (эрмитовых) билинейных функций в V. Если $g \in G$ и $b \in B$, то положим $g(b)(x, y) = b(g^{-1}x, g^{-1}y)$.

а) Доказать, что задано действие G в B.

б) Описать орбиты G в B. Найти их число.

в) Описать стационарную подгруппу G_b положительно определённой функции b.

57.8. Пусть G — группа всех невырожденных линейных операторов в n-мерном комплексном пространстве V и $L(V)$ — множество всех линейных операторов в V. Если $g \in G$ и $f \in L(V)$, то положим $g(f) = gfg^{-1}$.

а) Доказать, что задано действие G в $L(V)$.

б) Описать орбиты G в $L(V)$.

57.9. Найти во множестве $\{1, 2, \ldots, 10\}$ все орбиты и все стационарные подгруппы для группы G, порождённой подстановкой:

а) $g = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ 5 & 8 & 3 & 9 & 4 & 10 & 6 & 2 & 1 & 7 \end{pmatrix} \in \mathbf{S}_{10}$;

б) $g = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ 7 & 4 & 6 & 1 & 8 & 3 & 2 & 9 & 5 & 10 \end{pmatrix} \in \mathbf{S}_{10}$;

в) $g = (1\ 6\ 9)(2\ 10)(3\ 4\ 5\ 7\ 8) \in \mathbf{S}_{10}$.

57.10. В прямоугольной системе координат задан ромб с вершинами

$$A = (0, 1), \quad B = (2, 0), \quad C = (0, -1), \quad D = (-2, 0).$$

а) Найти матрицы ортогональных преобразований плоскости, переводящих ромб в себя.

б) Доказать, что эти матрицы образуют относительно умножения группу G, изоморфную группе $\mathbf{V}_4$.

в) Найти орбиты действия группы G на множестве вершин ромба и их стационарные подгруппы.

57.11. Найти порядок группы диэдра $\mathbf{D}_n$.

57.12. Найти порядок:

а) группы вращений куба;

б) группы вращений тетраэдра;

в) группы вращений додекаэдра.

57.13. Доказать, что:

а) группа вращений икосаэдра изоморфна группе $\mathbf{A}_5$;

б) группа движений тетраэдра изоморфна $\mathbf{S}_4$.

57.14. Найти порядок стационарной подгруппы вершины для группы вращений:

а) октаэдра; б) икосаэдра; в) тетраэдра;

г) куба; д) диэдра.

57.15. Пусть G — группа аффинных преобразований в n-мерном аффинном пространстве X. Предположим, что Y — множество всех наборов из $n+1$ точки $(A_0, \ldots, A_n)$, находящихся в общем положении.

а) Найти орбиты G в Y.

б) Найти стационарную подгруппу G_a набора $a \in Y$.

57.16. Пусть G — группа аффинных преобразований в n-мерном аффинном вещественном (комплексном) пространстве X. Обозначим через Q — множество всех квадратичных функций в X. Если $g \in G$, $h \in Q$ и $x \in X$, то положим $g(h) = h(g^{-1}x)$.

а) Доказать, что задано действие G в Q.

б) Описать орбиты G в Q.

в) Описать стационарную подгруппу G_h невырожденной функции $h \in Q$.

57.17. Пусть G — группа дробно-линейных преобразований единичного круга с центром O из задачи 24.22. Найти:

а) стационарную подгруппу точки O;

б) орбиту точки O;

в) пересечение стационарных подгрупп двух различных точек единичного круга.

57.18. Пусть группа G действует на множестве X и x, y — элементы одной орбиты G в X. Доказать, что все такие $g \in G$, что $g(x) = y$, составляют левый смежный класс G по стационарной подгруппе G_x и правый смежный класс по стационарной подгруппе G_y.

57.19. Пусть коммутативная группа G действует на некотором множестве M. Доказать, что если для некоторых $g \in G$ и $m_0 \in M$ справедливо равенство $gm_0 = m_0$, то $gm = m$ для любой точки m, лежащей в одной орбите с точкой m_0.

57.20. Пусть H — подгруппа группы G, $a \in G$. Доказать, что:

а) отображение $\sigma_a\colon\ gH \mapsto agH$ есть перестановка на множестве M всех левых смежных классов группы G по подгруппе H;

б) отображение $f\colon\ a \mapsto \sigma_a$ определяет действие группы G на M;

в) σ_a является тождественной перестановкой тогда и только тогда, когда a принадлежит пересечению всех подгрупп, сопряжённых с H в группе G.

57.21. Перенумеровав левые смежные классы группы G по подгруппе H, найти все перестановки σ_a (задача 57.20), если:

а) $G = \mathbf{Z}_4$, H — единичная подгруппа;

б) $G = \mathbf{D}_4$, H — подгруппа, состоящая из тождественного преобразования и некоторой осевой симметрии квадрата.

57.22. Доказать, что для любой группы G:

а) сопряжение определяет действие

$$m \mapsto g \cdot m = gmg^{-1}, \qquad g, m \in G$$

группы G на множестве G;

б) стационарная подгруппа точки m (централизатор элемента m) совпадает со множеством элементов группы G, перестановочных с m.

57.23. Найти централизатор:

а) перестановки $(1\,2)(3\,4)$ в группе $\mathbf{S}_4$;

б) перестановки $(1\,2\,3\ldots n)$ в группе $\mathbf{S}_n$.

57.24. В группе $\mathbf{GL}_2(\mathbb{R})$ найти централизатор матрицы:

а) $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$; б) $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$; в) $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$; г) $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

57.25. В группе $\mathbf{GL}_n(\mathbb{R})$ найти централизатор матрицы $\mathrm{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$, если:

а) все элементы диагонали различны;

б) $\lambda_1 = \ldots = \lambda_k = a$, $\lambda_{k+1} = \ldots = \lambda_n = b$ и $a \neq b$.

57.26. Какие из трех матриц сопряжены между собой в группе $\mathbf{GL}_2(\mathbb{C})$:

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad A_2 = \begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, \qquad A_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}?$$

57.27. Пусть F — поле. В группе $\mathbf{SL}_n(F)$ найти:

а) централизатор C_{ij} элементарной матрицы $E + E_{ij}$ при $1 \leqslant i \neq \neq j \leqslant n$;

б) пересечение C_{ij} при всех i, j, где $1 \leqslant i \neq j \leqslant n$;

в) класс сопряжённых элементов, содержащих $E + E_{ij}$.

Доказать, что любые две элементарные матрицы $E + \alpha E_{ij}$ и $E + \beta E_{pq}$, где $1 \leqslant i \neq j$, $p \neq q \leqslant n$ и α, $\beta \in F^*$, сопряжены.

57.28. В группе $\mathbf{O}_2(\mathbb{R})$ ортогональных операторов найти:

а) централизатор оператора поворота на угол $q \neq k\pi$;

б) централизатор симметрии относительно оси OX.

57.29. Доказать, что в группе $\mathbf{O}_2(\mathbb{R})$ любые две симметрии сопряжены.

57.30. Найти классы сопряжённых элементов групп:

а) $\mathbf{S}_3$; б) $\mathbf{A}_4$; в) $\mathbf{D}_4$.

57.31. Найти все конечные группы, число классов сопряжённости которых равно: а) 1; б) 2; в) 3.

57.32. В группе $\mathbf{S}_4$ найти класс сопряжённости:

а) перестановки $(1\,2)(3\,4)$; б) перестановки $(1\,2\,4)$.

57.33. Есть ли в группах S_5, S_6 несопряжённые элементы одинаковых порядков?

57.34. Доказать, что две перестановки сопряжены в группе $\mathbf{S}_n$ тогда и только тогда, когда они имеют одинаковую цикловую структуру, т.е. их разложения в произведения независимых циклов для любого k содержат одинаковое число циклов длины k.

57.35. Найти число классов сопряжённости в группах:

а) $\mathbf{S}_4$; б) $\mathbf{S}_5$; в) $\mathbf{S}_6$; г) $\mathbf{D}_4$.

57.36. *Канонической формой* матрицы $A \in \mathbf{SO}_3(\mathbb{R})$ называется сопряжённая с A матрица вида

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\varphi & -\sin\varphi \\ 0 & \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}.$$

Доказать, что матрицы A_1 и A_2 сопряжены в $\mathbf{SO}_3(\mathbb{R})$ тогда и только тогда, когда их канонические формы связаны соотношением $\varphi_1 + \varphi_2 = 2\pi k$ или $\varphi_1 - \varphi_2 = 2\pi k$ для некоторого целого k.

57.37. Доказать, что:

а) если H и K — сопряжённые подгруппы конечной группы и $K \subseteq H$, то $K = H$;

б) подгруппы

$$H = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (n \in \mathbb{Z}) \right\}, \quad K = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 2n \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (n \in \mathbb{Z}) \right\}$$

сопряжены в группе $\mathbf{GL}_2(\mathbb{R})$, и $K \subset H$.

57.38. Найти нормализатор $N(H)$ подгруппы H в группе G, если:

а) $G = \mathbf{GL}_2(\mathbb{R})$, H — подгруппа диагональных матриц;

б) $G = \mathbf{GL}_2(\mathbb{R})$, H — подгруппа матриц вида

$$\begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad a \in \mathbb{R};$$

в) $G = \mathbf{S}_4$, $H = \langle (1234) \rangle$.

57.39. Найти группу автоморфизмов:

а) группы $\mathbf{Z}_5$; б) группы $\mathbf{Z}_6$.

57.40. Доказать, что:

а) $\operatorname{Aut} \mathbf{S}_3 \simeq \mathbf{S}_3$, причём все автоморфизмы группы $\mathbf{S}_3$ внутренние;

б) $\operatorname{Aut} \mathbf{V}_4 \simeq \mathbf{S}_3$, причём внутренним для $\mathbf{V}_4$ является лишь тождественный автоморфизм.

57.41. Является ли циклической группа автоморфизмов:

а) группы $\mathbf{Z}_9$; б) группы $\mathbf{Z}_8$?

57.42. Найти порядок группы $\operatorname{Aut} \operatorname{Aut} \operatorname{Aut} \mathbf{Z}_9$.

57.43. В группе $\mathbf{S}_6$ построить внешний автоморфизм.

57.44. Доказать, что в группе $\mathbf{S}_n$ $(n \neq 6)$ все автоморфизмы внутренние.

57.45. Доказать, что группа автоморфизмов $\mathbf{D}_4$ изоморфна $\mathbf{D}_4$. Найти подгруппу внутренних автоморфизмов группы $\mathbf{D}_4$.

57.46. Найти группу автоморфизмов группы $\mathbf{D}_n$ и подгруппу её внутренних автоморфизмов.

§ 58. Гомоморфизмы и нормальные подгруппы. Факторгруппы, центр

58.1. Доказать, что подгруппа H группы G нормальна, если:

а) G — коммутативная группа, H — любая её подгруппа;

б) $G = \mathbf{GL}_n(\mathbb{R})$, H — подгруппа матриц с определителем, равным 1;

в) $G = \mathbf{S}_n$, $\quad H = \mathbf{A}_n$;

г) $G = \mathbf{S}_4$, $\quad H = \mathbf{V}_4$;

д) G — группа невырожденных комплексных верхнетреугольных матриц, H — группа матриц вида

$$E + \sum_{\substack{1 \leqslant i < j \leqslant n \\ j-i \geqslant k}} \alpha_{ij} E_{ij}, \qquad \alpha_{ij} \in \mathbb{C}.$$

58.2. Будет ли нормальной подгруппой в группе $\mathbf{GL}_n(\mathbb{Z})$ множество всех матриц вида

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix},$$

где числа a, d нечётны, а числа b, c чётны?

58.3. Доказать, что любая подгруппа индекса 2 является нормальной.

58.4. Найти все нормальные подгруппы, отличные от единичной и от всей группы в группах:

а) $\mathbf{S}_3$; $\qquad$ б) $\mathbf{A}_4$; $\qquad$ в) $\mathbf{S}_4$.

58.5. На примере группы $\mathbf{A}_4$ показать, что нормальная подгруппа K нормальной подгруппы H группы G не обязательно является нормальной в G.

58.6. Пусть A и B — нормальные подгруппы группы G и $A \cap B$ — единичная подгруппа. Доказать, что $xy = yx$ для любых $x \in A$, $y \in B$.

58.7. Пусть H — подгруппа в G индекса 2, C — класс сопряжённых в G элементов и $C \subset H$. Доказать, что C является либо классом сопряжённых в H элементов, либо объединением двух классов сопряжённых в H элементов, состоящих из одинакового числа элементов.

58.8. Доказать, что факторгруппа $\mathbb{R}^*/\mathbb{Q}^*$ не является циклической.

58.9. Найти число классов сопряжённости в группе $\mathbf{A}_5$ и число элементов в каждом из классов.

58.10. Доказать, что группа $\mathbf{A}_5$ является простой.

58.11. а) Доказать, что в группе кватернионов $\mathbf{Q}_8$ любая подгруппа является нормальной.

б) Найти центр и все классы сопряжённости в группе $\mathbf{Q}_8$.

в) Доказать, что комплексные матрицы

$$\pm E = \pm \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad \pm I = \pm \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix},$$

$$\pm J = \pm \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \pm K = \pm \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix}$$

относительно умножения матриц образуют группу, изоморфную $\mathbf{Q}_8$.

58.12. Найти все нормальные подгруппы в группе диэдра $\mathbf{D}_n$.

58.13. Пусть F — поле и G — подгруппа в $\mathbf{GL}_n(F)$, содержащая $\mathbf{SL}_n(F)$. Доказать, что G нормальна в $\mathbf{GL}_n(F)$.

58.14. Сопоставим каждой матрице $\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} \in \mathbf{GL}_2(\mathbb{C})$ дробно-линейное преобразование

$$f(z) = \frac{az+b}{cz+d}.$$

Найти ядро этого гомоморфизма.

58.15. Доказать, что ядро любого гомоморфизма группы $\mathbb{C}^*$ в аддитивную группу $\mathbb{R}$ является бесконечной группой.

58.16. Пусть $n,\ m \geqslant 2$ — натуральные числа и $\mathbf{SL}_n(\mathbb{Z}; m\mathbb{Z})$ — подмножество в $\mathbf{SL}_n(\mathbb{Z})$, состоящее из матриц вида $E + Xm$, где X — целочисленная квадратная матрица размера n. Доказать, что:

а) $\mathbf{SL}_n(\mathbb{Z}; m\mathbb{Z})$ — нормальная подгруппа в $\mathbf{SL}_n(\mathbb{Z})$;

б) если $m = p$ — простое число, то

$$\mathbf{SL}_n(\mathbb{Z})/\mathbf{SL}_n(\mathbb{Z}; p\mathbb{Z}) \simeq \mathbf{SL}_n(\mathbb{Z}_p);$$

в) группа $\mathbf{SL}_n(\mathbb{Z}; m\mathbb{Z})$ не содержит элементов конечного порядка при $m \geqslant 3$;

г) если G — конечная подгруппа в $\mathbf{SL}_n(\mathbb{Z})$, то порядок G делит

$$\frac{1}{2}(3^n - 1)(3^n - 3)\ldots(3^n - 3^{n-1}).$$

58.17. Доказать, что для любой группы G множество всех внутренних автоморфизмов является нормальной подгруппой в группе $\operatorname{Aut} G$ всех автоморфизмов группы G.

58.18. Доказать, что любая подгруппа, содержащая коммутант группы, нормальна.

58.19. Найти центр группы: а) $\mathbf{S}_n$; б) $\mathbf{A}_n$; в) $\mathbf{D}_n$.

58.20. Пусть группа G порождена элементами a, b, причём

$$a^2 = b^2 = (ab)^4 = 1.$$

Доказать, что элемент $(ab)^2$ лежит в центре группы G.

58.21. Доказать, что центр группы порядка p^n, где p — простое число ($n \in \mathbb{N}$), содержит более одного элемента.

58.22. Пусть G — множество верхних унитреугольных матриц порядка 3 с элементами из поля $\mathbf{Z}_p$.

а) Доказать, что G — некоммутативная группа порядка p^3 относительно умножения.

б) Найти центр группы G.

в) Найти все классы сопряжённых элементов группы G.

58.23. Найти центр группы:

а) $\mathbf{GL}_n(\mathbb{R})$; б) $\mathbf{O}_2(\mathbb{R})$; в) $\mathbf{SO}_2(\mathbb{R})$; г) $\mathbf{SO}_3(\mathbb{R})$;

д) $\mathbf{SU}_2(\mathbb{C})$; е) $\mathbf{SU}_n(\mathbb{C})$; ж) верхнетреугольных матриц.

58.24. Найти центр:

а) группы всех дробно-линейных преобразований комплексной плоскости;

б) группы всех преобразований единичного круга из задачи 24.25.

58.25. Доказать, что группа H является гомоморфным образом конечной циклической группы G тогда и только тогда, когда H также циклическая, и её порядок делит порядок группы G.

58.26. Доказать, если группа G гомоморфно отображена на группу H, причём $a \mapsto a'$, то:

а) порядок a делится на порядок a';

б) порядок G делится на порядок H.

58.27. Найти все гомоморфные отображения:

а) $\mathbf{Z}_6 \to \mathbf{Z}_6$; б) $\mathbf{Z}_6 \to \mathbf{Z}_{18}$; в) $\mathbf{Z}_{18} \to \mathbf{Z}_6$;

г) $\mathbf{Z}_{12} \to \mathbf{Z}_{15}$; д) $\mathbf{Z}_6 \to \mathbf{Z}_{25}$.

58.28. Доказать, что аддитивную группу рациональных чисел нельзя гомоморфно отобразить на аддитивную группу целых чисел.

58.29. Найти факторгруппы:

а) $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$; б) $\mathbf{U}_{12}/\mathbf{U}_3$; в) $4\mathbb{Z}/12\mathbb{Z}$; г) $\mathbb{R}^*/\mathbb{R}_+$.

58.30. Пусть F^n — аддитивная группа n-мерного линейного пространства над полем F и H — подгруппа векторов k-мерного подпространства. Доказать, что факторгруппа F^n/H изоморфна F^{n-k}.

58.31. Пусть H_n — множество чисел с аргументами вида $2\pi k/n$ $(k \in \mathbb{Z})$. Доказать, что:

а) $\mathbb{R}/\mathbb{Z} \simeq \mathbf{U}$; б) $\mathbb{C}^*/\mathbb{R}^* \simeq \mathbf{U}$; в) $\mathbb{C}^*/\mathbf{U} \simeq \mathbb{R}_+$;

г) $\mathbf{U}/\mathbf{U}_n \simeq \mathbf{U}$; д) $\mathbb{C}^*/\mathbf{U}_n \simeq \mathbb{C}^*$; е) $\mathbb{C}^*/H_n \simeq \mathbf{U}$;

ж) $H_n/\mathbb{R}_+ \simeq \mathbf{U}_n$; з) $H_n/\mathbf{U}_n \simeq \mathbb{R}_+$.

58.32. Пусть

$$G = \mathbf{GL}_n(\mathbb{R}), \qquad H = \mathbf{GL}_n(\mathbb{C}), \qquad P = \mathbf{SL}_n(\mathbb{R}), \qquad Q = \mathbf{SL}_n(\mathbb{C})$$

$$A = \{X \in G \mid |\det X| = 1\}, \qquad B = \{X \in H \mid |\det X| = 1\},$$

$$B = \{X \in G \mid \det X > 1\}, \qquad N = \{X \in H \mid \det X > 0\}.$$

Доказать, что:

а) $G/P \simeq \mathbb{R}^*$; б) $H/Q \simeq \mathbb{C}^*$; в) $G/(N \cap G) \simeq \mathbf{Z}_2$;

г) $H/N \simeq \mathbf{U}$; д) $G/A \simeq \mathbb{R}_+$; е) $H/B \simeq \mathbb{R}_+$.

58.33. Пусть G — группа аффинных преобразований n-мерного пространства, H — подгруппа параллельных переносов, K — подгруппа преобразований, оставляющих неподвижной данную точку O. Доказать, что:

а) H является нормальной подгруппой в G;

б) $G/H \simeq K$.

58.34. Доказать, что факторгруппа группы $\mathbf{S}_4$ по нормальной подгруппе $\{e, (12)(34), (13)(24), (14)(23)\}$ изоморфна группе $\mathbf{S}_3$.

58.35. Доказать, что если H — подгруппа индекса k в группе G, то H содержит некоторую нормальную в G подгруппу, индекс которой в G делит $k!$.

58.36. Доказать, что подгруппа, индекс которой является наименьшим простым делителем порядка группы, нормальна.

58.37. Доказать, что факторгруппа группы $\mathbf{GL}_2(\mathbf{Z}_3)$ по её центру изоморфна группе $\mathbf{S}_4$.

58.38. Доказать, что в группе $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$:

а) каждый элемент имеет конечный порядок;

б) для каждого натурального n имеется в точности одна подгруппа порядка n.

58.39. Доказать, что группа внутренних автоморфизмов группы G изоморфна факторгруппе группы G по её центру.

58.40. Доказать, что факторгруппа некоммутативной группы по её центру не может быть циклической.

58.41. Доказать, что группа порядка p^2, где p — простое число, коммутативна.

58.42. Доказать, что группа всех автоморфизмов некоммутативной группы не может быть циклической.

* * *

58.43. Найти число классов сопряжённости и число элементов в каждом классе для некоммутативной группы порядка p^3, где p — простое число.

58.44. Подгруппа H называется *максимальной* в группе G, если $H \neq G$ и любая подгруппа, содержащая H, совпадает с H или G. Доказать, что:

а) пересечение любых двух различных максимальных коммутативных подгрупп содержится в центре группы;

б) во всякой конечной простой некоммутативной группе найдутся две различные максимальные подгруппы, пересечение которых содержит более одного элемента;

в) во всякой конечной простой некоммутативной группе существует собственная некоммутативная подгруппа.

58.45. Доказать, что факторгруппа $\mathbf{SL}_2(\mathbf{Z}_5)$ по её центру изоморфна $\mathbf{A}_5$.

58.46. Доказать, что всякая конечная подгруппа в $\mathbf{SL}_2(\mathbb{Q})$ является подгруппой одной из следующих групп: $\mathbf{D}_3$, $\mathbf{D}_4$, $\mathbf{D}_6$.

58.47. Пусть F — поле, $n \geqslant 3$ и G — нормальная подгруппа в $\mathbf{GL}_n(F)$. Доказать, что либо $G \supseteq \mathbf{SL}_n(F)$, либо G состоит из скалярных матриц.

58.48. Пусть F — поле, содержащее не менее четырех элементов и G — нормальная подгруппа в $\mathbf{GL}_2(F)$. Доказать, что либо $G \supseteq \mathbf{SL}_2(F)$, либо G состоит из скалярных матриц.

58.49. Доказать, что $\mathbf{SL}_2(2) \simeq \mathbf{S}_3$.

58.50. Найти все нормальные подгруппы в $\mathbf{SL}_2(3)$.

58.51. Пусть G — нормальная подгруппа конечного индекса в $\mathbf{SL}_n(\mathbb{Z})$, $n \geqslant 3$. Тогда существует такое натуральное число m, что $G \subseteq \mathbf{SL}_n(\mathbb{Z}, m\mathbb{Z})$.

58.52. Пусть F — поле, $n \geqslant 3$ и φ — автоморфизм группы $\mathbf{GL}_n(F)$. Доказать, что существует такой гомоморфизм групп $\tau : \mathbf{GL}_n(F) \to F^*$ и автоморфизм τ поля F, что либо

$$\varphi(x) = \tau(x)\, g\, \tau(x)\, g^{-1},$$

либо

$$\varphi(x) = \tau(x)\, g^t\, \tau(x)^{-1}\, g^{-1},$$

где $g \in \mathbf{GL}_n(F)$.

§ 59. Силовские подгруппы. Группы малых порядков

59.1. Найти порядок групп:

а) $\mathbf{GL}_n(\mathbb{F}_q)$; б) $\mathbf{SL}_n(\mathbb{F}_q)$;

в) группы невырожденных верхнетреугольных матриц размера n над конечным полем из q элементов.

59.2. Изоморфны ли: а) группа $\mathbf{Q}_8$ и группа $\mathbf{D}_4$;

б) группа $\mathbf{S}_4$ и группа $\mathbf{SL}_2(3)$?

59.3. Найти все силовские 2-подгруппы и 3-подгруппы в группах:

а) $\mathbf{S}_3$; б) $\mathbf{A}_4$.

59.4. Указать сопрягающие элементы для силовских 2-подгрупп и силовских 3-подгрупп в группах:

а) $\mathbf{S}_3$; б) $\mathbf{A}_4$.

59.5. Доказать, что любая силовская 2-подгруппа группы $\mathbf{S}_4$ изоморфна группе диэдра $\mathbf{D}_4$.

59.6. В каких силовских 2-подгруппах группы $\mathbf{S}_4$ содержатся перестановки:

а) $(1\,3\,2\,4)$; б) $(1\,3)$; в) $(1\,2)(3\,4)$?

59.7. Доказать, что существуют в точности две некоммутативные неизоморфные группы порядка 8 — группа кватернионов $\mathbf{Q}_8$ и группа диэдра $\mathbf{D}_4$.

59.8. Доказать, что силовская 2-подгруппа группы $\mathbf{SL}_2(\mathbb{Z}_3)$:

а) изоморфна группе кватернионов;

б) нормальна в $\mathbf{SL}_2(\mathbb{Z}_3)$.

59.9. Сколько различных силовских p-подгрупп в группе $\mathbf{A}_5$, где:

а) $p = 2$; б) $p = 3$; в) $p = 5$?

59.10. Найти порядок силовской p-подгруппы в группе $\mathbf{S}_n$.

59.11. Сколько различных силовских p-подгрупп в группе $\mathbf{S}_p$, где p — простое число?

59.12. Доказать, что силовская p-подгруппа в группе G единственна тогда и только тогда, когда она нормальна в G.

59.13. Пусть

$$P = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \;\middle|\; a \in \mathbf{Z}_p, \quad p \text{ — простое число} \right\}.$$

а) Доказать, что P — силовская p-подгруппа в группе $\mathbf{SL}_2(\mathbf{Z}_p)$.

б) Найти нормализатор подгруппы P в $\mathbf{SL}_2(\mathbf{Z}_p)$.

в) Найти число различных силовских p-подгрупп в $\mathbf{SL}_2(\mathbf{Z}_p)$.

г) Доказать, что P — силовская p-подгруппа в группе $\mathbf{GL}_2(\mathbf{Z}_p)$.

д) Найти нормализатор подгруппы P в $\mathbf{GL}_2(\mathbf{Z}_p)$.

е) Найти число различных силовских p-подгрупп в $\mathbf{GL}_2(\mathbf{Z}_p)$.

59.14. Доказать, что подгруппа верхних унитреугольных матриц является силовской p-подгруппой в $\mathbf{GL}_n(\mathbf{Z}_p)$.

59.15. В группе диэдра $\mathbf{D}_n$ для каждого простого делителя p числа $2n$:

а) найти все силовские p-подгруппы;

б) указать сопрягающие элементы для силовских p-подгрупп.

59.16. Доказать, что образ силовской p-подгруппы конечной группы G при гомоморфизме группы G на группу H является силовской подгруппой в H.

59.17. Доказать, что любая силовская p-подгруппа прямого произведения конечных групп A и B является произведением силовских p-подгрупп сомножителей A и B.

59.18. Пусть P — силовская p-подгруппа конечной группы G, H — нормальная в G подгруппа.

а) Доказать, что пересечение $P \cap H$ является силовской p-подгруппой в H.

б) Привести пример, показывающий, что без предположения о нормальности подгруппы H утверждение пункта а) неверно.

59.19. Доказать, что все силовские подгруппы группы порядка 100 коммутативны.

59.20. Доказать, что любая группа порядка:

а) 15; б) 35; в) 185; г) 255;
коммутативна.

59.21. Сколько различных силовских 2-подгрупп и силовских 5-подгрупп в некоммутативной группе порядка 20?

59.22. Доказать, что не существует простых групп порядка:

а) 36; б) 80; в) 56; г) 196; д) 200.

59.23. Пусть p и q — простые числа, $p < q$. Доказать, что:

а) если $q-1$ не делится на p, то любая группа порядка pq коммутативна;

б) если $q-1$ делится на p, то в группе невырожденных матриц вида $\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ $(a, b \in \mathbf{Z}_q)$ имеется некоммутативная подгруппа порядка pq.

59.24. Сколько элементов порядка 7 в простой группе порядка 168?

* * *

59.25. Пусть K — нормальная подгруппа в p-группе G. Доказать, что $K \cap Z(G) \neq 1$.

59.26. Пусть V — конечномерное векторное пространство над полем F характеристики p и G — p-группа линейных невырожденных операторов в V. Доказать, что существует такой ненулевой вектор $x \in V$, что $gx = x$ для всех $g \in G$.

59.27. Пусть P — силовская p-подгруппа в конечной группе G и H — подгруппа в G, содержащая нормализатор $N_G(P)$. Доказать, что $N_G(H) = H$.

§ 60. Прямые произведения и прямые суммы. Абелевы группы

60.1. Доказать, что группы $\mathbb{Z}$ и $\mathbb{Q}$ не разлагаются в прямую сумму ненулевых подгрупп.

60.2. Разлагаются ли в прямое произведение нееденичных подгрупп группы:

а) $\mathbf{S}_3$; б) $\mathbf{A}_4$; в) $\mathbf{S}_4$; г) $\mathbf{Q}_8$?

60.3. Доказать, что конечная циклическая группа является прямой суммой примарных циклических подгрупп.

60.4. Доказать, что прямая сумма циклических групп $\mathbf{Z}_m \oplus \mathbf{Z}_n$ является циклической группой тогда и только тогда, когда наибольший общий делитель m и n равен 1.

60.5. Разложить в прямую сумму группы:

а) $\mathbf{Z}_6$; б) $\mathbf{Z}_{12}$; в) $\mathbf{Z}_{60}$.

60.6. Доказать, что мультипликативная группа комплексных чисел является прямым произведением группы положительных вещественных чисел и группы всех комплексных чисел, по модулю равных 1.

60.7. Доказать, что при $n \geqslant 3$ мультипликативная группа кольца вычетов $\mathbf{Z}_{2^n}$ является прямым произведением подгруппы $\{\pm 1\}$ и циклической группы порядка 2^{n-2}.

60.8. Чему равен порядок:

а) прямого произведения конечных групп;

б) элемента прямого произведения конечных групп?

60.9. Доказать, что если в абелевой группе подгруппы $A_1, A_2, \ldots$ $\ldots, A_k$ имеют конечные попарно взаимно простые порядки, то их сумма является прямой.

60.10. Пусть D — подгруппа прямого произведения $A \times B$ групп A и B взаимно простых порядков. Доказать, что

$$D \simeq (D \cap A) \times (D \cap B).$$

60.11. Пусть k — наибольший порядок элементов конечной абелевой группы G. Доказать что порядок любого элемента группы G делит k. Верно ли это утверждение без предположения об абелевости группы?

60.12. Найти все прямые разложения группы, состоящей из чисел вида $\pm 2^n$.

60.13. Пусть A — конечная абелева группа. Найти все прямые разложения группы $\mathbb{Z} \oplus A$, в которых одно из слагаемых является бесконечной циклической группой.

60.14. Найти классы сопряжённости группы $A \times B$, если известны классы сопряжённости групп A и B.

60.15. а) Доказать, что центр прямого произведения $A \times B$ равен прямому произведению центров A и B.

б) Пусть N — нормальная подгруппа в $A \times B$, причём

$$N \cap A = N \cap B = 1.$$

Доказать, что N лежит в центре $A \times B$.

60.16. Доказать, что если факторгруппа A/B абелевой группы A по подгруппе B является свободной абелевой группой, то $A = B \oplus C$, где C — свободная абелева группа.

60.17. Доказать, что подгруппа A абелевой группы G выделяется в G прямым слагаемым тогда и только тогда, когда существует сюръективный гомоморфизм $\pi\colon\ G \to A$ такой, что $\pi^2 = \pi$.

60.18. Пусть φ_1, φ_2 — гомоморфизмы групп A_1, A_2 в абелеву группу B. Доказать, что существует единственный гомоморфизм $\varphi : A_1 \times A_2 \to B$, ограничения которого на A_1 и A_2 совпадают соответственно с φ_1 и φ_2. Существенна ли здесь абелевость группы B?

60.19. На множестве гомоморфизмов абелевой группы A в абелеву группу B определим операцию сложения по правилу

$$(\alpha + \beta)(x) = \alpha(x) + \beta(x).$$

Доказать, что гомоморфизмы $A \to B$ образуют абелеву группу $\mathrm{Hom}(A, B)$.

60.20. Найти группы гомоморфизмов:

а) $\mathrm{Hom}(\mathbf{Z}_{12}, \mathbf{Z}_6)$; б) $\mathrm{Hom}(\mathbf{Z}_{12}, \mathbf{Z}_{18})$;

в) $\mathrm{Hom}(\mathbf{Z}_6, \mathbf{Z}_{12})$; г) $\mathrm{Hom}(A_1 \oplus A_2, B)$;

д) $\mathrm{Hom}(A, B_1 \oplus B_2)$; е) $\mathrm{Hom}(\mathbf{Z}_n, \mathbf{Z}_k)$;

ж) $\mathrm{Hom}(\mathbb{Z}, \mathbf{Z}_n)$; з) $\mathrm{Hom}(\mathbf{Z}_n, \mathbb{Z})$;

и) $\mathrm{Hom}(\mathbb{Z}, \mathbb{Z})$; к) $\mathrm{Hom}(\mathbf{Z}_2 \oplus \mathbf{Z}_2, \mathbf{Z}_8)$;

л) $\mathrm{Hom}(\mathbf{Z}_2 \oplus \mathbf{Z}_3, \mathbf{Z}_{30})$.

60.21. Доказать, что $\mathrm{Hom}(\mathbb{Z}, A) \simeq A$.

60.22. Пусть A — абелева группа. Доказать, что все её эндоморфизмы образуют кольцо $\mathrm{End}\, A$ с единицей относительно сложения и обычного умножения отображений.

60.23. Доказать, что группа автоморфизмов абелевой группы совпадает с группой обратимых элементов её кольца эндоморфизмов.

60.24. Найти кольца эндоморфизмов групп:

а) $\mathbb{Z}$; б) $\mathbf{Z}_n$; в) $\mathbb{Q}$.

60.25. Доказать, что в абелевой группе отображение $x \to nx$ ($n \in \in \mathbb{Z}$) является эндоморфизмом. Для каких групп оно будет:

а) инъективным; б) сюръективным?

60.26. Доказать, что кольцо эндоморфизмов свободной абелевой группы ранга n изоморфно кольцу $\mathbf{M}_n(\mathbb{Z})$.

60.27. Найти группы автоморфизмов групп:

а) $\mathbb{Z}$; б) $\mathbb{Q}$; в) $\mathbf{Z}_{2^n}$; г) свободной абелевой ранга n.

60.28. Доказать, что:

а) $\mathrm{Aut}\, \mathbf{Z}_{30} \simeq \mathrm{Aut}\, \mathbf{Z}_{15}$; б) $\mathrm{Aut}(\mathbb{Z} \oplus \mathbf{Z}_2) = \mathbf{Z}_2 \oplus \mathbf{Z}_2$.

60.29. Доказать, что кольцо $\mathrm{End}(\mathbb{Z} \oplus \mathbf{Z}_2)$ бесконечно и некоммутативно.

60.30. Доказать, что кольцо эндоморфизмов конечной абелевой группы является прямой суммой колец эндоморфизмов её примарных компонент.

60.31. Доказать, что подгруппа конечно порождённой абелевой группы также конечно порождена.

60.32. Доказать, что всякий гомоморфизм конечно порождённой абелевой группы на себя является автоморфизмом.

Верно ли аналогичное утверждение для аддитивной группы кольца многочленов?

60.33. Доказать, что свободные абелевы группы рангов m и n изоморфны тогда и только тогда, когда $m = n$.

60.34. Пусть A, B, C — конечнопорождённые абелевы группы, причём $A \oplus C \simeq B \oplus C$. Доказать, что $A \simeq B$.

60.35. Пусть порядок конечной абелевой группы G делится на число m. Доказать, что в G есть подгруппа порядка m.

60.36. Пусть A и B — конечные абелевы группы, причём для любого натурального числа m в A и B число элементов порядка m одинаково. Доказать, что $A \simeq B$.

60.37. Пусть A и B — конечнопорождённые абелевы группы, причём каждая из них изоморфна подгруппе другой. Доказать, что $A \simeq B$.

60.38. Доказать, что подгруппа B свободной абелевой группы A является свободной, причём ранг B не превосходит ранга A.

60.39. Пользуясь основной теоремой о конечно порождённых абелевых группах, найти с точностью до изоморфизма все абелевы группы порядка:

а) 2; б) 6; в) 8; г) 12;

д) 16; е) 24; ж) 36; з) 48.

60.40. Говорят, что абелева группа *имеет тип* $(n_1, n_2, \ldots, n_k)$, если она является прямой суммой циклических групп порядков n_1, $n_2, \ldots, n_k$.

Есть ли в абелевой группе типа (2,16) подгруппы типа:

а) (2,8); б) (4,4); в) (2,2,2)?

60.41. Найти тип группы $(\langle a\rangle_9 \oplus \langle b\rangle_{27})/\langle 3a + 9b\rangle$.

60.42. Изоморфны ли группы:

а) $(\langle a\rangle_2 \oplus \langle b\rangle_4)/\langle 2b\rangle$ и $(\langle a\rangle_2 \oplus \langle b\rangle_4)/\langle a + 2b\rangle$;

б) $\mathbf{Z}_6 \oplus \mathbf{Z}_{36}$ и $\mathbf{Z}_{12} \oplus \mathbf{Z}_{18}$;

в) $\mathbf{Z}_6 \oplus \mathbf{Z}_{36}$ и $\mathbf{Z}_9 \oplus \mathbf{Z}_{24}$;

г) $\mathbf{Z}_6 \oplus \mathbf{Z}_{10} \oplus \mathbf{Z}_{10}$ и $\mathbf{Z}_{60} \oplus \mathbf{Z}_{10}$?

60.43. Сколько подгрупп:

а) порядков 2 и 6 в нециклической абелевой группе порядка 12;

б) порядков 3 и 6 в нециклической абелевой группе порядка 18;

в) порядков 5 и 15 в нециклической абелевой группе порядка 75?

60.44. Найти все прямые разложения групп:

а) $\langle a\rangle_2 \oplus \langle b\rangle_2$;

б) $\langle a\rangle_p \oplus \langle b\rangle_p$;

в) $\langle a\rangle_2 \oplus \langle b\rangle_4$.

60.45. Сколько элементов:

а) порядка 2, 4 и 6 в группе $\mathbf{Z}_2 \oplus \mathbf{Z}_4 \oplus \mathbf{Z}_3$;

б) порядка 2, 4 и 5 в группе $\mathbf{Z}_2 \oplus \mathbf{Z}_4 \oplus \mathbf{Z}_4 \oplus \mathbf{Z}_5$?

60.46. Пользуясь основной теоремой о конечных абелевых группах, доказать, что конечная подгруппа мультипликативной группы поля является циклической.

60.47. Пусть F — поле, у которого мультипликативная группа F^* конечно порождена. Доказать, что поле F конечно.

60.48. Доказать, что конечно порожденная подгруппа мультипликативной группы комплексных чисел разлагается в прямое произведение свободной абелевой группы и конечной циклической.

60.49. Пусть A — свободная абелева группа с базисом $e_1, \ldots, e_n$ и $x = m_1e_1 + \ldots + m_ne_n \in A \setminus 0$, где $m_i \in \mathbb{Z}$. Доказать, что циклическая группа $\langle x\rangle$ является прямым слагаемым в A тогда и только тогда, когда наибольший общий делитель чисел $m_1, \ldots, m_n$ равен 1.

60.50. Пусть A — свободная абелева группа с базисом $x_1, \ldots, x_n$. Доказать, что элементы

$$y_j = \sum_{i=1}^{n} a_{ij}x_i, \qquad j = 1, \ldots, n,\ a_{ij} \in \mathbb{Z},$$

составляют базис группы A тогда и только тогда, когда $\det(a_{ij}) = \pm 1$.

60.51. Пусть A — свободная абелева группа с базисом $x_1, \ldots, x_n$, B — её подгруппа с порождающими элементами

$$y_j = \sum_{i=1}^{n} a_{ij}x_i, \qquad j = 1, \ldots, n,\ a_{ij} \in \mathbb{Z}.$$

Доказать, что факторгруппа A/B конечна тогда и только тогда, когда $\det(a_{ij}) \neq 0$, и при этом $|A/B| = |\det(a_{ij})|$.

60.52. Разложить в прямую сумму циклических групп факторгруппу A/B, где A — свободная абелева группа с базисом x_1, x_2, x_3, B — её подгруппа, порождённая y_1, y_2, y_3:

а) $\begin{cases} y_1 = 7x_1 + 2x_2 + 3x_3, \\ y_2 = 21x_1 + 8x_2 + 9x_3, \\ y_3 = 5x_1 - 4x_2 + 3x_3; \end{cases}$ б) $\begin{cases} y_1 = 5x_1 + 5x_2 + 3x_3, \\ y_2 = 5x_1 + 6x_2 + 5x_3, \\ y_3 = 8x_1 + 7x_2 + 9x_3; \end{cases}$

в) $\begin{cases} y_1 = 5x_1 + 5x_2 + 2x_3, \\ y_2 = 11x_1 + 8x_2 + 5x_3, \\ y_3 = 17x_1 + 5x_2 + 8x_3; \end{cases}$ г) $\begin{cases} y_1 = 6x_1 + 5x_2 + 7x_3, \\ y_2 = 8x_1 + 7x_2 + 11x_3, \\ y_3 = 6x_1 + 5x_2 + 11x_3; \end{cases}$

д) $\begin{cases} y_1 = 4x_1 + 5x_2 + x_3, \\ y_2 = 8x_1 + 9x_2 + x_3, \\ y_3 = 4x_1 + 6x_2 + 2x_3; \end{cases}$ е) $\begin{cases} y_1 = 2x_1 + 6x_2 - 2x_3, \\ y_2 = 2x_1 + 8x_2 - 4x_3, \\ y_3 = 4x_1 + 12x_2 - 2x_3; \end{cases}$

ж) $\begin{cases} y_1 = 6x_1 + 5x_2 + 4x_3, \\ y_2 = 7x_1 + 6x_2 + 9x_3, \\ y_3 = 5x_1 + 4x_2 - 4x_3; \end{cases}$ з) $\begin{cases} y_1 = x_1 + 2x_2 + 3x_3, \\ y_2 = 2y_1, \\ y_3 = 3y_1; \end{cases}$

и) $\begin{cases} y_1 = 4x_1 + 7x_2 + 3x_3, \\ y_2 = 2x_1 + 3x_2 + 2x_3, \\ y_3 = 6x_1 + 10x_2 + 5x_3; \end{cases}$ к) $\begin{cases} y_1 = 2x_1 + 3x_2 + 4x_3, \\ y_2 = 5x_1 + 5x_2 + 6x_3, \\ y_3 = 2x_1 + 6x_2 + 9x_3. \end{cases}$

60.53. В факторгруппе свободной абелевой группы A с базисом x_1, x_2, x_3 по подгруппе B, порождённой $x_1 + x_2 + 4x_3$ и $2x_1 - x_2 + 2x_3$, найти порядок смежного класса $(x_1 + 2x_3) + B$.

60.54. В факторгруппе свободной абелевой группы A с базисом x_1, x_2, x_3 по подгруппе B, порождённой $2x_1 + x_2 - 50x_3$ и $4x_1 + 5x_2 + 60x_3$ найти порядок элемента $32x_1 + 31x_2 + B$.

60.55. Доказать, что кольцо эндоморфизмов конечной абелевой группы коммутативно тогда и только тогда, когда каждая её примарная компонента является циклической.

* * *

60.56. Аддитивная подгруппа H в n-мерном вещественном пространстве $\mathbb{R}^n$ дискретна, если существует такая окрестность нуля U, что $U \cap H = 0$. Доказать, что дискретная подгруппа в $\mathbb{R}^n$ является свободной абелевой группой и её ранг не превосходит n.

60.57. Найти все элементы конечного порядка в $\mathbb{R}^n/\mathbb{Z}^n$.

60.58. Пусть $H = \mathbb{Z}[i]$ — подгруппа целых гауссовых чисел в аддитивной группе поля комплексных чисел $\mathbb{C}$. Предположим, что $z = x + iy \in \mathbb{C} \setminus H$, где $x, y \in \mathbb{R}^*$, причём xy^{-1} иррационально. Доказать, что $\langle z \rangle + H$ всюду плотно в $\mathbb{C}$.

60.59. Пусть H — аддитивная замкнутая подгруппа в $\mathbb{R}^n$. Доказать, что $H = L \oplus H_1$, где L — подпространство в $\mathbb{R}^n$ и H_1 — дискретная подгруппа в $\mathbb{R}^n$.

60.60. Доказать, что если порядок элемента a абелевой группы A взаимно прост с n, то уравнение $nx = a$ имеет в A решение.

60.61. Абелева группа A называется *делимой*, если уравнение $nx = a$ имеет в ней решение при любом $a \in A$ и целом $n \neq 0$.

Доказать, что группа делима тогда и только тогда, когда при любом a и любом простом p уравнение $px = a$ имеет решение.

60.62. Доказать, что прямая сумма делима тогда и только тогда, когда делимы все прямые слагаемые.

60.63. Доказать, что группы $\mathbb{Q}$ и $\mathbf{U}_{p^\infty}$ (p — простое число) делимы.

60.64. Доказать, что в группе без кручения можно ввести структуру линейного пространства над полем $\mathbb{Q}$ тогда и только тогда, когда она является делимой.

60.65. Пусть A — делимая подгруппа группы G, B — максимальная подгруппа группы G такая, что $A \cap B = \{0\}$ (такая всегда существует). Доказать, что $G = A \oplus B$.

60.66. Доказать, что в любой абелевой группе существует делимая подгруппа, факторгруппа по которой не имеет делимых подгрупп.

60.67. Пусть A — конечно порожденная абелева группа и B — подгруппа в A. Предположим, что A/B — группа без кручения. Тогда $A = B \oplus C$, где C — свободная абелева группа.

60.68. Пусть A, B — свободные абелевы группы и $\varphi : A \to B$ — гомоморфизм групп. Доказать, что $\operatorname{Ker} \varphi$ — прямое слагаемое в A.

60.69. Пусть A — свободная абелева группа с базой $e_1, \ldots, e_n$, C — целочисленная квадратная матрица размера n. Обозначим че-

рез B множество всех таких векторов $x_1e_1 + \ldots + x_ne_n \in A$, что

$$C \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = 0.$$

Доказать, что B — подгруппа в A, являющаяся прямым слагаемым в A. Обратно, любое прямое слагаемое в A задается системой линейных однородных целочисленных уравнений.

§ 61. Порождающие элементы и определяющие соотношения

61.1. Доказать, что:

а) группа $\mathbf{S}_n$ порождается транспозицией (12) и циклом $(12\ldots n)$;

б) группа $\mathbf{A}_n$ порождается тройными циклами.

61.2. Доказать, что:

а) группа $\mathbf{GL}_n(K)$ над полем K порождается матрицами вида $E + aE_{ij}$, где $a \in K$, $1 \leqslant i \neq j \leqslant n$, и матрицами $E + bE_{11}$, где $b \in K$, $b \neq -1$;

б) группа $\mathbf{UT}_n(K)$ порождается матрицами $E + aE_{ij}$, где $a \in K$, $1 \leqslant i < j \leqslant n$.

61.3. Доказать, что специальная линейная группа $\mathbf{SL}_n(K)$ над полем K порождается *трансвекциями*, т.е. элементарными матрицами вида $E + \alpha E_{ij}$ $(i \neq j)$.

61.4. Доказать, что:

а) любую целочисленную матрицу с единичным определителем можно привести к единичному виду только элементарными преобразованиями, заключающимися в том, что к одной строке прибавляется другая строка, умноженная на ± 1;

б) группа $\mathbf{SL}_n(\mathbb{Z})$ конечно порождена.

* * *

61.5. Пусть $\mathbb{F}_q$ — поле из $q \neq 9$ элементов и a — образующий циклической группы $\mathbb{F}_q^*$. Доказать, что $\mathbf{SL}_2(\mathbb{F}_q)$ порождается двумя матрицами

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ a & 1 \end{pmatrix}.$$

61.6. а) Доказать, что $\mathbf{A}_5$ порождается двумя подстановками, $(2\,5\,4)$ и $(1\,2\,3\,4\,5)$.

б) Доказать, что $\mathbf{A}_n$ при чётном $n \geqslant 4$ порождается двумя элементами: $a = (12)(n-1, n)$, $b = (1, 2, \ldots, n-1)$.

в) Доказать, что $\mathbf{A}_n$ при нечётном $n \geqslant 5$ порождается двумя элементами: $a = (1, n)(2, n-1)$, $b = (1, 2, \ldots, n-2)$.

61.7. Найти все двухэлементные множества, порождающие группы:

а) $\mathbf{Z}_6$; б) $\mathbf{S}_3$; в) $\mathbf{Q}_8$; г) $\mathbf{D}_4$; д) $\langle a\rangle_2 \oplus \langle b\rangle_2$.

61.8. Доказать, что если d — минимальное число порождающих конечной абелевой группы A, то для группы $A \oplus A$ аналогичное число равно $2d$.

61.9. Доказать, что группа $\mathbf{S}_2 \times \mathbf{S}_3$ порождается двумя элементами.

61.10. Доказать, что если группа имеет конечную систему порождающих, то из любой системы порождающих можно выбрать конечную подсистему, порождающую всю группу.

61.11. Будет ли конечно порождённым нормальное замыкание матрицы $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ в группе G, порождённой матрицами A и $B = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$?

61.12. Доказать, что:

а) каждое слово в свободной группе эквивалентно единственному несократимому слову;

б) “свободная группа” действительно является группой.

61.13. Пусть F — свободная группа со свободными порождающими $x_1, \ldots, x_n$, G — произвольная группа. Доказать, что для любых элементов $g_1, \ldots, g_n \in G$ существует единственный гомоморфизм $\varphi : F \to G$ такой, что $\varphi(x_1) = g_1, \ldots, \varphi(x_n) = g_n$. Вывести отсюда, что любая конечно порожденная группа изоморфна факторгруппе подходящей свободной группы конечного ранга.

61.14. Доказать, что в свободной группе нет элементов конечного порядка, отличных от единицы.

61.15. Доказать, что два коммутирующих элемента свободной группы лежат в одной циклической подгруппе.

61.16. Доказать, что слово w лежит в коммутанте свободной группы с системой свободный порождающих $x_1, \ldots, x_n$ тогда и только тогда, когда для каждого $i = 1, \ldots, n$ сумма показателей у всех вхождений x_i в w равна 0.

61.17. В свободной группе описать все слова, сопряжённые слову w.

61.18. Доказать, что факторгруппа свободной группы по её коммутанту — свободная абелева группа.

61.19. Доказать, что свободные группы рангов m и n изоморфны тогда и только тогда, когда $m = n$.

61.20. Сколько подгрупп индекса 2 в свободной группе ранга 2?

61.21. а) Доказать, что в свободной группе F ранга k все слова, в которых сумма показателей при каждой переменной делится на n, образуют нормальную подгруппу N.

б) Доказать, что $F/N = \overbrace{\mathbf{Z}_n \oplus \ldots \oplus \mathbf{Z}_n}^{k \text{ раз}}$

61.22. Доказать, что все сюръективные гомоморфизмы свободной группы ранга 2 на группу $\mathbf{Z}_n \oplus \mathbf{Z}_n$ имеют одно и то же ядро.

61.23. Сколько существует гомоморфизмов свободной группы ранга 2 в группу:

а) $\mathbf{Z}_2 \oplus \mathbf{Z}_2$; б) $\mathbf{S}_3$?

61.24. Доказать, что в $\mathbf{SL}_2(\mathbb{Z})$ множество матриц $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, где $a \equiv d \equiv 1 \pmod 4$, $b \equiv c \equiv 0 \pmod 2$, образует группу с двумя порождающими

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

61.25. Доказать, что если группа G с порождающими элементами $x_1, \ldots, x_n$ задана определяющими соотношениями $R_i(x_1, \ldots, x_n) = 1$ $(i \in I)$ и в какой-либо группе H для элементов $h_1, \ldots, h_n \in H$

$$R_i(h_1, \ldots, h_n) = 1,$$

то существует единственный гомоморфизм $\varphi : G \to H$ такой, что $\varphi(x_1) = h_1, \ldots, \varphi(x_n) = h_n$.

61.26. Доказать, что если между элементами a и b группы выполнены соотношения

$$a^5 = b^3 = 1, \qquad b^{-1}ab = a^2,$$

то $a = 1$.

61.27. Показать, что группа, порожденная элементами a, b с соотношениями $a^2 = b^7 = 1$, $a^{-1}ba = b^{-1}$, конечна.

61.28. Доказать, что группа, заданная порождающими элементами x_1, x_2 с соотношениями:

а) $x_1^2 = x_2^3 = (x_1x_2)^2 = 1$;

б) $x_1^2 = x_2^3 = 1, \quad x_1^{-1}x_2x_1 = x_2^2$;

изоморфна $\mathbf{S}_3$.

61.29. Доказать, что группа, заданная порождающими элементами x_1, x_2 и определяющими соотношениями

$$x_1^2 = x_2^n = 1, \qquad x_1^{-1}x_2x_1 = x_2^{-1},$$

изоморфна группе диэдра $\mathbf{D}_n$.

61.30. Доказать, что группа, заданная порождающими элементами x_1, x_2 и определяющими соотношениями

$$x_1^4 = 1, \qquad x_1^2 = x_2^2, \qquad x_2^{-1}x_1x_2 = x_1^3,$$

изоморфна группе кватернионов $\mathbf{Q}_8$.

61.31. Доказать, что группа, заданная порождающими элементами x_1, x_2 и определяющими соотношениями $x_1^2 = x_2^2 = 1$, изоморфна группе матриц

$$\left\{ \begin{pmatrix} \pm 1 & n \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \;\middle|\; n \in \mathbb{Z} \right\}.$$

61.32. Доказать, что группа, заданная порождающими элементами x_1, x_2 и определяющими соотношениями $x_1^2 = x_2^2 = (x_1x_2)^n = 1$, изоморфна группе матриц

$$\left\{ \begin{pmatrix} \pm 1 & k \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \;\middle|\; k \in \mathbf{Z}_n \right\}.$$

61.33. Найти порядок группы, заданной образующими a, b и определяющими соотношениями:

а) $a^3 = b^2 = (ab)^3 = 1$;

б) $a^4 = b^2 = 1, \quad ab^2 = b^3 a, \quad ba^3 = a^2 b.$

61.34. Пусть G — группа, порожденная элементами x_{ij}, $1 \leqslant i < j \leqslant n$, с определяющими соотношениями

$$x_{ij}x_{kl} = x_{kl}x_{ij}, \qquad 1 \leqslant i < j \neq k < l \neq i \leqslant n;$$
$$x_{ij}x_{jl}x_{ij}^{-1}x_{jl}^{-1} = x_{il}, \qquad 1 \leqslant i < j < l \leqslant n.$$

Доказать, что:

а) каждый элемент группы G представляется в виде

$$x_{12}^{m_{12}}x_{13}^{m_{12}}\ldots x_{1n}^{m_{1n}}x_{23}^{m_{23}}\ldots x_{2n}^{m_{2n}}\ldots x_{n-1,n}^{m_{n-1,n}},$$

где $m_{ij} \in \mathbb{Z}$;

б) $G \simeq \mathbf{UT}_n(\mathbb{Z})$.

61.35. Доказать, что если $G/H = \langle gH \rangle$ — бесконечная циклическая группа, то $G = \langle g \rangle H$, $\langle g \rangle \cap H = \{e\}$.

61.36. Описать в терминах порождающих элементов и определяющих соотношений группы, у которых имеется бесконечная циклическая нормальная подгруппа с бесконечной циклической факторгруппой.

61.37. Пусть группа G задана порождающими элементами x_1, x_2 и определяющим соотношением $x_1x_2x_1^{-1} = x_2^2$. Найти наименьшую подгруппу, порождённую в G элементом x_2. Является ли эта подгруппа нормальной?

§ 62. Разрешимые группы

62.1. Найти коммутатор:

а) невырожденных матриц $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ и $\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$;

б) $\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix}$ и $\begin{pmatrix} x & y \\ 0 & z \end{pmatrix}$;

в) двух транспозиций в симметрической группе $\mathbf{S}_n$;

г) $\begin{pmatrix} \beta & 0 \\ 0 & \beta^{-1} \end{pmatrix}$ и $\begin{pmatrix} 1 & \lambda \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

62.2. Доказать следующие свойства коммутанта G' групп:

а) G' — нормальная подгруппа в G;

б) факторгруппа G/G' коммутативна;

в) если N нормальна в G и G/N коммутативна, то $G' \subseteq N$.

62.3. Доказать, что при сюръективном гомоморфизме $\varphi : G' \to H$ выполнено равенство $\varphi(G)' = H'$.

62.4. Установить биективное соответствие между гомоморфизмами группы в коммутативные группы и гомоморфизмами её факторгруппы по коммутанту.

62.5. Доказать, что коммутант группы $\mathbf{GL}_n(K)$ содержится в $\mathbf{SL}_n(K)$.

62.6. Доказать, что коммутант прямого произведения есть прямое произведение коммутантов сомножителей.

62.7. Найти коммутанты и порядки факторгрупп по коммутантам для групп:

а) $\mathbf{S}_3$; б) $\mathbf{A}_4$; в) $\mathbf{S}_4$; г) $\mathbf{Q}_8$.

62.8. Найти коммутанты групп: а) $\mathbf{S}_n$; б) $\mathbf{D}_n$.

62.9. Доказать, что коммутант нормальной подгруппы нормален во всей группе.

62.10. *Рядом коммутантов* (или *производным рядом*) группы G называется ряд подгрупп

$$G = G^0 \supseteq G' \supseteq G'' \supseteq \ldots,$$

где $G^{i+1} = (G^i)'$.

Доказать, что:

а) все члены ряда коммутантов нормальны в G;

б) для всякого гомоморфизма φ группы G на группу H

$$\varphi(G^i) = H^i.$$

62.11. Доказать, что:

а) всякая подгруппа разрешимой группы разрешима;

б) всякая факторгруппа разрешимой группы разрешима;

в) если A и B — разрешимые группы, то группа $A \times B$ разрешима;

г) если $G/A \simeq B$ и A, B — разрешимые группы, то G разрешима.

62.12. Доказать разрешимость групп:

а) $\mathbf{S}_3$; б) $\mathbf{A}_4$; в) $\mathbf{S}_4$; г) $\mathbf{Q}_8$; д) $\mathbf{D}_n$.

62.13. Пусть $\mathbf{UT}_n(K)$ — группа верхних унитреугольных матриц. Доказать, что:

а) $\mathbf{UT}_n^m(K)$ (множество матриц из $\mathbf{UT}_n(K)$ с $m-1$ нулевыми диагоналями выше главной) — подгруппа в $\mathbf{UT}_n(K)$;

б) если $A \in \mathbf{UT}_n^i(K)$, $B \in \mathbf{UT}_n^j(K)$, то $[A, B] \in \mathbf{UT}_n^{(i+j)}(K)$;

в) группа $\mathbf{UT}_n(K)$ разрешима.

62.14. Доказать, что группа невырожденных верхних треугольных матриц разрешима.

62.15. Доказать, что конечная группа G разрешима тогда и только тогда, когда в ней имеется ряд подгрупп

$$G = H_0 \supseteq H_1 \supseteq \ldots \supseteq H_k = \{e\}$$

такой, что H_{i+1} нормальна в H_i и H_i/H_{i+1} — (циклическая) группа простого порядка.

62.16. Доказать, что конечная p-группа разрешима.

62.17. Доказать разрешимость группы порядка pq, где p, q — различные простые числа.

62.18. Доказать разрешимость группы порядка:

а) 20; б) 12;

в) p^2q, где p, q — различные простые числа;

г) 42; д) 100; е) $n < 60$.

62.19. Доказать для трансвекций $t_{ij}(\alpha) = E + \alpha E_{ij}$ формулу

$$[t_{ik}(\alpha), t_{kj}(\beta)] = t_{ij}(\alpha\beta)$$

при различных i, j, k.

62.20. Пусть F — поле и $n \geqslant 3$. Доказать, что:

а) $\mathbf{SL}_n'(F) = \mathbf{GL}_n'(F) = \mathbf{SL}_n(F)$;

б) группы $\mathbf{SL}_n(F)$ и $\mathbf{GL}_n(F)$ не являются разрешимыми.

62.21. Пусть F — поле, содержащее не менее четырех элементов. Доказать, что:

а) $\mathbf{SL}_2'(F) = \mathbf{GL}_2'(F) = \mathbf{SL}_2(F)$;

б) группы $\mathbf{SL}_2(F)$ и $\mathbf{GL}_2(F)$ не являются разрешимыми.

* * *

62.22. Пусть p, q, r — различные простые числа. Доказать, что любая группа порядка pqr разрешима.

62.23. Пусть p, q, r — различные простые числа. Доказать, что неразрешимая группа порядка p^2qr изоморфна $\mathbf{A}_5$.

62.24. Если порядок конечной группы является произведением различных простых чисел, то G — разрешимая группа, обладающая такой циклической нормальной подгруппой N, что G/N — циклическая группа.

62.25. Пусть G — конечная группа, причём $G = G'$, центр G имеет порядок 2 и факторгруппа по центру изоморфна $\mathbf{A}_5$. Доказать, что $G \simeq \mathbf{SL}_2(\mathbf{Z}_5)$.

62.26. Пусть F — поле, V — n-мерное векторное пространство над F и G — группа невырожденных линейных операторов в V, причём, если $g \in G$, то $g = 1 + h$, где $h^n = 0$. Доказать, что:

а) в V существует такой вектор $x \neq 0$, что $gx = x$ для всех $g \in G$;

б) в V существует такой базис $e_1, \ldots, e_n$, что матрицы всех операторов g, $g \in G$ в этом базисе верхнетреугольные;

в) группа G разрешима.

62.27. Пусть p, q — простые числа, причём p делит $q - 1$. Доказать, что:

а) существует целое $r \not\equiv 1 \pmod{q}$ такое, что $r^p \equiv 1 \pmod{q}$;

б) существует (с точностью до изоморфизма) ровно одна некоммутативная группа порядка pq.

62.28. Доказать, что:

а) если в коммутативной группе элементы a, b связаны соотношениями $a^3 = b^5 = (ab)^7 = e$, то $a = b = e$;

б) подгруппа, порожденная в $\mathbf{S}_7$ перестановками $(1\,2\,3)$ и $(1\,4\,5\,6\,7)$, не является разрешимой;

в) группа с порождающими элементами x_1, x_2 и определяющими соотношениями $x_1^3 = x_2^5 = (x_1x_2)^7 = e$ не является разрешимой.

62.29. Разрешима ли свободная группа?

Глава XIV

КОЛЬЦА

§ 63. Кольца и алгебры

63.1. Какие из следующих числовых множеств образуют кольцо относительно обычных операций сложения и умножения:

а) множество $\mathbb{Z}$;

б) множество $n\mathbb{Z}$ $(n > 1)$;

в) множество неотрицательных целых чисел;

г) множество $\mathbb{Q}$;

д) множество рациональных чисел, в несократимой записи которых знаменатели делят фиксированное число $n \in \mathbb{N}$;

е) множество рациональных чисел, в несократимой записи которых знаменатели не делятся на фиксированное простое число p;

ж) множество рациональных чисел, в несократимой записи которых знаменатели являются степенями фиксированного простого числа p;

з) множество вещественных чисел вида $x + y\sqrt{2}$, где $x, y \in \mathbb{Q}$;

и) множество вещественных чисел вида $x + y\sqrt[3]{2}$, где $x, y \in \mathbb{Q}$;

к) множество вещественных чисел вида $x + y\sqrt[3]{2} + z\sqrt[3]{4}$, где $x, y, z \in \mathbb{Q}$;

л) множество комплексных чисел вида $x + yi$, где $x, y \in \mathbb{Z}$;

м) множество комплексных чисел вида $x + yi$, где $x, y \in \mathbb{Q}$;

н) множество всевозможных сумм вида $a_1z_1 + a_2z_2 + \ldots + a_nz_n$, где $a_1, a_2, \ldots, a_n$ — рациональные числа, $z_1, z_2, \ldots, z_n$ — комплексные корни степени n из 1;

о) множество комплексных чисел вида $\dfrac{x + y\sqrt{D}}{2}$, где D — фиксированное целое число, *свободное от квадратов* (не делящееся на

квадрат простого числа), x, y — целые числа одинаковой чётности?

63.2. Какие из указанных множеств матриц образуют кольцо относительно матричного сложения и умножения:

а) множество вещественных симметрических матриц порядка n;

б) множество вещественных ортогональных матриц порядка n;

в) множество верхних треугольных матриц порядка $n \geqslant 2$;

г) множество матриц порядка $n \geqslant 2$, у которых две последние строки нулевые;

д) множество матриц вида $\begin{pmatrix} x & y \\ Dy & x \end{pmatrix}$, где D — фиксированное целое число, $x, y \in \mathbb{Z}$;

е) множество матриц вида $\begin{pmatrix} x & y \\ Dy & x \end{pmatrix}$, где D — фиксированный элемент некоторого кольца K, $x, y \in K$;

ж) множество матриц вида $\dfrac{1}{2}\begin{pmatrix} x & y \\ Dy & x \end{pmatrix}$, где D — фиксированное целое число, свободное от квадратов, x и y — целые числа одинаковой чётности;

з) множество комплексных матриц вида $\begin{pmatrix} z & w \\ -\overline{w} & \overline{z} \end{pmatrix}$;

и) множество вещественных матриц вида

$$\begin{pmatrix} x & -y & -z & -t \\ y & x & -t & z \\ z & t & x & -y \\ t & -z & y & x \end{pmatrix}?$$

63.3. Какие из следующих множеств функций образуют кольцо относительно обычных операций сложения и умножения функций:

а) множество функций вещественного переменного, непрерывных на отрезке $[a, b]$;

б) множество функций, имеющих вторую производную на интервале (a, b);

в) множество целых рациональных функций вещественного переменного;

г) множество рациональных функций вещественного переменного;

д) множество функций вещественного переменного, обращающихся в 0 на некотором подмножестве $D \subseteq \mathbb{R}$;

е) множество тригонометрических многочленов

$$a_0 + \sum_{k=1}^{n} (a_k \cos kx + b_k \sin kx)$$

с вещественными коэффициентами, где n — произвольное натуральное число;

ж) множество тригонометрических многочленов вида

$$a_0 + \sum_{k=1}^{n} \cos kx$$

с вещественными коэффициентами, где n — произвольное натуральное число;

з) множество тригонометрических многочленов вида

$$a_0 + \sum_{k=1}^{n} a_k \sin kx$$

с вещественными коэффициентами, где n — произвольное натуральное число;

и) множество функций, определённых на некотором множестве D и принимающих значение в некотором кольце R;

к) все степенные ряды от одной или нескольких переменных;

л) все лорановские степенные ряды от одной переменной?

63.4. Во множестве многочленов от переменного t с обычным сложением рассматривается операция умножения, заданная правилом

$$(f \circ g)(t) = f(g(t)).$$

Является ли это множество кольцом относительно заданного умножения и обычного сложения?

63.5. Образует ли кольцо множество всех подмножеств некоторого множества относительно симметрической разности и пересечения, рассматриваемых как сложение и умножение соответственно?

63.6. Доказать изоморфизм колец из задач:

а) 63.1, о) и 63.2, ж);

б) 63.2, з) и 63.2, и).

63.7. Какие из колец, указанных в задачах 63.1–63.5, содержат делители нуля?

63.8. Найти обратимые элементы в кольцах с единицей из задач 63.1–63.5.

63.9. Доказать, что одно из колец задач 63.3, д) и 63.3, е) изоморфно, а другое не изоморфно кольцу многочленов $\mathbb{R}[x]$.

63.10. Доказать, что все обратимые элементы кольца с единицей образуют группу относительно умножения.

63.11. Найти все обратимые элементы, все делители нуля и все нильпотентные элементы в кольцах:

а) $\mathbf{Z}_n$;

б) $\mathbf{Z}_{p^n}$, где p — простое число;

в) $K[x]/(fK[x])$, где K — поле;

г) верхних треугольных матриц над полем;

д) $\mathbf{M}_2(\mathbb{R})$;

е) всех функций, определённых на некотором множестве S и принимающих значения в поле K;

ж) всех степенных рядов от одной переменной;

з) $\mathbb{Z}$;

и) $\mathbb{Z}[i]$.

63.12. Доказать, что группа обратимых элементов $\mathbb{Z}[\sqrt{3}]^*$ бесконечна.

63.13. Пусть R — конечное кольцо. Доказать, что:

а) если R не содержит делителей нуля, то оно имеет единицу и все его ненулевые элементы обратимы;

б) если R имеет единицу, то каждый его элемент, имеющий односторонний обратный, обратим;

в) если R имеет единицу, то всякий левый делитель нуля является правым делителем нуля.

63.14. Доказать, что в кольце с единицей и без делителей нуля каждый элемент, имеющий односторонний обратный, является обратимым.

63.15. Пусть R — кольцо с единицей, $x, y \in R$. Доказать, что:

а) если произведения xy и yx обратимы, то элементы x и y также обратимы;

б) если R без делителей нуля и произведение xy обратимо, то x и y обратимы;

в) без дополнительных предположений о кольце R из обратимости произведения xy не следует обратимость элементов x и y;

г) если обратим элемент $1+ab$, то обратим и элемент $1+ba$.

63.16. Пусть R — прямая сумма колец $R_1, \ldots, R_k$.

а) При каких условиях R коммутативно; имеет единицу; не имеет делителей нуля?

б) Найти в R все обратимые элементы; все делители нуля; все нильпотентные элементы.

63.17. Доказать, что:

а) если числа k и l взаимно просты, то $\mathbf{Z}_{kl} = \mathbf{Z}_k \oplus \mathbf{Z}_l$;

б) если $n = p_1^{k_1} \ldots p_s^{k_s}$, где $p_1, \ldots, p_s$ — различные простые числа, то

$$\mathbf{Z}_n = \mathbf{Z}_{p_1^{k_1}} \oplus \ldots \oplus \mathbf{Z}_{p_s^{k_s}};$$

в) если числа k и l взаимно просты, то $\varphi(kl) = \varphi(k)\varphi(l)$, где φ — функция Эйлера.

63.18. Найти все делители нуля в $\mathbb{C} \oplus \mathbb{C}$.

63.19. Доказать, что:

а) делитель нуля в произвольной (ассоциативной) алгебре не является обратимым;

б) в конечномерной алгебре с единицей всякий элемент, не являющийся делителем нуля, обратим;

в) конечномерная алгебра без делителей нуля является *телом* (алгеброй с делением).

63.20. Доказать, что:

а) конечномерная алгебра с единицей и без делителей нуля над полем $\mathbb{C}$ изоморфна $\mathbb{C}$;

б) над полем $\mathbb{C}$ не существует конечномерных алгебр с делением, отличных от $\mathbb{C}$.

63.21. Перечислить с точностью до изоморфизма все коммутативные двумерные алгебры над $\mathbb{C}$:

а) с единицей;

б) не обязательно с единицей.

63.22. Перечислить с точностью до изоморфизма все коммутативные двумерные алгебры над $\mathbb{R}$:

а) с единицей;

б) не обязательно с единицей.

63.23. Пусть $\mathbb{H}$ — тело кватернионов.

а) Является ли $\mathbb{H}$ алгеброй над полем $\mathbb{C}$, если умножение на скаляр $\alpha \in \mathbb{C}$ понимать как левое умножение на $\alpha \in \mathbb{H}$?

б) Доказать, что отображения

$$1 \mapsto \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad i \mapsto \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}, \quad j \mapsto \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad k \mapsto \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix}$$

являются изоморфизмами $\mathbb{H}$ как алгебры над полем $\mathbb{R}$ на некоторую подалгебру в алгебре матриц $\mathbf{M}_2(\mathbb{C})$ над $\mathbb{R}$.

в) Доказать, что отображение $z \mapsto \begin{pmatrix} z & 0 \\ 0 & \overline{z} \end{pmatrix}$ является изоморфным вложением поля $\mathbb{C}$ в алгебру $\mathbb{H}$, реализованную в виде подалгебры алгебры $\mathbf{M}_2(\mathbb{C})$ над $\mathbb{R}$ (см. б)).

г) Решить в $\mathbb{H}$ уравнение $x^2 = -1$.

63.24. *Тензорной алгеброй* $\mathbb{T}(V)$ векторного пространства V над полем K называется (бесконечномерное) векторное пространство

$$\mathbb{T}(V) = \bigoplus_{k=0}^{\infty} \mathbb{T}_k(V),$$

где $\mathbb{T}_0(V) = K$, $\mathbb{T}_k(V) = \underbrace{V \otimes \ldots \otimes V}_{k \text{ раз}}$ при $k > 0$, с умножением

$$f \cdot g = f \otimes g, \quad \text{где} \quad f \in T_k(V), \quad g \in T_m(V).$$

Доказать, что:

а) $\mathbb{T}(V)$ — ассоциативная алгебра с единицей над полем K;

б) в $\mathbb{T}(V)$ нет делителей нуля.

63.25. *Алгеброй Грассмана* $\Lambda(V)$ векторного пространства V над полем K называется векторное пространство

$$\Lambda(V) = \bigoplus_{k=0}^{\infty} \Lambda^k(V),$$

где $\Lambda^0(V) = K$, с умножением

$$f \cdot g = f \wedge g, \quad \text{где} \quad f \in \Lambda^k(V), \quad g \in \Lambda^m(V)$$

для любых $k, m > 0$.

Доказать, что:

а) $\Lambda(V)$ является ассоциативной алгеброй с единицей над полем K;

б) каждый элемент из $I = \bigoplus\limits_{k\geqslant 1} \Lambda^k(V)$ является нильпотентным;

в) каждый элемент из $\Lambda(V)$, не лежащий в I, обратим.

63.26. *Симметрической алгеброй* $S(V)$ векторного пространства V над полем K называется векторное пространство

$$S(V) = \bigoplus_{k=0}^{\infty} S^k(V),$$

где $S^0(V) = k$, с умножением

$$f \cdot g = \mathrm{Sym}(f \otimes g), \quad \text{где} \quad f \in S^k(V), \quad g \in S^m(V)$$

для любых $k, m > 0$.

Доказать, что:

а) $S(V)$ является ассоциативной, коммутативной алгеброй над K;

б) если $x_1, \ldots, x_n$ — базис пространства V, то $S(V)$ изоморфно алгебре многочленов от $x_1, \ldots, x_n$.

63.27. Пусть A и B — алгебры над полем K. *Тензорное произведение* алгебр $C = A \otimes_K B$ определяется как тензорное произведение векторных пространств A и B над K с умножением

$$(a' \otimes b') \cdot (a'' \otimes b'') = a'a'' \otimes b'b''.$$

Доказать изоморфизм алгебр над полем K:

а) $\mathbb{C} \otimes_K \mathbb{C} \simeq \mathbb{C} \oplus \mathbb{C} \quad (K = \mathbb{R})$;

б) $\mathbf{M}_n(K) \otimes_K \mathbf{M}_m(K) \simeq \mathbf{M}_{mn}(K)$;

в) $\mathbf{M}_n(K) \otimes_K A \simeq \mathbf{M}_n(A)$, где A — произвольная ассоциативная алгебра над K;

г) $K[X_1, \ldots, X_n] \otimes_K K[Y_1, \ldots, Y_m] \simeq K[X_1, \ldots, X_n, Y_1, \ldots, Y_m]$;

д) $\mathbb{H} \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C} \simeq \mathbf{M}_2(\mathbb{C})$;

е) $\mathbf{S}(V) \otimes_K \Lambda(V) \simeq \mathbb{T}(V)$ при $\dim V = 2$;

ж) $\mathbb{Q}(\sqrt{p}) \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{Q}(\sqrt{q}) \simeq \mathbb{Q}(\sqrt{p} + \sqrt{q})$, где p и q — различные простые числа.

63.28. Пусть K — поле характеристики нуль, $R = K[x_1, \ldots, x_n]$ — кольцо многочленов и p_i, q_i — линейные операторы на R как векторном пространстве над K, причём для $f \in R$

$$p_i(f) = x_i f, \qquad q_i(f) = \frac{\partial}{\partial x_i} f.$$

Обозначим через $A_n(K)$ подалгебру в алгебре линейных операторов в R, порождённую $p_1, \ldots, p_n, q_1, \ldots, q_n$. Она называется *алгеброй Вейля* или алгеброй дифференциальных операторов.

Доказать, что:

а) $q_j p_i - p_i q_j = \delta_{ij}, \quad p_i p_j = p_j p_i, \quad q_i q_j = q_j q_i$;

б) базис $A_n(K)$ как векторного пространства образуют одночлены

$$p_1^{l_1} \ldots p_n^{l_n} q_1^{t_1} \ldots q_n^{t_n}, \qquad l_i, t_j \geqslant 0.$$

63.29. Пусть $f = f(p_1, \ldots, p_n, q_1, \ldots, q_n)$ — элемент алгебры Вейля $A_n(K)$ (см. задачу 63.28.) Доказать, что

$$p_i f = f p_i + \frac{\partial f}{\partial q_i}, \qquad q_i f = f q_i - \frac{\partial f}{\partial p_i}.$$

63.30. Доказать, что алгебра верхних нильтреугольных матриц порядка n является нильпотентной алгеброй индекса n.

63.31. Доказать, что:

а) в кольце всех функций на отрезке $[0, 1]$ делителями нуля являются функции, принимающие нулевое значение, и только они;

б) в кольце непрерывных функций на отрезке $[0, 1]$ делителями нуля являются ненулевые функции, принимающие нулевое значение на некотором отрезке $[a, b]$, где $0 \leqslant a < b \leqslant 1$.

§ 64. Идеалы, гомоморфизмы, факторкольца

64.1. Найти все идеалы кольца:

а) $\mathbb{Z}$;

б) $K[x]$, где K — поле.

64.2. Доказать, что кольца:

а) $\mathbb{Z}[x]$;

б) $K[x, y]$, где K — поле;

не являются кольцами главных идеалов.

64.3. Доказать, что в кольце матриц над полем всякий двусторонний идеал либо нулевой, либо совпадает со всем кольцом.

64.4. Доказать, что в кольце матриц $\mathbf{M}_n(R)$ с элементами из произвольного кольца R идеалами являются в точности множества матриц, элементы которых принадлежат фиксированному идеалу кольца R.

64.5. Найти все идеалы кольца верхних треугольных матриц порядка 2 с целыми элементами.

64.6. Пусть I и J — множества матриц вида

$$\begin{pmatrix} 0 & g & h \\ 0 & 0 & 2k \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} 0 & l & 2m \\ 0 & 0 & 2n \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

с целыми коэффициентами g, h, $k, \ldots$ Доказать, что I является идеалом в кольце R верхних треугольных матриц над $\mathbb{Z}$, J есть идеал кольца I, но J не является идеалом кольца R.

64.7. Найти все левые идеалы алгебры $\mathbf{M}_2(\mathbf{Z}_2)$.

64.8. Найти все идеалы двумерной алгебры L над полем $\mathbb{R}$ с базисом $(1, e)$, где 1 — единица в L, и:

а) $e^2 = 0$; б) $e^2 = 1$.

64.9. Доказать, что если идеал кольца содержит обратимый элемент, то он совпадает со всем кольцом.

64.10. Образуют ли идеал необратимые элементы колец:

а) $\mathbb{Z}$; б) $\mathbb{C}[x]$; в) $\mathbb{R}[x]$; г) $\mathbf{Z}_n$.

64.11. Доказать, что кольцо целых чисел не содержит минимальных идеалов.

64.12. Найти максимальные идеалы в кольцах:

а) $\mathbb{Z}$; б) $\mathbb{C}[x]$; в) $\mathbb{R}[x]$; г) $\mathbf{Z}_n$.

64.13. Доказать, что множество I_S непрерывных функций, обращающихся в 0 на фиксированном подмножестве $S \subseteq [a, b]$, является идеалом в кольце функций, непрерывных на $[a, b]$.

Верно ли, что всякий идеал этого кольца имеет вид I_S для некоторого $S \subseteq [a, b]$?

64.14. Пусть R — кольцо непрерывных функций на отрезке $[0, 1]$, $I_c = \{f(x) \in R \mid f(c) = 0\}$ $(0 \leqslant c \leqslant 1)$. Доказать, что:

а) I_c — максимальный идеал R;

б) всякий максимальный идеал R совпадает с I_c для некоторого c.

64.15. Доказать, что коммутативное кольцо с единицей (отличной от нуля), не имеющее идеалов, отличных от нуля и всего кольца, является полем. Существенно ли для этого утверждения наличие единицы?

64.16. Доказать, что кольцо с ненулевым умножением и без собственных односторонних идеалов является телом.

64.17. Доказать, что кольцо с единицей и без делителей нуля, в котором всякая убывающая цепочка левых идеалов конечна, является телом.

64.18. Пусть K — коммутативное кольцо без делителей нуля и отображение $\delta\colon\ K \setminus \{0\} \to \mathbb{N}$ удовлетворяет условию: для любых элементов a, $b \in K$, где $b \neq 0$, существуют элементы $q, r \in K$ такие, что $a = bq + r$ и $\delta(r) < \delta(b)$ или $r = 0$.

Доказать, что существует отображение $\delta_1\colon\ K \setminus \{0\} \to \mathbb{N}$, удовлетворяющее как этому условию, так и условию: для любых $a, b \in K$, где $ab \neq 0$, $\delta_1(ab) \geqslant \delta(b)$.

64.19. Доказать, что:

а) кольцо целых гауссовых чисел вида $x + iy$ $(x, y \in \mathbb{Z})$ евклидово;

б) кольцо комплексных чисел вида $x + iy\sqrt{3}$ $(x, y \in \mathbb{Z})$ не является евклидовым;

в) кольцо комплексных чисел вида $\dfrac{x + iy\sqrt{3}}{2}$, где x и y — целые числа одинаковой чётности, евклидово.

64.20. В кольце $\mathbb{Z}[i]$ разделить $a = 40 + i$ на $b = 3 - i$ с остатком относительно функции $\delta(x + iy) = x^2 + y^2$ из задачи 64.18.

64.21. В кольце $\mathbb{Z}[i]$ найти наибольший общий делитель чисел $20 + 9i$ и $11 + 2i$.

64.22. Доказать, что всякую прямоугольную матрицу с элементами из евклидова кольца с помощью элементарных преобразований её строк и столбцов можно привести к виду

$$\begin{pmatrix} e_1 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & e_2 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \multicolumn{7}{c}{\dotfill} \\ 0 & 0 & \dots & e_r & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \multicolumn{7}{c}{\dotfill} \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix},$$

где $e_1|e_2|\dots|e_r$, $e_i \neq 0$ $(i = 1, 2 \dots, r)$.

64.23. Доказать, что в задаче 64.22 для $i = 1, \dots, r$ произведение $e_1 \dots e_i$ совпадает с наибольшим общим делителем всех миноров размера i исходной матрицы.

64.24. Доказать, что любое кольцо, заключённое между кольцом главных идеалов R и его полем частных Q, само является кольцом главных идеалов.

64.25. Доказать, что кольцо многочленов $R[x]$ над коммутативным кольцом R с единицей и без делителей нуля является кольцом главных идеалов тогда и только тогда, когда R — поле.

64.26. Найти все идеалы в алгебре рядов $\mathbb{C}[[x]]$ от одной переменной x.

64.27. Доказать, что алгебра Вейля $A_n(K)$ (см. задачу 63.28) проста, если K — поле нулевой характеристики.

64.28. (*Китайская теорема об остатках.*) Пусть A — коммутативное кольцо с единицей. Доказать, что:

а) если I_1 и I_2 — идеалы в A и $I_1 + I_2 = A$, то для любых элементов $x_1, x_2 \in A$ существует такой элемент $x \in A$, что $x - x_1 \in I_1$, $x - x_2 \in I_2$;

б) если $I_1, \ldots, I_n$ — идеалы в A и $I_i + I_j = A$ для всех $i \neq j$, то для любых элементов $x_1, \ldots, x_n \in A$ существует такой элемент $x \in A$, что $x - x_k \in I_k$ $(k = 1, \ldots, n)$.

64.29. Пусть R и S — кольца с единицей и $\varphi\colon\ R \to S$ — гомоморфизм.

а) Верно ли, что образ единицы кольца R является единицей кольца S?

б) Верно ли утверждение а), если гомоморфизм φ сюръективен?

64.30. Пусть K — поле и $K[x_1, \ldots, x_n]$ — алгебра многочленов. Предположим, что $f_1, \ldots, f_n \in K[x_1, \ldots, x_n]$.

Доказать, что:

а) отображение φ, при котором

$$\varphi(g(x_1, \ldots, x_n)) = g(f_1, \ldots, f_n),$$

является эндоморфизмом K-алгебры $K[x_1, \ldots, x_n]$;

б) если φ — автоморфизм $K[x_1, \ldots, x_n]$, то якобиан

$$J = \det\left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j}\right)$$

не равен нулю;

в) если $h = h(x_2, \ldots, x_n)$, то отображение Ψ, при котором

$$\Psi(g(x_1, \ldots, x_n)) = g(x_1 + h, x_2, \ldots, x_n),$$

является автоморфизмом $K[x_1, \ldots, x_n]$.

64.31. Пусть K — поле и $K[[x_1 \ldots x_n]]$ — алгебра степенных рядов от $x_1, \ldots, x_n$. Предположим, что $f_1, \ldots, f_n \in K[[x_1 \ldots x_n]]$ имеют нулевые свободные члены.

Доказать, что:

а) отображение φ, при котором

$$\varphi(g(x_1, \ldots, x_n)) = g(f_1, \ldots, f_n),$$

является эндоморфизмом $K[[x_1, \ldots, x_n]]$;

б) отображение φ является автоморфизмом тогда и только тогда, когда якобиан

$$J = \det\left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j}\right)$$

имеет ненулевой свободный член.

64.32. Пусть K — поле нулевой характеристики и $h = h(q_1) \in \in A_n(K)$. Доказать, что отображение φ, при котором

$$\varphi(f(p_1, \ldots, p_n, q_1, \ldots, q_n)) = f(p_1 + h, p_2, \ldots, p_n, q_1, \ldots, q_n),$$

является автоморфизмом K-алгебры $A_n(K)$.

64.33. Пусть φ — автоморфизм $\mathbb{C}$-алгебры $\mathbf{M}_n(\mathbb{C})$. Доказать, что:

а) левый аннулятор матрицы $\varphi(E_{nn})$ имеет размерность $n(n-1)$;

б) жорданова форма матрицы $\varphi(E_{nn})$ равна E_{11};

в) существует такая обратимая матрица Y, что

$$Y^{-1}\varphi(E_{nn})Y = E_{nn};$$

г) отображение $A \to Y^{-1}\varphi(A)Y$ является автоморфизмом $\mathbf{M}_n(\mathbb{C})$, переводящим $\mathbf{M}_{n-1}(\mathbb{C})$ в себя;

д) существует такая обратимая матрица X, что $\varphi(A) = XAX^{-1}$ для любой матрицы $A \in \mathbf{M}_n(\mathbb{C})$.

64.34. Пусть K — поле.

а) Доказать, что линейное отображение

$$\varphi\colon\ \mathbf{M}_n(K) \otimes_K \mathbf{M}_m(K) \to \mathbf{M}_{nm}(K),$$

где $1 \leqslant i, j \leqslant n$, $1 \leqslant r, s \leqslant m$ и

$$\varphi(E_{ij} \otimes E_{rs}) = E_{i+n(r-1),j+n(s-1)},$$

является изоморфизмом K-алгебр.

б) Доказать, что линейное отображение

$$\Psi\colon\ \mathbf{M}_n(K) \to \mathbf{M}_n(K) \otimes_K \mathbf{M}_n(K),$$

где

$$\Psi(E_{ij}) = E_{ij} \otimes E_{ij},$$

является гомоморфизмом K-алгебр. Найти $\operatorname{Ker}\Psi$.

64.35. Доказать, что образ коммутативного кольца при гомоморфизме является коммутативным кольцом.

64.36. Доказать, что отображение $\varphi\colon\ f(x) \to f(c)$ $(c \in \mathbb{R})$ является гомоморфизмом кольца вещественных функций, определённых на $\mathbb{R}$, на поле $\mathbb{R}$.

64.37. Найти все гомоморфизмы колец:

а) $\mathbb{Z} \to 2\mathbb{Z}$; б) $2\mathbb{Z} \to 2\mathbb{Z}$; в) $2\mathbb{Z} \to 3\mathbb{Z}$; г) $\mathbb{Z} \to \mathbf{M}_2(\mathbf{Z}_2)$.

64.38. Найти все гомоморфизмы:

а) группы $\mathbb{Z}$ в группу $\mathbb{Q}$;

б) кольца $\mathbb{Z}$ в поле $\mathbb{Q}$.

64.39. Доказать, что любой гомоморфизм поля в кольцо является или нулевым, или изоморфным отображением на некоторое подполе.

64.40. Пусть K — поле и $R = K[x_1, \ldots, x_n]$ — алгебра многочленов от $x_1, \ldots, x_n$ над полем K. Построить биекцию между пространством строк K^n и множеством всех гомоморфизмов K-алгебр $R \to K$.

64.41. Доказать, что:

а) $F[x]/\langle x - \alpha\rangle \simeq F$ (F — поле);

б) $\mathbb{R}[x]/\langle x^2 + 1\rangle \simeq \mathbb{C}$;

в) $\mathbb{R}[x]/\langle x^2 + x + 1\rangle \simeq \mathbb{C}$.

64.42. При каких a и b факторкольца $\mathbf{Z}_2[x]/\langle x^2 + ax + b\rangle$:

а) изоморфны между собой;

б) являются полями?

64.43. Изоморфны ли факторкольца

$$\mathbb{Z}[x]/\langle x^3 + 1\rangle, \qquad \mathbb{Z}[x]/\langle x^3 + 2x^2 + x + 1\rangle?$$

64.44. Изоморфны ли факторкольца

$$\mathbb{Z}[x]/\langle x^2 - 2\rangle, \qquad \mathbb{Z}[x]/\langle x^2 - 3\rangle?$$

64.45. Пусть a и b — различные элементы поля F. Доказать, что $F[x]$-модули

$$F[x]/\langle x-a\rangle, \qquad F[x]/\langle x-b\rangle \simeq F$$

не изоморфны, но соответствующие факторкольца изоморфны.

64.46. Доказать, что если $a \neq b$ и $c \neq d$ — элементы поля F, то факторкольца

$$F[x]/\langle (x-a)(x-b)\rangle F, \qquad F[x]/\langle (x-c)(x-d)\rangle$$

изоморфны.

64.47. Какие из следующих алгебр изоморфны над $\mathbb{C}$:

$$A_1 = \mathbb{C}[x,y]/\langle x-y, xy-1\rangle, \qquad A_2 = \mathbb{C}[x]/\langle (x-1)^2\rangle,$$
$$A_3 = \mathbb{C}\oplus\mathbb{C}, \qquad A_4 = \mathbb{C}[x,y], \qquad A_5 = \mathbb{C}[x]/\langle x^2\rangle?$$

64.48. Изоморфны ли алгебры A и B над полем $\mathbb{C}$:

а) $A = \mathbb{C}[x,y]/\langle x^n - y\rangle, \quad B = \mathbb{C}[x,y]/\langle x - y^m\rangle$;

б) $A = \mathbb{C}[x,y]/\langle x^2 - y^2\rangle, \quad B = \mathbb{C}[x,y]/\langle (x-y)^2\rangle$?

64.49. Изоморфны ли следующие алгебры над полем $\mathbb{R}$:

а) $A = \mathbb{R}[x]/\langle x^2+x+1\rangle, \quad B = \mathbb{R}[x]/\langle 2x^2-3x+3\rangle$;

б) $A = \mathbb{R}[x]/\langle x^2+2x+1\rangle, \quad B = \mathbb{R}[x]/\langle (x^2-3x+2\rangle$?

64.50. Доказать, что элемент f алгебры $K[x]/\langle x^{n+1}\rangle$ (K — поле) обратим тогда и только тогда, когда $f(0) \neq 0$.

64.51. Пусть K — поле и $f \in K[x]$ имеет степень n. Доказать, что размерность K-алгебры $K[x]/fK[x]$ равна n.

64.52. Пусть K — поле. Доказать, что:

а) если многочлены $f, g \in K[x]$ взаимно просты, то

$$K[x]/fgK[x] \simeq K[x]/fK[x] \oplus K[x]/gK[x];$$

б) если $f = p_1^{k_1}\dots p_s^{k_s}$, где $p_1,\dots,p_s$ — взаимно простые неприводимые многочлены, то

$$K[x]/fK[x] \simeq K[x]/p_1^{k_1}K[x] \oplus \dots \oplus K[x]/p_s^{k_s}K[x].$$

64.53. Доказать, что факторкольцо R/I коммутативного кольца с единицей является полем тогда и только тогда, когда I — максимальный идеал в R.

64.54. Доказать, что идеал I коммутативного кольца R простой тогда и только тогда, когда I — ядро гомоморфизма R в некоторое поле.

64.55. Доказать, что:

а) факторкольцо $\mathbb{Z}[i]/\langle 2\rangle$ не является полем;

б) факторкольцо $\mathbb{Z}[i]/\langle 3\rangle$ является полем из девяти элементов;

в) $\mathbb{Z}[i]/\langle n\rangle$ является полем тогда и только тогда, когда n — простое число, не равное сумме двух квадратов целых чисел.

64.56. При каких $a \in \mathbb{F}_7$ факторкольцо $\mathbb{F}_7[x]/\langle x^2 + a\rangle$ является полем?

64.57. Доказать, что при любом целом $n > 1$ факторкольцо $\mathbb{Z}[x]/\langle n\rangle$ изоморфно $\mathbf{Z}_n[x]$.

64.58. Пусть $f(x)$ — неприводимый многочлен степени n из кольца $\mathbf{Z}_p[x]$. Доказать, что факторкольцо $\mathbf{Z}_p[x]/\langle f(x)\rangle$ является конечным полем, и найти число его элементов.

64.59. Доказать, что:

а) всякое кольцо изоморфно подкольцу некоторого кольца с единицей;

б) n-мерная алгебра с единицей над полем F изоморфна подалгебре алгебры с единицей размерности $n+1$;

в) n-мерная алгебра с единицей над полем K изоморфна некоторой подалгебре алгебры $\mathbf{M}_n(K)$;

г) n-мерная алгебра над K изоморфна подалгебре алгебры $\mathbf{M}_{n+1}(K)$.

64.60. Пусть $I_1, \ldots, I_s$ — идеалы в алгебре с единицей A, $I_i + I_j = A$ при $i \neq j$. Доказать, что отображение

$$f\colon\ A\Big/\bigcap_{k=1}^{s} I_k \mapsto A/I_1 \oplus \ldots \oplus A/I_s,$$

задаваемое формулой

$$f\Big(a + \bigcap_{k=1}^{s} I_k\Big) = (a + I_1, \ldots, a + I_s),$$

является изоморфизмом алгебр.

64.61. Установить изоморфизм $\mathbb{Q}[x]/\langle x^2 - 1\rangle \simeq \mathbb{Q} \oplus \mathbb{Q}$.

64.62. Доказать, что

$$\mathbb{Q}[x]/\langle x^2 - 2\rangle \simeq \mathbb{Q}[\sqrt{2}].$$

64.63. Пусть I — максимальный идеал в $\mathbb{Z}[x]$. Доказать, что $\mathbb{Z}[x]/I$ — конечное поле.

64.64. Пусть V — векторное пространство над полем K нулевой характеристики. Доказать, что

$$S(V) \simeq \mathbb{T}(V)/I,$$

где I — идеал в $T(V)$, порождённый всеми элементами

$$x \otimes y - y \otimes x, \quad \text{где} \quad x, y \in V.$$

64.65. Пусть V — векторное пространство над полем K нулевой характеристики. Доказать, что

$$\Lambda(V) \simeq \mathbb{T}(V)/I,$$

где I — идеал в $\mathbb{T}(V)$, порождённый всеми элементами

$$x \otimes y + y \otimes x, \quad \text{где} \quad x, y \in V.$$

64.66. Пусть V — векторное пространство размерности $2n$ с базисом $p_1 \dots p_n, q_1 \dots q_n$ над полем K нулевой характеристики. Доказать, что

$$A_n(K) \simeq T(V)/I,$$

где I — идеал в $T(V)$, порождённый всеми элементами

$$p_i \otimes q_j - q_j \otimes p_i - \delta_{ij}, \quad p_i \otimes p_j - p_j \otimes p_i, \quad q_i \otimes q_j - q_j \otimes q_i.$$

64.67. Пусть $(e_1, \dots, e_n)$ — базис векторного пространства V над полем K характеристики, отличной от 2, и $\Lambda(V)$ — внешняя (или грассманова алгебра) над векторным пространством V.

Доказать, что:

а) $\dim \Lambda(V) = 2^n$;

б) если $x_1, \dots, x_{n+1} \in \Lambda^1(V) \oplus \dots \oplus \Lambda^n(V)$, то $x_1 \dots x_{n+1} = 0$;

в) формула

$$\varphi(e_i) = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} e_j + \omega_i, \qquad i = 1, \dots, n,$$

где $\omega_i \in \Lambda^1(V) \oplus \ldots \oplus \Lambda^n(V)$, задает автоморфизм тогда и только тогда, когда $\det(a_{ij}) \neq 0$.

64.68. Пусть R — кольцо с единицей. *Левым аннулятором* подмножества $M \subseteq R$ называется множество

$$\{x \in R \mid xm = 0 \quad \text{для всякого} \quad m \in M\}.$$

Доказать, что:

а) левый аннулятор любого подмножества является в R левым идеалом;

б) левый аннулятор правого идеала кольца R, порождённого идемпотентом, также порождается (как левый идеал) некоторым идемпотентом.

64.69. Доказать, что сумма левых идеалов, порождённых попарно ортогональными идемпотентами, также порождается идемпотентом.

64.70. Пусть I_k $(k = 1, \ldots, n)$ — множество матриц порядка n над полем K, состоящее из матриц, у которых вне k-го столбца все элементы равны 0.

Доказать, что:

а) I_k — левый идеал $\mathbf{M}_n(K)$;

б) I_k — минимальный подмодуль в $\mathbf{M}_n(K)$, рассматриваемый как левый модуль над собой;

в) $\mathbf{M}_n(K) = I_1 \oplus \ldots \oplus I_n$;

г) модуль $\mathbf{M}_2(K)$ обладает разложением в прямую сумму минимальных подмодулей, отличным от разложения в);

д) между двумя этими разложениями модуля $\mathbf{M}_2(K)$ существует модульный изоморфизм.

64.71. Пусть R — алгебра всех линейных операторов в конечномерном векторном пространстве V и J_L — множество всех операторов из R, образ которых лежит в подпространстве L. Доказать, что J_L является правым идеалом в R.

Обратно, пусть J — левый идеал в R. Доказать, что существует, и притом единственное такое подпространство L в V, что $J = J_L$.

64.72. Пусть R — алгебра всех линейных операторов в конечномерном векторном пространстве V и I_L — множество всех операторов из R, ядро которых содержит подпространство L. Доказать, что I_L является левым идеалом в R.

Обратно, пусть I — левый идеал в R. Доказать, что существует, и притом единственное такое подпространство L в V, что $I = I_L$.

64.73. Доказать, что множества матриц:

а) $I = \left\{ \begin{pmatrix} x & 2x \\ y & 2y \end{pmatrix} \quad (x, y \in K) \right\}, \quad J = \left\{ \begin{pmatrix} x & 0 \\ y & 0 \end{pmatrix} \quad (x, y \in K) \right\};$

б) $I = \left\{ \begin{pmatrix} -x & 3x \\ -y & 3y \end{pmatrix} \quad (x, y \in K) \right\}, \quad J = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & x \\ 0 & y \end{pmatrix} \quad (x, y \in K) \right\};$

являются подмодулями кольца $\mathbf{M}_2(K)$ как левого модуля над собой и $\mathbf{M}_2(K)/I \simeq J$.

64.74. Пусть $R = I_1 \oplus I_2$ — разложение кольца с единицей e в прямую сумму двусторонних идеалов I_1, I_2 и $e = e_1 + e_2$, где $e_1 \in I_1$, $e_2 \in I_2$. Доказать, что e_1 и e_2 — единицы колец I_1 и I_2.

64.75. Доказать, что кольца $\mathbf{Z}_{mn}$ и $\mathbf{Z}_m \oplus \mathbf{Z}_n$ изоморфны тогда и только тогда, когда m и n взаимно просты.

64.76. Кольцо называется *вполне приводимым справа*, если оно является прямой суммой правых идеалов, являющихся простыми модулями над этим кольцом. При каких n кольцо вычетов $\mathbf{Z}_n$ вполне приводимо?

64.77. Доказать, что алгебра всех верхних треугольных матриц порядка $n \geqslant 2$ над полем не является вполне приводимой.

64.78. Доказать, что в коммутативном вполне приводимом кольце с единицей число идемпотентов и число идеалов конечны.

64.79. Доказать, что во всякой вполне приводимой алгебре пересечение всех максимальных идеалов равно нулю.

64.80. Доказать, что всякое коммутативное вполне приводимое кольцо с единицей изоморфно прямой сумме полей.

64.81. Модуль называется *вполне приводимым*, если его можно разложить в прямую сумму минимальных подмодулей. Какие циклические группы вполне приводимы как модули над кольцом $\mathbb{Z}$?

64.82. Кольцо называется *вполне приводимым слева*, если оно вполне приводимо как левый модуль над собой. Доказать, что если кольцо R вполне приводимо слева и I — его левый идеал, то $R = I \oplus J$ для некоторого левого идеала J кольца R.

64.83. Доказать, что всякий левый идеал вполне приводимого слева кольца R:

а) вполне приводим как левый модуль над R;

б) порождается идемпотентом.

64.84. Пусть R — вполне приводимое слева кольцо с единицей.

Доказать, что:

а) если R не содержит идемпотентов, отличных от 0 и 1, то R — тело;

б) если R не содержит делителей нуля, то R — тело.

Верны ли эти утверждения для колец, в которых существование единицы заранее не предположено?

64.85. Доказать, что если $xy = 0$ для любых двух элементов x, y левого идеала I вполне приводимого слева кольца R с единицей, то $I = \{0\}$.

64.86. Доказать, что если I — идеал кольца R с единицей, то факторкольцо R/I тоже имеет единицу.

64.87. Доказать, что факторкольцо коммутативного нётерова кольца также нётерово.

64.88. Доказать, что кольцо вычетов $\mathbf{Z}_{p_1 \ldots p_m}$, где $p_1, \ldots, p_m$ — различные простые числа, является прямой суммой полей.

64.89. Найти все подмодули в векторном пространстве с базисом $(e_1, \ldots, e_n)$ как модули над кольцом всех диагональных матриц, если

$$\mathrm{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \circ (\alpha_1 e_1 + \ldots + \alpha_n e_n) = \lambda_1 \alpha_1 e_1 + \ldots + \lambda_n \alpha_n e_n.$$

64.90. Пусть R — коммутативное кольцо с единицей и без делителей нуля, рассматриваемое как модуль над собой. Доказать, что R изоморфно любому своему ненулевому подмодулю тогда и только тогда, когда R — кольцо главных идеалов.

64.91. Доказать, что правило

$$h(x) \circ f = h(x^r) f,$$

где $h(x)$ — фиксированный многочлен, превращает кольцо многочленов $F[x]$ над полем F в свободный модуль ранга r над $F[x]$.

64.92. Пусть в кольце R нет делителей нуля и M — свободный R-модуль. Доказать, что если $r \in R \setminus 0$ и $m \in M \setminus 0$, то $rm \neq 0$.

64.93. Пусть R — кольцо с единицей, причём все R-модули свободны. Доказать, что R является телом.

* * *

64.94. Пусть K поле нулевой характеристики. Доказать, что алгебра полиномов $K[x_1, \ldots, x_n]$ является простым модулем над алгеброй Вейля $A_n(K)$ (см. задачу 63.28).

64.95. Пусть K — поле нулевой характеристики. Доказать, что каждый ненулевой модуль над алгеброй Вейля $A_n(K)$ имеет бесконечную размерность над K.

64.96. Пусть K — алгебра вещественных функций на отрезке $[-\pi, \pi]$, представимых многочленами от $\cos x$, $\sin x$ с вещественными коэффициентами.

Доказать, что:

а) K является областью;

б) $K \simeq \mathbb{R}[X, Y]/(X^2 + Y^2 - 1)$;

в) поле частных для K изоморфно полю рациональных функций $\mathbb{R}(T)$.

§ 65. Специальные классы алгебр

65.1. Доказать, что кольцо многочленов от одного переменного над коммутативным нётеровым кольцом с единицей является нётеровым.

65.2. Доказать, что алгебра многочленов от конечного числа переменных над полем нётерова.

65.3. *Алгебра $A(\alpha, \beta)$ обобщенных кватернионов* над полем F характеристики, отличной от 2, где $\alpha, \beta \in F^*$, определяется как векторное пространство над F с базисом $(1, i, j, k)$ и таблицей умножения

$$1 \cdot 1 = 1, \qquad 1 \cdot i = i \cdot 1 = i$$
$$1 \cdot j = j \cdot 1 = j, \qquad 1 \cdot k = k \cdot 1 = k,$$
$$i^2 = -\alpha, \qquad j^2 = -\beta, \qquad ij = -ji = k.$$

Доказать, что:

а) $A(\alpha, \beta)$ — (ассоциативная) центральная простая алгебра над полем F;

б) отображение

$$x = x_0 + x_1 i + x_2 j + x_3 k \mapsto x_0 - x_1 i - x_2 j - x_3 k = \overline{x}$$

является *инволюцией* (т.е. для любых $x, y \in A(\alpha, \beta)$ выполняются равенства $\overline{x + y} = \overline{x} + \overline{y}$, $\overline{xy} = \overline{y}\,\overline{x}$, $\overline{\overline{x}} = x$);

в) для любого $x \in A(\alpha, \beta)$

$$x^2 - (\operatorname{tr} x)x + N(x) = 0,$$

где $\operatorname{tr} x = x + \overline{x}$ и $N(x) = x\overline{x}$ — элементы поля F;

г) алгебра $A(\alpha, \beta)$ является телом тогда и только тогда, когда норменное уравнение $N(x) = 0$ имеет в ней только нулевое решение;

д) алгебра $A(\alpha, \beta)$ является либо телом, либо изоморфна алгебре матриц $\mathbf{M}_2(F)$ — в соответствии с существованием или отсутствием в ней делителей нуля;

е) если норменное уравнение имеет в алгебре $A(\alpha, \beta)$ ненулевое решение, то оно имеет решение и во множестве ненулевых чистых кватернионов;

ж) подалгебра $F(a)$, порождённая элементом a алгебры $A(\alpha, \beta)$, является коммутативной алгеброй размерности $\leqslant 2$ над F, и если a не является делителем нуля, то $F(a)$ — поле, изоморфное полю разложения многочлена $x^2 - (\operatorname{tr} a)x + N(a)$;

з) (*теорема Витта*) норма $N(x)$ является квадратичной формой ранга 3 на пространстве чистых кватернионов, и, обратно, каждой квадратичной форме ранга 3 на трехмерном векторном пространстве W над полем F соответствует алгебра обобщённых кватернионов, определяемая как векторное пространство $F \oplus W$ с правилами умножения

$$1 \cdot w = w \cdot 1,$$
$$w_1 \cdot w_2 = -Q(w_1, w_2) \cdot 1 + [w_1, w_2],$$

где Q — билинейная форма на W, ассоциированная с данной квадратичной формой, $[w_1, w_2]$ — векторное произведение элементов пространства W;

и) приведённая конструкция устанавливает биективное соответствие между кватернионными алгебрами над полем F (с точностью до изоморфизма) и классами эквивалентности квадратичных форм ранга 3 на трехмерном векторном пространстве над F. (Формы $Q\colon W \times W \to F$ и $Q'\colon W' \times W' \to F$ называются *эквивалентными*, если существуют изоморфизм $\alpha\colon W \to W'$ и элемент $\lambda \in F^*$ такие, что $Q'(\alpha(x), \alpha(y)) = \lambda Q(x, y)$ для любых $x, y \in W$.)

65.4. Конечномерная алгебра называется *полупростой*, если она не содержит ненулевых нильпотентных идеалов.

Доказать, что:

а) факторалгебра $\mathbb{C}[x]/\langle f(x)\rangle$ полупроста тогда и только тогда, когда многочлен $f(x)$ не имеет кратных корней;

б) алгебра, порождённая полем $\mathbb{C}$ и матрицей A в алгебре $\mathbf{M}_n(\mathbb{C})$, полупроста тогда и только тогда, когда минимальный многочлен матрицы A не имеет кратных корней;

в) конечномерная алгебра над полем полупроста тогда и только тогда, когда она вполне приводима слева;

г) коммутативная полупростая алгебра с единицей изоморфна прямой сумму полей;

д) если все идемпотенты полупростой алгебры лежат в центре, то алгебра является прямой суммой нескольких тел.

65.5. Пусть $H = (h_{ij})$ — симметрическая $(n \times n)$-матрица над полем F. *Алгеброй Клиффорда* называется 2^n-мерное пространство $\mathbb{C}(F, H)$ над F с базисом, составленным из символов

$$e_{i_1 \ldots i_k} \quad (1 \leqslant i_1 < i_2 < \ldots < i_k \leqslant n) \quad \text{и} \quad e_0 = 1,$$

и с умножением, определяемым правилами

$$e_i e_i = h_{ii}, \qquad e_0 e_i = e_i e_0 = e_i, \qquad e_i e_j + e_j e_i = h_{ij},$$
$$e_{i_1 \ldots i_k} = e_{i_1} \ldots e_{i_k} \qquad (1 \leqslant i_1 < \ldots < i_k \leqslant n).$$

Если V — n-мерное векторное пространство с базисом $(e_1, \ldots, e_n)$ и квадратичной формой Q, то алгебра Клиффорда $\mathbb{C}_Q(F)$ квадратичной формы Q определяется как алгебра $\mathbb{C}(F, H)$, где $h_{ij} = Q(e_i, e_j)$.

а) Доказать, что если $H = 0$, то $\mathbb{C}(F, H) \simeq \Lambda(V)$.

б) *Чётной алгеброй Клиффорда* $\mathbb{C}^+(F, H)$ (или $\mathbb{C}_Q^+(F)$) называется подалгебра алгебры Клиффорда, порождённая элементами $e_{i_1} \ldots e_{i_{2m}}$ $(m = 0, 1, \ldots, [n/2])$. Доказать, что чётная алгебра Клиффорда квадратичной формы

$$Q(x_1, x_2, x_3) = h_{11} x_1^2 + h_{12} x_1 x_2 + h_{22} x_2^2,$$

не распадающаяся в F на линейные множители, является квадратичным расширением поля F, изоморфным полю разложения

$$F(\sqrt{h_{12}^2 - 4h_{11}h_{22}})$$

формы Q.

в) Доказать, что при $\operatorname{char} F \neq 2$ чётная алгебра Клиффорда квадратичной формы Q на трехмерном векторном пространстве V изоморфна алгебре обобщённых кватернионов формы $Q^{(2)}$ на трехмерном векторном пространстве $W = \Lambda^2 V$ (см. задачу 65.3).

г) В условиях задачи в) доказать, что квадратичная форма

$$N(x) = x\overline{x}$$

на пространстве чистых кватернионов эквивалентна форме λQ ($\lambda \in F^*$).

65.6. Пусть $A = A_0 \oplus A_1$ — 2-градуированная ассоциативная алгебра над полем K, т.е. $A_i A_j \subset A_{i+j}$ (сложение индексов по модулю 2). Определим в A новую операцию, полагая

$$[x, y] = xy - (-1)^{ij} yx,$$

где $x \in A_i$, $y \in A_j$.

а) Доказать, что для любых однородных элементов $x \in A_i$, $y \in A_j$, $z \in A$ имеем

$$[x, y] = (-1)^{ij}[y, x],$$
$$[x, [y, z]] + [y, [z, x]] + (-1)^{ij+1}[z, [x, y]] = 0.$$

Алгебра с 2-градуировкой, для которой однородные элементы удовлетворяют данным соотношениям, называется *супералгеброй Ли*.

б) Пусть V — n-мерное векторное пространство с базисом $(e_1, \ldots, e_n)$ над полем K характеристики, не равной 2, и $\Lambda(V)$ — внешняя алгебра на V, I — тождественный оператор на V, $L_0 = K \cdot I$ и L_1 — линейная оболочка операторов φ_i и ψ_i, где

$$\varphi_i(w) = w \wedge e_i,$$

$$\psi_i(e_{i_1} \wedge \ldots \wedge e_{i_p}) = \begin{cases} (-1)^{p-k} e_{i_1} \wedge \ldots \wedge \widehat{e}_{i_k} \wedge \ldots \wedge e_{i_p}, & \text{если} \quad i_k = i, \\ 0, \quad \text{если } i_k \neq i \text{ для всех } k = 1, \ldots, p. \end{cases}$$

Доказать, что $L = L_0 \oplus L_1$ является супералгеброй Ли относительно операции, введенной в а).

65.7. Пусть K — расширение поля $\mathbb{Q}$ степени n.

Доказать, что:

а) для любого многочлена $f(x) \in \mathbb{Q}[x]$ степени n найдется матрица A порядка n, для которой $f(A) = 0$;

б) алгебра $\mathbf{M}_n(\mathbb{Q})$ содержит подалгебру, изоморфную K;

в) если L — подалгебра в $\mathbf{M}_n(\mathbb{Q})$, являющаяся полем, то

$$[L : Q] \leqslant n.$$

65.8. Имеет ли делители нуля $\mathbb{C}$-алгебра аналитических функций, определённых в области $U \subseteq \mathbb{C}$?

65.9. Функция комплексного переменного называется *целой*, если она аналитична на всей комплексной плоскости. Доказать, что всякий конечно порождённый идеал алгебры целых функций является главным.

65.10. *Дифференцированием* кольца R называется отображение $D : R \to R$, удовлетворяющее условиям

$$D(x + y) = D(x) + D(y),$$
$$D(xy) = D(x)y + xD(y), \quad x, y \in R.$$

Найти все дифференцирования колец:

а) $\mathbb{Z}$; б) $\mathbb{Z}[x]$; в) $\mathbb{Z}[x_1, x_2, \ldots, x_n]$.

65.11. Множество L с операцией сложения, относительно которой L является коммутативной группой, и операцией умножения $\circ$, связанной со сложением законами дистрибутивности, называется *кольцом Ли*, если для любых $x, y, z \in L$ выполняется равенства

$$x \circ x = 0,$$
$$(x \circ y) \circ z + (y \circ z) \circ x + (z \circ x) \circ y = 0 \quad (\textit{тождество Якоби}).$$

Доказать, что:

а) в кольце Ли выполняется тождество $x \circ y = -y \circ x$;

б) векторы трехмерного пространства образуют кольцо Ли относительно сложения и векторного умножения;

в) всякое кольцо R является кольцом Ли относительно сложения и операции $x \circ y = xy - yx$;

г) множество всех дифференцирований кольца R является кольцом Ли относительно сложения и операции $D_1 \circ D_2 = D_1 D_2 - D_2 D_1$.

65.12. Пусть K — поле и D — дифференцирование K-алгебры матриц $\mathbf{M}_n(K)$. Доказать, что существует такая матрица $A \in \mathbf{M}_n(K)$, что $D(X) = AX - XA$ для всех X.

65.13. Пусть K — поле нулевой характеристики и D — дифференцирование алгебры Вейля $A_n(K)$. Доказать, что существует такой элемент $f \in A_n(K)$, что $D(g) = fg - gf$ для любого $g \in A_n(K)$.

65.14. Доказать, что полугрупповое кольцо $R[S]$ упорядоченной полугруппы S не имеет делителей нуля тогда и только тогда, когда кольцо R не имеет делителей нуля.

65.15. Пусть p — простое число и $\mathbb{Z}_p$ — кольцо целых p-адических чисел, т.е. множество всех формальных рядов $\sum_{i\geqslant 0} a_i p^i$, где $a_i \in \mathbb{Z}$ и $0 \leqslant a_i < p$. При этом

$$\sum_{i\geqslant 0} a_i p^i + \sum_{i\geqslant 0} b_i p^i = \sum_{i\geqslant 0} c_i p^i,$$

$$\Big(\sum_{i\geqslant 0} a_i p^i\Big)\Big(\sum_{i\geqslant 0} b_i p^i\Big) = \sum_{i\geqslant 0} d_i p^i,$$

если для любого $n \geqslant 0$ в $\mathbf{Z}_{p^n}$

$$\sum_{i=0}^{n-1} a_i p^i + \sum_{i=0}^{n-1} b_i p^i = \sum_{i=0}^{n-1} c_i p^i,$$

$$\Big(\sum_{i=0}^{n-1} a_i p^i\Big)\Big(\sum_{i=0}^{n-1} b_i p^i\Big) = \sum_{i=0}^{n-1} d_i p^i.$$

Доказать, что:

а) $\mathbb{Z}_p$ — кольцо без делителей нуля, содержащее $\mathbb{Z}$;

б) элемент $\sum_{i\geqslant 0} a_i p^i$ обратим в $\mathbb{Z}_p$ тогда и только тогда, когда $a_0 = 1, 2, \ldots, p-1$;

в) естественный гомоморфизм групп обратимых элементов $\mathbb{Z}_p^* \to \mathbf{Z}_{p^n}^*$ сюръективен при любом n;

г) каждый идеал в $\mathbb{Z}_p$ главный и имеет вид (p^n), $n \geqslant 0$;

д) найти все простые элементы в $\mathbb{Z}_p$.

65.16. а) Доказать, что поле p-адических чисел $\mathbb{Q}_p$, т.е. поле частных $\mathbb{Z}_p$, состоит из элементов вида $p^m h$, где $m \in \mathbb{Z}$, $h \in \mathbb{Z}_p$.

б) Показать, что $\mathbb{Q}$ содержится в $\mathbb{Q}_p$ в качестве подполя.

в) Доказать, что элемент $p^m\Big(\sum_{i\geqslant 0} a_i p^i\Big)$ из $\mathbb{Q}_p$, где $0 \leqslant a_i \leqslant p-1$, лежит в $\mathbb{Q}$ тогда и только тогда, когда, начиная с некоторого N, элементы a_i, $i \geqslant N$, образуют периодическую последовательность.

г) Найти в $\mathbb{Q}_5$ образы элементов $2/7$ и $1/3$.

65.17. Пусть K — поле, p — неприводимый многочлен от одной переменной X с коэффициентами в K. Построить по аналогии с задачей 65.15 кольцо $K[X]_p$ и его поле частных $K(X)_p$. Показать, что если p имеет степень 1, то $K[X]_p \simeq K[[X]]$.

65.18. Найти все подкольца поля рациональных чисел $\mathbb{Q}$, содержащие единицу.

§ 66. Поля

66.1. Какие из колец в задачах 63.1–63.3 являются полями?

66.2. Какие из следующих множеств матриц образуют поле относительно обычных матричных операций:

а) $\left\{\begin{pmatrix} x & y \\ ny & x \end{pmatrix}; \quad x, y \in \mathbb{Q}\right\}$, где n — фиксированное целое число;

б) $\left\{\begin{pmatrix} x & y \\ ny & x \end{pmatrix}; \quad x, y \in \mathbb{R}\right\}$, где n — фиксированное целое число;

в) $\left\{\begin{pmatrix} x & y \\ ny & x \end{pmatrix}; \quad x, y \in \mathbf{Z}_p\right\}$, где $p = 2, 3, 5, 7$?

66.3. Пусть K — поле и F — поле дробей алгебры формальных степенных рядов $K[[x]]$. Доказать, что каждый элемент из F представляется в виде $x^{-s}h$, где $s \geqslant 0$ и $h \in K[[x]]$.

66.4. Доказать, что порядок единицы поля в его аддитивной группе либо бесконечен, либо является простым числом.

66.5. Для каких чисел $n = 2, 3, 4, 5, 6, 7$ существует поле из n элементов?

66.6. Доказать, что поле из p^2 элементов, где p — простое число, имеет единственное собственное подполе.

66.7. Доказать, что поля $\mathbb{Q}$ и $\mathbb{R}$ не имеют автоморфизмов, отличных от тождественного.

66.8. Найти все автоморфизмы поля $\mathbb{C}$, при которых каждое вещественное число переходит в себя.

66.9. Имеет ли поле $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$ автоморфизмы, отличные от тождественного?

66.10. Доказать, что в поле F характеристики p:

а) справедливо тождество

$$(x+y)^{p^m} = x^{p^m} + y^{p^m} \quad (m \text{ — натуральное число});$$

б) если F конечно, то отображение $x \mapsto x^p$ является автоморфизмом.

66.11. Доказать, что если комплексное число z не является вещественным, то кольцо $\mathbb{R}[z]$ совпадает с полем $\mathbb{C}$.

66.12. При каких $m, n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ поля $\mathbb{Q}(\sqrt{m})$ и $\mathbb{Q}(\sqrt{n})$ изоморфны?

66.13. Доказать, что для любого автоморфизма φ поля K множество элементов, неподвижных относительно φ, является подполем.

66.14. Доказать, что любые два поля из четырёх элементов изоморфны.

66.15. Существует ли поле, строго содержащее поле комплексных чисел?

66.16. Доказать, что любое конечное поле имеет положительную характеристику.

66.17. Существует ли бесконечное поле положительной характеристики?

66.18. Решить в поле $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$ уравнения:
а) $x^2 + (4 - 2\sqrt{2})x + 3 - 2\sqrt{2} = 0$;
б) $x^2 - x - 3 = 0$;
в) $x^2 + x - 7 + 6\sqrt{2} = 0$;
г) $x^2 - 2x + 1 - \sqrt{2} = 0$.

66.19. Решить систему уравнений

$$x + 2z = 1, \qquad y + 2z = 2, \qquad 2x + z = 1:$$

а) в поле $\mathbf{Z}_3$; б) в поле $\mathbf{Z}_5$.

66.20. Решить систему уравнений

$$3x + y + 2z = 1, \qquad x + 2y + 3z = 1, \qquad 4x + 3y + 2z = 1$$

в поле вычетов по модулю 5 и по модулю 7.

66.21. Найти такой многочлен $f(x)$ степени не выше 3 с коэффициентами из $\mathbf{Z}_5$, что

$$f(0) = 3, \qquad f(1) = 3, \qquad f(2) = 5, \qquad f(4) = 4.$$

66.22. Найти все многочлены $f(x)$ с коэффициентами из $\mathbf{Z}_5$, что

$$f(0) = f(1) = f(4) = 1, \qquad f(2) = f(3) = 3.$$

66.23. Какие из уравнений:

а) $x^2 = 5$, б) $x^7 = 7$, в) $x^3 = a$,

имеют решения в поле $\mathbf{Z}_{11}$?

66.24. В поле вычетов по модулю 11 решить уравнения:

а) $x^2 + 3x + 7 = 0$;

б) $x^2 + 5x + 1 = 0$;

в) $x^2 + 2x + 3 = 0$;

г) $x^2 + 3x + 5 = 0$.

66.25. Доказать, что в поле из n элементов выполняется тождество $x^n = x$.

66.26. В поле $\mathbf{Z}_p$ решить уравнение $x^p = a$.

66.27. Доказать, что если $x^n = x$ для всех элементов x поля K, то K конечно, и его характеристика делит n.

66.28. Найти все порождающие элементы в мультипликативной группе поля:

а) $\mathbf{Z}_7$; б) $\mathbf{Z}_{11}$; в) $\mathbf{Z}_{17}$.

66.29. Пусть a, b элементы поля порядка 2^n, где n нечётно. Доказать, что если $a^2 + ab + b^2 = 0$, то $a = b = 0$.

66.30. Пусть F — поле, причём группа F^* циклическая. Доказать, что F конечно.

66.31. В поле рациональных функций с вещественными коэффициентами решить уравнения:

а) $f^4 = 1$; б) $f^2 - f - x = 0$.

66.32. Доказать, что в поле $\mathbf{Z}_p$ выполняются равенства:

а) $\displaystyle\sum_{k=1}^{p-1} k^{-1} = 0 \quad (p > 2)$; б) $\displaystyle\sum_{k=1}^{(p-1)/2} k^{-2} = 0 \quad (p > 3)$.

66.33. Пусть $n \geqslant 2$ и $\zeta_1, \ldots, \zeta_m$ — все корни n-й степени из 1 в поле K. Доказать, что:

а) $\{\zeta_1, \ldots, \zeta_m\}$ — группа по умножению;

б) $\{\zeta_1, \ldots, \zeta_m\}$ — корни степени m из 1;

в) m делит n;

г) если $k \in \mathbb{Z}$, то

$$\zeta_1^k + \ldots + \zeta_m^k = \begin{cases} 0, & \text{если} \quad m \text{ не делит } k, \\ m, & \text{если} \quad m \text{ делит } k. \end{cases}$$

66.34. Пусть $m_k m_{k-1} \ldots m_0$ и $n_k n_{k-1} \ldots n_0$ — записи натуральных чисел m и n в системе счисления с основанием s, где s — простое число.

Доказать, что:

а) числа $\binom{m}{n}$ и $\binom{m_0}{n_0}\binom{m_1}{n_1}\ldots\binom{m_n}{n_n}$ при делении на s дают одинаковые остатки;

б) $\binom{m}{n}$ делится на s тогда и только тогда, когда при некотором i выполняется неравенство $m_i < n_i$.

66.35. *Нормированием поля* K называется функция $\|x\|$, $x \in K$, принимающая вещественные неотрицательные значения, причём:

$\|x\| = 0$ тогда и только тогда, когда $x = 0$;

$\|xy\| = \|x\|\|y\|$;

$\|x + y\| \leqslant \|x\| + \|y\|$.

Доказать, что следующие функции в $\mathbb{Q}$ являются нормированиями:

а) $\|x\| = \begin{cases} 1, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0; \end{cases}$

б) $\|x\| = |x|^s$, где s — фиксированное число, $0 < s \leqslant 1$;

в) $\|x\| = |x|_p^s$, p — простое число, s — фиксированное положительное число, меньшее 1, причём если $x = p^r m n^{-1}$, где m, n — целые числа, не делящиеся на p, то $|x|_p = p^{-r}$.

* * *

66.36. Пусть $\|x\|$ — нормирование $\mathbb{Q}$, причём существует такое y, что $\|y\| \neq 0, 1$. Тогда $\|x\|$ имеет либо вид б), либо вид в) из задачи 66.35.

66.37. Пусть K — поле и $K(x)$ — поле рациональных функций от одной переменной x. Доказать, что следующие функции в $K(x)$ являются нормированиями:

а) $\|f\| = \begin{cases} 1, & \text{если} \quad f \neq 0, \\ 0, & \text{если} \quad f = 0; \end{cases}$

б) $\|hg^{-1}\| = c^{\deg h - \deg g}$, где $h, g \in K[x]$ и $0 < c < 1$;

в) если $p(x)$ — неприводимый многочлен, $h = p(x)^r u(x) v(x)$, где $u(x)$, $v(x)$ — многочлены, не делящиеся на $p(x)$, то $|h| = c^r$, где $0 < c < 1$.

66.38. Доказать, что:

а) пополнение $\mathbb{Q}$ относительно нормирования из задачи 66.37, б) равно $\mathbb{R}$;

б) пополнение $\mathbb{Q}$ относительно нормирования из задачи 66.37, в) равно $\mathbb{Q}_p$;

в) пополнение $\mathbb{Z}$ относительно нормирования из задачи 66.37, б) равно $\mathbb{Z}_p$;

г) пополнение $\mathbb{C}[x]$ относительно нормирования из задачи 66.37, в) с $p = x$ равно алгебре степенных рядов $\mathbb{C}[[x]]$.

66.39. Последовательность x_n, $n \geqslant 1$, элементов из $\mathbb{Q}_p$ сходится относительно метрики $\|f\|$ из задачи 66.37, в) тогда и только тогда, когда

$$\lim_{n\to\infty} \|x_n - x_{n+1}\|_p = 0.$$

66.40. При каких $t \in \mathbb{Q}_p$ сходятся ряды:

а) $e^t = \sum \dfrac{t^n}{n!}$;

б) $\ln(1+x) = \sum\limits_{n\geqslant 1} \dfrac{1}{n}(-1)^n t^n$;

в) $\sum\limits_{n\geqslant 0} x^n$?

66.41. Пусть $a \in \mathbb{Q}_p$ и $x_n = a^{p^n}$. Существует ли $\lim_{n\to\infty} x_n$?

66.42. Пусть $f(x) \in \mathbb{Z}_p[x]$, $a_0 \in \mathbb{Z}_p$, причём $\|f(a_0)/f'(a_0)^2\|_p < 1$. Положим

$$a_{n+1} = a_n - \frac{f(a_n)}{f'(a_n)}.$$

Доказать, что существует $a = \lim a_n$, причём $f(a) = 0$ и $\|a - a_0\|_p < 1$.

66.43. Доказать, что любой автоморфизм в $\mathbb{Q}_p$ тождествен.

66.44. Пусть $f(x) \in \mathbb{Z}_p[x]$ имеет степень n и старший коэффициент $f(x)$ равен 1. Пусть образ $\overline{f(x)}$ многочлена $f(x)$ в $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}[x]$ разложим, $\overline{f}(x) = g(x)h(x)$, где $g(x)$, $h(x)$ взаимно просты, имеют старший

коэффициент 1, причём

$$\deg g(x) = r, \qquad \deg h(x) = n - r.$$

Тогда $f(x) = u(x)v(x)$, где $\deg u(x) = r$, $\deg h(x) = n - r$, старшие коэффициенты $u(x)$, $v(x)$ равны 1, причём образы $u(x)$, $v(x)$ в $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}[x]$ равны соответственно $g(x)$ и $h(x)$.

66.45. Пусть $f(x) \in \mathbb{Z}_p[x]$ и $a \in \mathbf{Z}_p$, причём в $\mathbf{Z}_p$

$$f(a) = 0, \qquad f'(a) \neq 0.$$

Тогда существует такой элемент $b \in \mathbb{Z}_p$, что $f(b) = 0$ и образ b в $\mathbf{Z}_p$ равен a.

66.46. Пусть m — натуральное число, не делящееся на p, $a \in \in 1 + p\mathbf{Z}_p$. Тогда существует такое $b \in \mathbb{Z}_p$, что $b^m = a$.

66.47. Пусть поля $\mathbb{Q}_p$ и $\mathbb{Q}_{p'}$ изоморфны. Доказать, что $p = p'$.

66.48. Кольцо $\mathbb{Z}_p$ компактно в $\mathbb{Q}_p$ относительно p-адической топологии.

§ 67. Расширения полей. Теория Галуа

В этом параграфе все кольца и алгебры предполагаются коммутативными и обладающими единицей.

67.1. Пусть A — алгебра над полем K и

$$K = K_0 \subset K_1 \subset K_1 \subset \ldots \subset K_s$$

— башня подполей в A.

Доказать, что

$$(A : K) = (A : K_s)(K_s : K_{s-1}) \ldots (K_1 : K_0).$$

67.2. Пусть A — алгебра над полем K и $a \in A$.

Доказать, что:

а) если элемент a не является алгебраическим над K, то подалгебра $K[a]$ изоморфна кольцу многочленов $K[x]$;

б) если a — алгебраический элемент над K, то

$$K[a] \simeq K[x]/\langle \mu_a(x) \rangle,$$

где $\mu_a(x)$ — некоторый однозначно определенный унитарный многочлен (минимальный многочлен элемента a) над K;

в) если A — поле, то для всякого алгебраического над K элемента $a \in A$ многочлен $\mu_a(x)$ неприводим в $K[x]$;

г) если все элементы из A алгебраичны над K и для всякого $a \in A$ многочлен $\mu_a(x)$ неприводим, то A — поле.

67.3. Найти минимальные многочлены для элементов:

а) $\sqrt{2}$ над $\mathbb{Q}$; б) $\sqrt[7]{5}$ над $\mathbb{Q}$; в) $\sqrt[105]{9}$ над $\mathbb{Q}$;

г) $2-3i$ над $\mathbb{R}$; д) $2-3i$ над $\mathbb{C}$; е) $\sqrt{2}+\sqrt{3}$ над $\mathbb{Q}$;

ж) $1+\sqrt{2}$ над $\mathbb{Q}(\sqrt{2}+\sqrt{3})$.

67.4. Доказать, что:

а) если A — конечномерная алгебра над K, то всякий элемент из A алгебраичен над K;

б) если $a_1, \ldots, a_s \in A$ — алгебраические элементы над K, то подалгебра $K[a_1, \ldots, a_s]$ конечномерна над K.

67.5. Доказать, что если A — поле и $a_1, \ldots, a_s \in A$ — алгебраические элементы над K, то расширение $K(a_1, \ldots, a_s)$ совпадает с алгеброй $K[a_1, \ldots, a_s]$.

67.6. Доказать, что множество всех элементов K-алгебры A, алгебраических над K, является подалгеброй в A, а если A — поле, то подполем.

67.7. Доказать, что если в башне полей

$$K = K_0 \subset K_1 \subset K_2 \subset \ldots \subset K_s = L$$

каждый этаж $K_{i-1} \subset K_i$ $(i = 1, \ldots, s)$ является алгебраическим расширением, то L/K — алгебраическое расширение.

67.8. Доказать, что всякий многочлен с коэффициентами из поля K имеет корень в некотором расширении L/K.

* * *

67.9. Пусть K — поле. Доказать, что:

а) для произвольного многочлена из $K[x]$ существует поле разложения этого многочлена над K;

б) для любого конечного множества многочленов из $K[x]$ существует поле разложения над K.

67.10. Пусть K — поле, $g(x) \in K[x]$, $h(x) \in K[x]$, $f(x) = g(h(x))$, и α — корень многочлена $g(x)$ в некотором расширении L/K. Дока-

зать, что многочлен f неприводим над K тогда и только тогда, когда $g(x)$ неприводим над K и $h(x)-\alpha$ неприводим над $K[\alpha]$.

67.11. Пусть K — поле, $a \in K$. Доказать, что:

а) если p — простое число, то многочлен $x^p - a$ либо неприводим, либо имеет корень в K;

б) если многочлен $x^n - 1$ разлагается в $K[x]$ на линейные множители, то многочлен $x^n - a \in K[x]$ либо неприводим, либо для некоторого делителя $d \neq 1$ числа n многочлен $x^d - a$ имеет корень в K;

в) предположение о разложимости $x^n - 1$ на линейные множители существенно для справедливости утверждения б).

67.12. Доказать, что над полем K характеристики $p \neq 0$ многочлен $f(x) = x^p - x - a$ либо неприводим, либо разлагается в произведение линейных множителей, и указать это разложение, если $f(x)$ имеет корень x_0.

67.13. Найти степень поля разложения над $\mathbb{Q}$ для многочленов:

а) $ax + b \quad (a, b \in \mathbb{Q}, \quad a \neq 0)$;

б) $x^2 - 2$; в) $x^3 - 1$; г) $x^3 - 2$; д) $x^4 - 2$;

е) $x^p - 1 \quad$ (p — простое число);

ж) $x^n - 1 \quad (n \in \mathbb{N})$;

з) $x^p - a \quad$ ($a \in \mathbb{Q}$ и не является p-й степенью в $\mathbb{Q}$, p — простое число);

и) $(x^2 - a_1)\ldots(x^2 - a_n) \quad$ ($a_1, \ldots, a_n$ принадлежит $\mathbb{Q}^*$ и все различны).

67.14. Доказать, что конечное расширение L/K является простым тогда и только тогда, когда множество промежуточных полей между K и L конечно, и привести пример конечного расширения, не являющегося простым.

67.15. Пусть L/K — алгебраическое расширение. Доказать, что расширение $L(x)/K(x)$ также алгебраическое и

$$(L(x) : K(x)) = (L : K).$$

67.16. Пусть L/K — расширение. Элементы $a_1, \ldots, a_s \in L$ называются *алгебраически независимыми над* K, если $f(a_1, \ldots, a_s) \neq 0$ для всякого ненулевого многочлена $f(x_1, \ldots, x_s) \in K[x_1, \ldots, x_s]$.

Доказать, что элементы $a_1, \ldots, a_s \in L$ алгебраически независимы над K тогда и только тогда, когда расширение $K(a_1, \ldots, a_s)$ K-изоморфно полю рациональных функций $K(x_1, \ldots, x_s)$.

67.17. Пусть L/K — расширение и $a_1, \ldots, a_s; b_1, \ldots, b_n$ — две максимальные алгебраически независимые над K системы элементов из L. Доказать, что $m = n$ (*степень трансцендентности* L над K).

67.18. Доказать, что:

а) в конечномерной коммутативной K-алгебре A имеется лишь конечное число максимальных идеалов, и их пересечение совпадает с множеством $N(A)$ всех нильпотентных элементов алгебры A (*нильрадикал* алгебры A);

б) $A^{\mathrm{red}} = A/N(A)$ — *редуцированная* алгебра (не содержит отличных от 0 нильпотентных элементов);

в) алгебра $A/N(A)$ изоморфна прямому произведению полей $K_1, \ldots, K_s$, являющихся расширениями поля K;

г) $s \leqslant (A : K)$;

д) набор расширений K_i определён для алгебры A однозначно с точностью до изоморфизма[1];

е) если B — подалгебра в A, то всякая компонента B является расширением в одной или нескольких компонентах A;

ж) если I — идеал в A, то компоненты алгебры A/I содержатся среди компонент алгебры A.

67.19. Пусть K — поле, $f(x) \in K[x]$, $p_1(x)^{k_1} \ldots p_s(x)^{k_s}$ — разложение $f(x)$ в произведение степеней различных неприводимых многочленов над K, $A = K[x]/\langle f(x)\rangle$. Доказать, что

$$A^{\mathrm{red}} = A/N(A) \simeq \prod_{i=1}^{s} k[x]/\langle p_l(x)\rangle.$$

67.20. Пусть A — K-алгебра и L — расширение поля K.

Доказать, что:

а) если $f_1, \ldots f_n$ — различные K-гомоморфизмы $A \to L$, то $f_1, \ldots$ $\ldots, f_n$ линейно независимы как элементы векторного пространства над L всех K-линейных отображений $A \to L$;

б) число различных K-гомоморфизмов $A \to L$ не превосходит $(A : L)$.

Найти все автоморфизмы полей $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$, $\mathbb{Q}(\sqrt{2} + \sqrt{3})$, $\mathbb{Q}(\sqrt[3]{2})$.

67.21. Пусть A — конечномерная K-алгебра и L — расширение поля K. Положим $A_L = L \otimes_K A$. Пусть $(e_1, \ldots, e_n)$ — базис A над K.

[1] Расширения $K_1, \ldots, K_s$ вместе с каноническими гомоморфизмами $A \to K_s$ называются *компонентами алгебры* A

Доказать, что:

а) $(1 \otimes e_1, \ldots, 1 \otimes e_n)$ — базис A_L над L;

б) при естественном вложении A в A_L образ A является K-подалгеброй в A_L.

67.22. Пусть A — конечномерная K-алгебра, L — расширение поля K. Доказать, что:

а) если B — подалгебра в A, то B_L — подалгебра в A_L;

б) если I — идеал алгебры A и I_L — соответствующий идеал в A_L, то $(A/I)_L \simeq A_L/I_L$;

в) если $A = \prod\limits_{i=1}^{s} A_i$, то $A_L \simeq \prod\limits_{i=1}^{s} (A_i)_L$;

г) если $K_1, \ldots, K_s$ — множество компонент алгебры A, то множество компонент алгебр A_L совпадает с объединением множеств компонент алгебр $(K_1)_L, \ldots, (K_s)_L$;

д) если F — расширение поля L, то $(A_L)_F \cong A_F$.

67.23. Пусть A — конечномерная K-алгебра, L — расширение поля K, B — некоторая L-алгебра. Доказать, что:

а) каждый K-гомоморфизм $A \to B$ однозначно продолжается до L-гомоморфизма $A_L \to B_L$;

б) множество K-гомоморфизмов $A \to L$ находится в биективном соответствии со множеством компонент алгебры A_L, изоморфных L;

в) число различных K-гомоморфизмов $A \to L$ не превосходит $(A : K)$ (ср. с задачей 67.20, б)).

67.24. Пусть F и L — расширения поля K и F конечное. Доказать, что существует расширение E/K, для которого имеются вложения F в E и L в E, оставляющие на месте все элементы из K.

67.25. Пусть A — конечномерная K-алгебра и $A = K[a_1, \ldots, a_s]$. Доказать, что следующие свойства расширения L/K равносильны:

а) все компоненты A_L изоморфны L;

б) L — *поле расщепления* для минимального многочлена любого элемента $a \in A$ (расщепляющее поле K-алгебры A).

67.26. Доказать, что если L — расщепляющее поле K-алгебры A и B — подалгебра в A, то любой K-гомоморфизм $B \to L$ продолжается до K-гомоморфизма $A \to L$.

67.27. Расщепляющее поле L для конечномерной K-алгебры A называется *полем разложения* для A, если никакое его собственное

подполе, содержащее K, не является расщепляющим для A.

Доказать, что:

а) если $A = K[a_1, \ldots, a_s]$, то L — поле разложения для A тогда и только тогда, когда L — поле разложения для минимальных многочленов элементов $a_1, \ldots, a_s$;

б) любые два поля разложения K-алгебры A изоморфны над K;

в) для поля разложения K-алгебры A существует K-вложение в любое расщепляющее поле для A.

67.28. Пусть A — конечномерная K-алгебра, L — поле расщепления для A. Доказать, что число компонент L-алгебры A_L одно и то же для всех расщепляющих полей алгебры A (*сепарабельная степень* $(A:K)_s$ алгебры A).

67.29. Пусть A — K-алгебра и L — расширение поля K. Доказать, что:

а) число компонент алгебры A_L не превосходит $(A:K)_s$;

б) число различных K-гомоморфизмов $A \to L$ не превосходит $(A:K)_s$ и равенство имеет место тогда и только тогда, когда L — расщепляющее поля для A.

67.30. Доказать, что следующие свойства конечного расширения L/K равносильны:

а) все компоненты алгебры L_L изоморфны L;

б) L имеет $(L:K)$ K-автоморфизмов;

в) для любых K-вложений $\varphi_i\colon\ L \to L'$ $(i = 1, 2)$ поля L в любое расширение L'/K имеем $\varphi_1(L) = \varphi_2(L)$;

г) всякий неприводимый многочлен из $K[x]$, имеющий корень в L, разлагается над L в произведение линейных множителей;

д) L — поле разложения некоторого многочлена из $K[x]$. (Расширение L/K, удовлетворяющее этим условиям, называется *нормальным*.)

67.31. Пусть $K \subset L \subset F$ — башня конечных расширений поля K.

Доказать, что:

а) если расширение F/K нормальное, то расширение F/L также нормальное;

б) если расширения L/K и F/L нормальные, то расширение F/K не обязательно нормальное;

в) всякое расширение степени 2 нормально.

67.32. Пусть A — конечномерная K-алгебра и $a \in A$. Характеристический многочлен, определитель и след линейного оператора $t \mapsto at$ на A обозначаются соответственно через

$$\chi_{A/K}(a, x), \qquad N_{A/K}(a), \qquad \mathrm{tr}_{A/K}(a)$$

и называются соответственно *характеристическим многочленом*, *нормой* и *следом* элемента a алгебры A над K.

Доказать, что если $K \subset L \subset F$ — башня конечных расширений полей и $a \in F$, то:

а) $\chi_{F/K}(a, x) = N_{L(x)/K(x)}(\chi_{F/L}(a, x))$, где $\chi_{F/L}(a, x)$ рассматривается как элемент поля рациональных функций $K(x)$;

б) $N_{F/K}(a) = N_{L/K}(N_{F/L}(a))$;

в) $\mathrm{tr}_{F/K}(a) = \mathrm{tr}_{L/K}(\mathrm{tr}_{F/L}(a))$.

67.33. Пусть L/K — конечное расширение и $a \in L$.

Доказать, что:

а) минимальный многочлен элемента a равен $\pm\chi_{K(a)/K}(a, x)$;

б) $\chi_{L/K}(a, x)$ является (с точностью до знака) степенью минимального многочлена элемента a.

67.34. Пусть L/K — конечное расширение. Доказать, что K-билинейная форма на L

$$(x, y) \mapsto \mathrm{tr}_{L/K}(xy)$$

либо невырожденная, либо $\mathrm{tr}_{L/K}(x) = 0$ для всех $x \in L$.

67.35. Доказать, что следующие свойства конечномерной K-алгебры A равносильны:

а) для всякого расширения L/K алгебра A_L редуцированная (задача 67.18);

б) $(A : K)_s = (A : K)$ (задача 67.28);

в) для некоторого расширения L/K существует $(A : K)$ гомоморфизмов K-алгебр $A \to L$;

г) билинейная форма $(x, y) \mapsto \mathrm{tr}_{A/K}(xy)$ на A невырождена. (Алгебра A, удовлетворяющая этим условиям, называется *сепарабельной.*)

67.36. Пусть L — расширение поля K. Доказать, что конечномерная K-алгебра A сепарабельна тогда и только тогда, когда сепарабельна L-алгебра A_L.

67.37. Доказать, что всякая подалгебра и всякая факторалгебра сепарабельной K-алгебры являются сепарабельными K-алгебрами.

67.38. Пусть A — сепарабельная K-алгебра, $(A:K) = n$, $\varphi_1, \ldots$ $\ldots, \varphi_n$ — различные K-гомоморфизмы алгебры A в некоторое её расщепляющее поле L. Доказать, что для всякого элемента $a \in A$

$$\mathrm{tr}_{A/K}(a) = \sum_{i=1}^{n} \varphi_i(a), \qquad N_{A/K}(a) = \prod_{i=1}^{n} \varphi_i(a),$$
$$\chi_{A/K}(a, x) = \prod_{i=1}^{n} (\varphi_i(a) - x).$$

67.39. Конечное расширение L/K называется *сепарабельным*, если L — сепарабельная K-алгебра.

а) Доказать, что сепарабельное расширение полей является простым.

б) Являются ли числа

$$a = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}, \qquad b = \sqrt{2} + i$$

примитивными элементами расширения $\mathbb{Q}(\sqrt{2}, i)/\mathbb{Q}$?

67.40. Доказать, что конечномерная K-алгебра сепарабельна тогда и только тогда, когда она является прямым произведением сепарабельных расширений поля K.

67.41. Пусть $K = K_0 \subset K_1 \subset \ldots \subset K_s = L$ — башня конечных расширений полей. Доказать, что расширение L/K сепарабельно тогда и только тогда, когда каждое расширение K_i/K_{i-1} $(i = 1, \ldots, s)$ сепарабельно.

67.42. Пусть K — поле. Многочлен $f(x) \in K[x]$ называется *сепарабельным*, если ни в каком расширении поля K он не имеет кратных корней.

Доказать, что:

а) если K имеет характеристику 0, то всякий неприводимый многочлен из $K[x]$ сепарабелен;

б) если K имеет характеристику $p \neq 0$, то всякий неприводимый многочлен $f(x) \in K[x]$ сепарабелен тогда и только тогда, когда его нельзя представить в виде $g(x^p)$, где $g(x) \in K[x]$.

Привести пример несепарабельного неприводимого многочлена над каким-либо полем.

67.43. Пусть A — конечномерная K-алгебра. Элемент $a \in A$ называется *сепарабельным* над полем K, если $K[a]$ — сепарабельная

K-алгебра. Доказать, что элемент сепарабелен тогда и только тогда, когда сепарабелен его минимальный многочлен.

67.44. Пусть $K \subset L \subset F$ — башня конечных расширений полей.

Доказать, что:

а) если элемент $a \in F$ сепарабелен над K, то a сепарабелен над L;

б) утверждение, обратное к а), верно, если расширение L/K сепарабельно.

67.45. Пусть A — сепарабельная K-алгебра, $f(x) \in K[x]$ — сепарабельный многочлен.

Доказать, что алгебра $B = A[x]/\langle f(x)\rangle$ сепарабельна.

67.46. Пусть $A = K[a_1, \ldots, a_s]$ — конечномерная K-алгебра. Доказать, что следующие условия утверждения равносильны:

а) A — сепарабельная K-алгебра;

б) всякий элемент $a \in A$ сепарабелен;

в) элементы $a_1, \ldots, a_s$ сепарабельны.

67.47. Доказать, что:

а) конечное расширение K/F поля F сепарабельно тогда и только тогда, когда либо K имеет характеристику 0, либо характеристика K равна $p > 0$ и $K^p = K$;

б) всякое конечное расширение конечного поля сепарабельно.

67.48. Конечное расширение полей L/K характеристики $p > 0$ называется *чисто несепарабельным*, если в $L \setminus K$ нет сепарабельных элементов над K. Доказать, что L/K является чисто несепарабельным расширение тогда и только тогда, когда $L^{p^k} \subseteq K$ для некоторого $k \geqslant 1$.

67.49. Пусть $K \subset K_0 \subset K_1 \ldots \subset K_s = L$ — башня конечных расширений полей. Доказать, что расширение L/K чисто несепарабельно тогда и только тогда, когда каждое расширение K_i/K_{i-1} $(i = 1, \ldots, s)$ чисто несепарабельно.

67.50. Доказать, что степень чисто несепарабельного расширения поля характеристики $p > 0$ является степенью числа p, а его сепарабельная степень равна 1.

67.51. Пусть L/K — конечное расширение полей.

Доказать, что:

а) множество K_s всех сепарабельных над K элементов из L является полем, сепарабельным над K;

б) L/K_s — чисто несепарабельное расширение;

в) $(K_s : K) = (L : K)_s$;

г) $(L:K) = (L:K)_s \cdot (L:K)_i$, где $(L:K)_i = (L:K_s)$ несепарабельная степень расширения L/K.

67.52. Пусть $K \subset L \subset F$ — башня конечных расширений полей. Доказать, что:

а) $(F : K)_s = (F : L)_s \cdot (L : K)_s$;

б) $(F : K)_i = (F : L)_i \cdot (L : K)_i$.

67.53. Пусть L/K — конечное расширение полей, $n = (L : K)_s$ и $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$ — множество всех K-вложений поля L в какое-либо расщепляющее поле расширения L/K.

Доказать, что при любом $a \in L$:

а) $\mathrm{tr}_{L/K}(a) = (L : K)_i \sum_{j=1}^{n} \varphi_j(a)$;

б) $N_{L/K}(a) = \Big(\prod_{j=1}^{n} \varphi_j(a) \Big)^{(L:K)_i}$;

в) $\chi_{L/K}(a, x) = \Big(\prod_{j=1}^{n} (\varphi_j(a) - x) \Big)^{(L:K)_i}$.

67.54. Нормальное конечное сепарабельное расширение полей L/K называется *расширением Галуа*, а группа K-автоморфизмов такого расширения называется его *группой Галуа* и обозначается через $G(L/K)$.

Доказать, что:

а) $G(L/K)$ транзитивно действует на множестве корней из поля L минимального многочлена любого элемента поля L;

б) порядок группы $G(L/K)$ равен степени расширения L/K.

67.55. Найти группу Галуа расширения:

а) $\mathbb{C}/\mathbb{R}$; б) $\mathbb{Q}(\sqrt{2})/\mathbb{Q}$;

в) L/K, где $(L : K) = 2$;

г) $\mathbb{Q}(\sqrt{2} + \sqrt{3})/\mathbb{Q}$.

67.56. *Группой Галуа* над полем K сепарабельного многочлена $f(x) \in K[x]$ называется группа Галуа поля разложения этого многочлена над K (как некоторая группа перестановок на множестве

корней $f(x)$). Найти группы Галуа над полем $\mathbb{Q}$ многочленов из задачи 67.13.

67.57. Пусть G — конечная группа автоморфизмов поля L и $K = L^G$ — поле неподвижных элементов. Доказать, что L/K — расширение Галуа и $G(L/K) = G$.

67.58. Доказать, что если элементы $a_1, \ldots, a_n$ алгебраически независимы над полем K, то группа Галуа многочлена

$$x^n + a_1 x^{n-1} + \ldots + a_n$$

над полем рациональных функций $K(a_1, \ldots, a_n)$ есть $\mathbf{S}_n$.

67.59. Доказать, что всякая конечная группа является группой Галуа некоторого расширения полей.

67.60. (*Основная теорема теории Галуа.*) Пусть L/K — расширение Галуа и G — его группа Галуа. Доказать, что сопоставление всякой подгруппе $H \subset G$ подполя L^H неподвижных элементов определяет биективное соответствие между всеми подгруппами группы G и всеми промежуточными подполями расширения L/K, при котором промежуточное подполе F соответствует подгруппе $H = G(L/F)$; при этом расширение F/K нормально тогда и только тогда, когда подгруппа H нормальна в G, и в этом случае каноническое отображение $G \to G(F/K)$ определяет изоморфизм $G(F/K) \simeq G/H$.

67.61. Используя основную теорему теории Галуа и существование вещественного корня у всякого многочлена нечётной степени с вещественными коэффициентами, доказать алгебраическую замкнутость поля комплексных чисел.

67.62. Доказать, что группа Галуа всякого конечного расширения $L/\mathbb{F}_p$ циклическая и порождается автоморфизмом $x \mapsto x^p$ $(x \in L)$.

67.63. Доказать, что группа Галуа над полем K сепарабельного многочлена $f(x) \in K[x]$, рассматриваемая как подгруппа в $\mathbf{S}_n$, содержится в группе чётных перестановок тогда и только тогда, когда дискриминант

$$D = \prod_{i>j} (x_i - x_j)^2$$

многочлена $f(x)$, где $x_1, \ldots, x_n$ — корни $f(x)$ в его поле разложения, является квадратом в поле K.

67.64. Пусть L/K — расширение Галуа с циклической группой Галуа $\langle \varphi \rangle_n$. Доказать, что существует такой элемент $a \in L$, что элементы $a, \varphi(a), \ldots, \varphi^{n-1}(a)$ образуют базис L над K.

67.65. Пусть L/K — сепарабельное расширение степени n и $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$ — различные K-вложения L в некоторое расщепляющее для L поле. Доказать, что элемент $a \in L$ является примитивным элементом в L/K тогда и только тогда, когда образы $\varphi_1(a), \ldots, \varphi_n(a)$ различны.

67.66. Найти группу автоморфизмов K-алгебры, являющейся прямым произведением n полей, изоморфных K.

67.67. Пусть L/K — расширение Галуа с группой Галуа G, $L = \prod L_\sigma$, где L_σ — компонента алгебры L_L, проекция на которую индуцирует на L автоморфизм σ, и e_σ — единица компоненты L_σ. Доказать, что для продолжений автоморфизмов из G до L-автоморфизмов алгебры L_L справедливы равенства

$$\tau(e_\sigma) = e_{\sigma\tau^{-1}}, \qquad \sigma, \tau \in G.$$

67.68. Пусть L — расщепляющее поле для сепарабельной K-алгебры A и $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$ — множество всех K-гомоморфизмов $A \to L$. Доказать, что элементы $y_1, \ldots, y_n \in A$ образуют базис A над K тогда и только тогда, когда $\det(\varphi_i(y_j)) \neq 0$.

67.69. (*Теорема о нормальном базисе.*) Доказать, что в расширении Галуа L/K с группой Галуа G существует такой элемент $a \in L$, что множество $\{\sigma(a) \mid \sigma \in G\}$ является базисом поля L над K.

67.70. Найти поле инвариантов $K(x_1, \ldots, x_n)^{A_n}$ для группы $\mathbf{A}_n$, действующей на поле рациональных функций посредством перестановок переменных.

67.71. Пусть ε — первообразный комплексный корень степени n из 1 и группа $G = \langle\sigma\rangle_n$ действует на поле $\mathbb{C}(x_1, \ldots, x_n)$ по правилу

$$\sigma(x_1) = \varepsilon^i x_i \quad (i = 1, \ldots, n).$$

Найти поле инвариантов $\mathbb{C}(x_1, \ldots, x_n)^G$.

67.72. Найти поле инвариантов для группы G, действующей на поле $\mathbb{C}(x_1, \ldots, x_n)$ посредством циклической перестановки переменных.

67.73. Пусть поле K содержит все корни степени n из 1 и элемент $a \in K$ не является степенью с показателем $d > 1$ ни для какого делителя d числа n. Найти группу Галуа над K многочлена $x^n - a$.

67.74. Пусть поле K содержит все корни степени n из 1 и L/K — расширение Галуа с циклической группой Галуа порядка n. Доказать, что $L = K(\sqrt[n]{a})$ для некоторого элемента $a \in K$.

67.75. Пусть поле K содержит все корни степени n из 1. Доказать, что конечное расширение L/K является расширением Галуа с абелевой группой Галуа периода n тогда и только тогда, когда

$$L = K(\theta_1, \dots, \theta_s),$$

где

$$\theta_i^n = a_i \in K \quad (i = 1, \dots, s)$$

(т.е. L является полем разложения над K многочлена $\prod_{i=1}^{s}(x_i^n - a_i)^s$).

67.76. Пусть поле K содержит все корни степени n из 1 и $L = K(\theta_1, \dots, \theta_s)$, где

$$\theta_i^n = a_i \in K^* \quad (i = 1, \dots, s).$$

Доказать, что

$$G(L/K) \simeq \langle (K^*)^n, a_1, \dots, a_s \rangle / (K^*)^n.$$

67.77. Пусть поле K содержит все корни степени n из 1. Установить биективное соответствие между множеством всех (с точностью до K-изоморфизма) расширений Галуа с абелевой группой Галуа периода n и множеством всех конечных подгрупп группы $K^*/(K^*)^n$.

67.78. Доказать, что всякое расширение Галуа L/K степени p поля K характеристики $p > 0$ имеет вид $L = K(\theta)$, где θ — корень многочлена $x^p - x - a$ $(a \in K)$, и, обратно, всякое такое расширение является расширением Галуа степени 1 или p.

67.79. Пусть K — поле характеристики $p > 0$. Доказать, что конечное расширение L/K является расширением Галуа периода p тогда и только тогда, когда $L = K(\theta_1, \dots, \theta_s)$, где θ_i — корень многочлена $x^p - x - a_i$ $(a_i \in K;\ i = 1, \dots, s)$.

67.80. Пусть K — поле характеристики $p > 0$ и $L = K(\theta_1, \dots, \theta_s)$, где θ_i — корень многочлена $x^p - x - a_i$ $(a_i \in K,\ i = 1, \dots, s)$. Доказать, что

$$G(L/K) \simeq \langle \rho(K), a_1, \dots, a_s \rangle / K,$$

где $\rho : K \to K$ — аддитивный гомоморфизм $x \mapsto x^p - x$.

67.81. Пусть K — поле характеристики $p > 0$. Установить биективное соответствие между множеством всех (с точностью до K-изоморфизма) расширений Галуа L/K с абелевой группой Галуа периода p и множеством всех конечных подгрупп группы $K/\rho(K)$.

§ 68. Конечные поля

68.1. Доказать, что всякое конечное расширение конечного поля является простым.

68.2. Доказать, что:

а) конечное расширение конечного поля нормально;

б) любые два конечных расширения конечного поля F одной степени F-изоморфны.

68.3. Доказать, что:

а) для любого числа q, являющегося степенью простого числа, существует единственное (с точностью до изоморфизма) поле из q элементов;

б) вложение поля $\mathbb{F}_q$ в поле $\mathbb{F}_{q'}$ существует тогда и только тогда, когда q' есть степень q;

в) если K и L — конечные расширения конечного поля F, то F-вложение поля K в L существует тогда и только тогда, когда $(K:L)|(L:F)$;

г) если многочлен $f(x)$ над конечным полем F разлагается в произведение неприводимых множителей степеней $n_1, \ldots, n_s$, то степень поля разложения многочлена $f(x)$ над F равна наименьшему общему кратному чисел $n_1, \ldots, n_s$.

68.4. Пусть F — конечное поле из нечётного числа q элементов. Элемент $a \in F^*$ называется *квадратичным вычетом* в F, если двучлен $x^2 - a$ имеет корень в F.

Доказать, что:

а) число квадратичных вычетов равно $(q-1)/2$;

б) a является квадратичным вычетом тогда и только тогда, когда $a^{(q-1)/2} = 1$, и не является квадратичным вычетом при $a^{(q-1)/2} = -1$.

68.5. Разложить на неприводимые множители:

а) $x^5 + x^3 + x^2 + 1$ в $\mathbb{F}_2[x]$;

б) $x^3 + 2x^2 + 4x + 1$ в $\mathbb{F}_5[x]$;

в) $x^4 + x^3 + x + 2$ в $\mathbb{F}_3[x]$;

г) $x45 + 3x^3 + 2x^2 + x + 4$ в $\mathbb{F}_5[x]$.

* * *

68.6. Для элемента $a \in F^*$ положим $\left(\dfrac{a}{F}\right)$ равным 1, если a — квадратичный вычет в F, и -1 в противном случае.

Доказать, что:

а) отображение $F^* \to \{-1, 1\}$, при котором $a \mapsto \left(\dfrac{a}{F}\right)$, является гомоморфизмом групп;

б) $\left(\dfrac{a}{F}\right) = \operatorname{sgn} \sigma_a$, где $\sigma_a\colon\ x \mapsto ax$ — перестановка на множестве элементов поля F.

68.7. Пусть a и b — взаимно простые числа и $\sigma\colon\ x \to ax$ — перестановка на множестве классов вычетов по модулю b.

Доказать, что:

а) если b чётно, то

$$\operatorname{sgn} \sigma = \begin{cases} 1 & \text{при } b \equiv 2 \pmod 4, \\ (-1)^{(a-1)/2} & \text{при } b \equiv 0 \pmod 4; \end{cases}$$

б) если b нечётно, $b = \prod_{i=1}^{s} p_i$ ($p_1, \ldots, p_s$ — простые числа), то

$$\operatorname{sgn} \sigma = \prod_{i=1}^{s} \left(\frac{n}{p_i}\right),$$

где $\left(\dfrac{a}{p_i}\right) = \left(\dfrac{a}{\mathbf{Z}_{p_i}}\right)$ (*символ Лежандра*) (в этом случае $\operatorname{sgn} \sigma$ обозначается через $\left(\dfrac{a}{b}\right)$ и называется *символом Якоби*);

в) $\left(\dfrac{a}{b_1 b_2}\right) = \left(\dfrac{a}{b_1}\right)\left(\dfrac{a}{b_2}\right)$, $\left(\dfrac{a_1 a_2}{b}\right) = \left(\dfrac{a_1}{b}\right)\left(\dfrac{a_2}{b}\right)$;

г) $\left(\dfrac{-1}{b}\right) = (-1)^{(b-1)/2}$.

68.8. Пусть G — аддитивно записанная конечная абелева группа нечётного порядка, σ — автоморфизм группы G, $\left(\dfrac{\sigma}{G}\right) = \operatorname{sgn} \sigma$, где σ рассматривается как перестановка на множестве G. Доказать, что если G представляется в виде объединения $\{0\} \cup S \cup \{-S\}$ непересекающихся подмножеств, то

$$\left(\frac{\sigma}{G}\right) = (-1)^{|\sigma(S) \cap (-S)|}.$$

68.9. Пусть σ — автоморфизм группы G нечётного порядка, G_1 — подгруппа в G, инвариантная относительно σ, $G_2 = G/G_1$ и

σ_1, σ_2 — автоморфизмы G_1 и G_2, индуцированные σ. Доказать, что

$$\left(\frac{\sigma}{G}\right) = \left(\frac{\sigma_1}{G_1}\right)\left(\frac{\sigma_2}{G_2}\right),$$

и получить отсюда утверждение задачи 68.7, б)).

68.10. (*Лемма Гаусса.*) Доказать, что если N — количество чисел x из промежутка $1 \leqslant x \leqslant (b-1)/2$, для которых $ax \equiv r \pmod{b}$, $-(b-1)/2 \leqslant r \leqslant 1$, то

$$\left(\frac{a}{b}\right) = (-1)^N.$$

68.11. Доказать, что $\left(\frac{2}{b}\right) = (-1)^{(b^2-1)/8}$.

68.12. (*Квадратичный закон взаимности.*) Доказать, что для любых взаимно простых нечётных чисел a и b

$$\left(\frac{a}{b}\right)\left(\frac{b}{a}\right) = (-1)^{(a-1)/2\cdot(b-1)/2}.$$

68.13. Пусть V — конечномерное пространство над конечным полем F нечётного порядка, $\mathcal{A}$ — невырожденный линейный оператор на V. Доказать, что

$$\left(\frac{\mathcal{A}}{V}\right) = \left(\frac{\det\mathcal{A}}{F}\right).$$

68.14. Пусть F — конечное расширение поля $\mathbb{F}_q$ степени n. Доказать, что в F как векторном пространстве над $\mathbb{F}_q$ существует базис вида $x, x^q, \ldots, x^{q^{m-1}}$ для некоторого $x \in F$.

68.15. Доказать, что элементы $x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{F}_{q^n}$ образуют базис над $\mathbb{F}_q$ тогда и только тогда, когда

$$\det\begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \ldots & x_n \\ x_1^q & x_2^q & \ldots & x_n^q \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ x_1^{q^{n-1}} & x_2^{q^{n-1}} & \ldots & x_n^{q^{n-1}} \end{pmatrix} \neq 0.$$

68.16. Пусть $a \in \mathbb{F}_{q^n}$. Элементы $a, a^q, \ldots, a^{q^{n-1}}$ образуют базис $\mathbb{F}_{q^n}$ как векторного пространства над $\mathbb{F}_q$ тогда и только тогда, когда в $\mathbb{F}_{q^n}[x]$ многочлены $x^n - 1$ и

$$ax^{n-1} + a^q x^{n-2} + \ldots + a^{q^{n-2}}x + a^{q^{n-1}}$$

взаимно просты.

Глава XV

ЭЛЕМЕНТЫ ТЕОРИИ ПРЕДСТАВЛЕНИЙ

§ 69. Представления групп. Основные понятия

69.1. Доказать, что отображение $\rho\colon\ \mathbb{Z} \to \mathbf{GL}_2(\mathbb{C})$, при котором

$$\rho(n) = \begin{pmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad n \in \mathbb{Z},$$

является приводимым двумерным комплексным представлением группы $\mathbb{Z}$ и не эквивалентно прямой сумме двух одномерных представлений.

69.2. Доказать, что отображение $\rho\colon\ \langle a\rangle_p \to \mathbf{GL}_2(\mathbb{F}_p)$ (p — простое число), при котором

$$\rho(a^k) = \begin{pmatrix} 1 & k \cdot 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

является приводимым двумерным представлением циклической группы $\langle a\rangle_p$ и не эквивалентно прямой сумме двух одномерных представлений.

69.3. Пусть $A \in \mathbf{GL}_n(\mathbb{C})$. Доказать, что отображение $\rho_A :\ \mathbb{Z} \to \mathbf{GL}_n(\mathbb{C})$, при котором $\rho_A(n) = A^n$, является представлением группы $\mathbb{Z}$ и представления ρ_A и ρ_B эквивалентны тогда и только тогда, когда жордановы нормальные формы матриц A и B совпадают (с точностью до порядка клеток).

69.4. Будет ли линейным представлением группы $\mathbb{R}$ в пространстве $C(\mathbb{R})$ непрерывных функций на вещественной прямой отображение L, определяемое по формулам:

а) $(L(t)f)(x) = f(x - t)$;

б) $(L(t)f)(x) = f(tx)$;

в) $(L(t)f)(x) = f(e^t x)$;

г) $(L(t)f)(x) = e^t f(x)$;

д) $(L(t)f)(x) = f(x) + t$;

е) $(L(t)f)(x) = e^t f(x+t)$?

69.5. Какие из подпространств в $C(\mathbb{R})$ инвариантны относительно линейного представления L из задачи 69.4, а):

а) подпространство бесконечно дифференцируемых функций;

б) подпространство многочленов;

в) подпространство многочленов степени $\leqslant n$;

г) подпространство чётных функций;

д) подпространство нечётных функций;

е) линейная оболочка функций $\sin x$ и $\cos x$;

ж) подпространство многочленов от $\cos x$ и $\sin x$;

з) линейная оболочка функций $\cos x, \cos 2x, \ldots, \cos nx$;

и) линейная оболочка функций $e^{c_1 t}, e^{c_2 t}, \ldots, e^{c_n t}$, где $c_1, c_2, \ldots$ $\ldots, c_n$ — различные фиксированные вещественные числа?

69.6. Найти подпространства пространства многочленов, инвариантные относительно представления L из задачи 69.4а.

69.7. Записать матрицами (в каком-либо базисе) ограничение линейного представления L из задачи 69.5 на подпространство многочленов степени $\leqslant 2$.

69.8. Записать матрицами (в каком-либо базисе) ограничение линейного представления L из задачи 69.5 на линейную оболочку функций $\sin x$ и $\cos x$.

69.9. Доказать, что каждая из следующих формул определяет линейное представление группы $\mathbf{GL}_n(F)$ в пространстве $\mathbf{M}_n(F)$:

а) $\Lambda(A) \cdot X = AX$;

б) $\mathrm{Ad}(A) \cdot X = AXA^{-1}$;

в) $\Phi(A) \cdot X = AX\,{}^tA$.

69.10. Доказать, что линейное представление Λ (см. задачу 69.9, а)) вполне приводимо и его инвариантные подпространства совпадают с левыми идеалами алгебры $\mathbf{M}_n(K)$.

69.11. Доказать, что если $\operatorname{char} F$ не делит n, то линейное представление Ad (см. задачу 69.9, б)) вполне приводимо и его нетривиальные инвариантные подпространства — пространство матриц с нулевым следом и пространство скалярных матриц.

69.12. Доказать, что если $\operatorname{char} F \neq 2$, то линейное представление Φ (см. задачу 69.9, в)) вполне приводимо и его нетривиальные инвариантные подпространства — пространства симметрических и кососимметрических матриц.

69.13. Пусть V — двумерное пространство над полем F. Показать, что существуют представления ρ_1 и ρ_2 группы $\mathbf{S}_3$ на V, для которых в некотором базисе пространства V будут выполнены соотношения

$$\rho_1((1\ 2)) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \rho_1((1\ 2\ 3)) = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix},$$

$$\rho_2((1\ 2)) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \rho_2((1\ 2\ 3)) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Доказать, что эти представления изоморфны тогда и только тогда, когда $\operatorname{char} F \neq 3$.

69.14. Пусть V — двумерное векторное пространство над полем F. Показать, что существуют два представления ρ_1, ρ_2 группы

$$\mathbf{D}_4 = \langle a, b \mid a^4 = b^2 = (ab)^2 = 1 \rangle$$

на V, для которых в некотором базисе пространства V будут выполнены соотношения

$$\rho_1(a) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \rho_1(b) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\rho_2(a) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \rho_2(b) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Будут ли эти представления эквивалентны?

69.15. Пусть ρ_1 и ρ_2 — представления групп $\mathbf{S}_3$ и $\mathbf{D}_4$ из задач 69.13 и 69.14. Будут ли эти представления неприводимы?

69.16. Пусть V — векторное пространство над полем F с базисом $(e_1, \ldots, e_n)$. Зададим отображение $\psi\colon\ \mathbf{S}_n \to \mathbf{GL}(V)$, полагая

$$\psi_\sigma(e_i) = e_{\sigma(i)},$$

где $\sigma \in \mathbf{S}_n$, $i = 1, \ldots, n$.

Доказать, что:

а) ψ — представление группы $\mathbf{S}_n$;

б) подпространство W векторов, сумма координат которых относительно базиса $(e_1, \ldots, e_n)$ равна нулю, и подпространство U векторов с равными координатами инвариантны относительно представления ψ;

в) если $\operatorname{char} F$ не делит n, то ограничение представления ψ на W — неприводимое $(n-1)$-мерное представление группы $\mathbf{S}_n$.

69.17. Пусть $P_{n,m}$ — подпространство однородных многочленов степени m в алгебре $F[x_1, \ldots, x_n]$ и $\operatorname{char} F = 0$. Определим отображение Θ: $\mathbf{GL}_n(F) \to \mathbf{GL}(P_{n,m})$, полагая для $f \in P_{n,m}$ и $A = (a_{ij}) \in \mathbf{GL}_n(F)$:

$$(\Theta_A f)(x_1, \ldots, x_n) = f\left(\sum_{i=1}^{n} x_i a_{i1}, \ldots, \sum_{i=1}^{n} x_i a_{in}\right).$$

Доказать, что Θ — неприводимое представление группы $\mathbf{GL}_n(F)$ на пространстве $P_{n,m}$.

69.18. Пусть задано n-мерное пространство V над полем F нулевой характеристики. Определим отображение $\theta : \mathbf{GL}(V) \to \mathbf{GL}(\Lambda^m V)$, полагая

$$\theta(f)(x_1 \wedge \ldots \wedge x_m) = (f x_1) \wedge \ldots \wedge (f x_m),$$

где $x_1, \ldots, x_m \in V$ и $f \in \mathbf{GL}(V)$. Доказать, что θ — неприводимое представление группы $\mathbf{GL}(V)$.

69.19. Доказать, что:

а) для любого представления ρ группы G существует представление $\rho^{\otimes m}$ группы G на пространстве

$$V^{\otimes m} = \underset{m}{\rightarrow} \underbrace{V \otimes \ldots \otimes V}$$

m раз контравариантных тензоров на пространстве V такое, что

$$\rho^{\otimes m}(g)(v_1 \otimes \ldots \otimes v_m) = (\rho(g)v_1) \otimes \ldots \otimes (\rho(g)v_m)$$

при любых $v_1, \ldots, v_m \in V$, $g \in G$;

б) подпространства симметрических и кососимметрических тензоров являются инвариантными подпространствами для представления $\rho^{\otimes m}$. Найти размерности этих подпространств, если $\dim V = n$.

69.20. Пусть задано представление $\Phi : G \to \mathbf{GL}(V)$ над полем F и гомоморфизм $\xi : G \to F^*$. Рассмотрим отображение $\Phi_\xi : G \to \mathbf{GL}(V)$, заданное по правилу $\Phi_\xi(g) = \xi(g)\Phi(g)$, $g \in G$. Доказать, что Φ_ξ —

представление группы G. Оно неприводимо тогда и только тогда, когда неприводимо представление Φ.

69.21. Пусть Φ — комплексное представление конечной группы G. Доказать, что каждый оператор Φ_g, $g \in G$, диагонализируем.

69.22. Пусть $\rho{:}G \to \mathbf{GL}(V)$ — конечномерное представление группы G над полем F. Доказать, что в V существует базис, в котором для любого $g \in G$ матрица $\rho(g)$ имеет клеточно-верхнетреугольный вид

$$\rho(g) = \begin{pmatrix} \rho_1(g) & & * \\ & \ddots & \\ 0 & & \rho_m(g) \end{pmatrix},$$

где ρ_i — неприводимые представления группы G.

69.23. Пусть $\rho\colon\ G \to \mathbf{GL}(V)$ — конечномерное представление группы G и в V существует базис $(e_1, \ldots, e_n)$, в котором для любого $g \in G$ матрица $\rho(g)$ имеет клеточно-верхнетреугольный вид из задачи 69.22, где размер d_i квадратной матрицы $\rho_i(g)$ не зависит от g. Доказать, что:

а) линейная оболочка V_i векторов $e_{d_1+\ldots+d_{i-1}+1}, \ldots, e_{d_1+\ldots+d_i}$ является G-инвариантным подпространством $(1 \leqslant i \leqslant m)$;

б) отображение $g \mapsto \rho_i(g)$ является матричным представлением группы G;

в) линейное представление группы G, соответствующее этому матричному представлению, изоморфно представлению, возникающему на факторпространстве V_i/V_{i-1} (по определению $V_0 = 0$).

69.24. Пусть $\rho : G \to \mathbf{GL}(V)$ — представление группы G.

Доказать, что:

а) для любого $v \in V$ линейная оболочка $\langle \rho(g)v \mid\ g \in G\rangle$ является инвариантным подпространством для представления ρ;

б) любой вектор из V лежит в некотором инвариантном подпространстве размерности $\leqslant |G|$.

в) минимальное инвариантное подпространство, содержащее вектор $v \in V$, совпадает с $\langle \rho(g)v \mid\ g \in G\rangle$.

69.25. Пусть $\rho\colon\ G \to \mathbf{GL}(V)$ — представление группы G и H — подгруппа в G, $[G : H] = k < \infty$. Доказать, что если подпространство U инвариантно относительно ограничения представления ρ на подгруппу H, то размерность минимального подпространства, со-

держащего U, инвариантного относительно представления ρ, не превосходит $k \cdot \dim U$.

69.26. Пусть V — векторное пространство над полем $\mathbb{C}$ с базисом $(e_1, \ldots, e_n)$. Определим в V представление Φ циклической группы $\langle a \rangle_n$, полагая $\Phi(a)(e_i) = e_{i+1}$ при $i < n$ и $\Phi(a)(e_n) = e_1$. При $n = 2m$ найти размерность минимального инвариантного подпространства, содержащего векторы:

а) $e_1 + e_{m+1}$;

б) $e_1 + e_3 + \ldots + e_{2m-1}$;

в) $e_1 - e_2 + e_3 - \ldots - e_{2m}$;

г) $e_1 + e_2 + \ldots + e_m$.

69.27. Доказать, что у любого множества попарно коммутирующих операторов на конечномерном комплексном векторном пространстве V есть общий собственный вектор.

69.28. Доказать, что всякое неприводимое представление абелевой группы на конечномерном векторном пространстве над полем $\mathbb{C}$ одномерно.

69.29. Пусть $G = \langle a \rangle_p \times \langle b \rangle_p$, где p — простое число и K — поле характеристики p. Предположим, что V — векторное пространство над K с базисом $x_0, x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_n$. Зададим отображение $\rho\colon G \to \mathbf{GL}(V)$, полагая

$\rho(a)x_i = \rho(b)x_i = x_i, \quad 0 \leqslant i \leqslant n,$

$\rho(a)y_i = x_i + y_i, \quad 1 \leqslant i \leqslant n;$

$\rho(b)y_i = y_i + x_{i-1}, \quad 1 \leqslant i \leqslant n.$

Доказать, что ρ продолжается до представления группы G. Проверить, что это представление неразложимо.

69.30. Доказать, что неприводимые комплексные представления группы $\mathbf{U}_{p^\infty}$ взаимно однозначно соответствуют последовательностям (a_n) натуральных чисел таким, что

$$0 \leqslant a_n \leqslant p^n - 1, \qquad a_n \equiv a_{n+1} \pmod{p^n}$$

при всех n.

69.31. Доказать, что неприводимые комплексные представления группы $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ взаимно однозначно соответствуют последовательностям натуральных чисел (a_n) таким, что

$$0 \leqslant a_n \leqslant n - 1, \qquad a_n \equiv a_m \pmod{n},$$

если n делит m.

§ 70. Представления конечных групп

70.1. Пусть $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$ — два перестановочных оператора на конечномерном векторном пространстве V над $\mathbb{C}$ и $\mathcal{A}^m = \mathcal{B}^n = \mathcal{E}$ для некоторых натуральных чисел m и n. Доказать, что пространство V распадается в прямую сумму одномерных инвариантных относительно $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$ подпространств.

70.2. Перечислить все неприводимые комплексные представления групп:

а) $\langle a\rangle_2$; б) $\langle a\rangle_4$; в) $\langle a\rangle_2 \times \langle b\rangle_2$;

г) $\langle a\rangle_6$; д) $\langle a\rangle_8$; е) $\langle a\rangle_4 \times \langle b\rangle_2$;

ж) $\langle a\rangle_2 \times \langle b\rangle_2 \times \langle c\rangle_2$; з) $\langle a\rangle_6 \times \langle b\rangle_3$; и) $\langle a\rangle_9 \times \langle b\rangle_{27}$.

70.3. Пусть V — векторное пространство над полем F, $\mathcal{A} \in \in \mathbf{GL}(V)$ и $\mathcal{A}^n = \mathcal{E}$.

а) Доказать, что соответствие $a^k \mapsto \mathcal{A}^k$ определяет представление циклической группы $\langle a\rangle_n$ на пространстве V.

б) Найти все инвариантные подпространства этого представления в случаях:

$$n = 4, \quad \mathcal{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}; \qquad n = 6, \quad \mathcal{A} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

в) Пусть $F = \mathbb{C}$ и в V имеется такой базис $e_0, e_1, \ldots, e_{n-1}$, что

$$\mathcal{A}(e_i) = \begin{cases} e_{i+1}, & \text{если} \quad i < n-1, \\ e_0, & \text{если} \quad i = n-1. \end{cases}$$

Разложить это представление в прямую сумму неприводимых.

г) Доказать, что представление из в) изоморфно регулярному представлению группы $\langle a\rangle_n$.

70.4. Разложить в прямую сумму одномерных представлений регулярное представление группы:

а) $\langle a\rangle_2 \times \langle b\rangle_2$; б) $\langle a\rangle_2 \times \langle b\rangle_3$; в) $\langle a\rangle_2 \times \langle b\rangle_4$.

70.5. Пусть $H = \langle a\rangle_3$ — циклическая подгруппа группы G, Φ — регулярное представление группы G и Ψ — его ограничение на H. Найти кратность каждого неприводимого представления группы H в разложении представления Ψ в сумму неприводимых:

а) $G = \langle b\rangle_6$, $a = b^2$; б) $G = \mathbf{S}_3$, $a = (1, 2, 3)$.

70.6. Найти все неизоморфные одномерные вещественные представления группы $\langle a\rangle_n$.

70.7. Доказать, что неприводимое вещественное представление циклической группы имеет размерность не более двух.

70.8. Пусть $\rho_k\colon \langle a\rangle_n \to \mathbf{GL}_2(\mathbb{R})$ — представление, для которого

$$\rho_k(a) = \begin{pmatrix} \cos\dfrac{2\pi k}{n} & -\sin\dfrac{2\pi k}{n} \\ \sin\dfrac{2\pi k}{n} & \cos\dfrac{2\pi k}{n} \end{pmatrix}, \qquad 0 < k < n.$$

Доказать, что:

а) представление ρ_k неприводимо, если $k \neq n/2$;

б) представления ρ_k и $\rho_{k'}$ эквивалентны тогда и только тогда, когда $k = k'$ или $k + k' = n$;

в) любое двумерное вещественное неприводимое представление группы $\langle a\rangle_n$ эквивалентно представлению ρ_k для некоторого k.

70.9. Найти число неэквивалентных неприводимых вещественных представлений:

а) группы $\mathbf{Z}_n$;

б) всех абелевых групп порядка 8.

70.10. Найти число неэквивалентных двумерных комплексных представлений групп:

а) $\mathbf{Z}_2$, б) $\mathbf{Z}_4$, в) $\mathbf{Z}_2 \oplus \mathbf{Z}_2$.

70.11. Пусть G — абелева группа порядка n. Доказать, что число неэквивалентных k-мерных комплексных представлений группы G равно коэффициенту при t^k ряда $(1-t)^{-n}$. Найти этот коэффициент.

70.12. Доказать, что ядро одномерного представления группы G содержит коммутант этой группы.

70.13. Пусть ρ — представление группы G в пространстве V и в V существует базис, в котором все операторы $\rho(g)$ $(g \in G)$ диагональны. Доказать, что $\operatorname{Ker}\rho \supseteq G'$.

70.14. Доказать, что все неприводимые комплексные представления конечной группы одномерны тогда и только тогда, когда она коммутативна.

70.15. Найти все неизоморфные одномерные комплексные представления групп $\mathbf{S}_3$ и $\mathbf{A}_4$.

70.16. Найти все одномерные комплексные представления групп $\mathbf{S}_n$ и $\mathbf{D}_n$.

70.17. Построить неприводимое двумерное комплексное представление группы $\mathbf{S}_3$.

70.18. Используя гомоморфизм группы $\mathbf{S}_4$ на группу $\mathbf{S}_3$, построить неприводимое двумерное комплексное представление группы $\mathbf{S}_4$.

70.19. Используя изоморфизм групп перестановок и соответствующих групп движений куба и тетраэдра (см. 57.13), построить:

а) два неприводимых трехмерных матричных комплексных представления группы $\mathbf{S}_4$;

б) неприводимое трехмерное представление группы $\mathbf{A}_4$.

70.20. Доказать, что если ε — корень степени n из 1, то отображение

$$a \mapsto \begin{pmatrix} \varepsilon & 0 \\ 0 & \varepsilon^{-1} \end{pmatrix}, \quad b \mapsto \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

продолжается до представления ρ_ε группы $\mathbf{D}_n$. Является ли оно неприводимым при $\varepsilon \neq \pm 1$?

70.21. Пусть ρ_ε и $\rho_{\varepsilon'}$ — неприводимые двумерные комплексные группы представления $\mathbf{D}_n$ из задачи 70.20. Доказать, что ρ_ε и $\rho_{\varepsilon'}$ изоморфны тогда и только тогда, когда $\varepsilon' = \varepsilon^{\pm 1}$.

70.22. Пусть ρ — неприводимое комплексное представление группы $\mathbf{D}_n$. Доказать, что ρ изоморфно ρ_ε для некоторого ε.

70.23. Пусть ρ — естественное двумерное вещественное представление $\mathbf{D}_n$ в виде преобразований, составляющих правильный n-угольник. Найти такое ε, что ρ изоморфно ρ_ε.

70.24. Используя реализацию кватернионов в виде комплексных матриц порядка 2 (см. задачу 58.11, в)), построить двумерное комплексное представление группы $\mathbf{Q}_8$.

70.25. Пусть группа G имеет точное приводимое двумерное представление.

Доказать, что:

а) коммутант группы G' — абелева группа;

б) если G конечна и основное поле имеет характеристику 0, то G коммутативна.

70.26. Доказать, что точное двумерное комплексное представление конечной некоммутативной группы неприводимо.

70.27. Пусть G — конечная группа, ρ — её конечномерное комплексное представление и в некотором базисе матрицы всех операторов $\rho(g)$ ($g \in G$) верхнетреугольные. Доказать, что $\operatorname{Ker}(\rho) \supseteq G'$.

70.28. Доказать, что если в задачах 69.22, 69.23 основное поле является полем комплексных чисел и группа G конечна, то представление ρ эквивалентно прямой сумме представлений $\rho_1, \ldots, \rho_m$.

70.29. Доказать, что если в задаче 69.22 основное поле является полем комплексных чисел и группа G конечна, то существует такая невырожденная матрица C, что для всех $g \in G$

$$C^{-1}\rho(g)C = \begin{pmatrix} \rho_1(g) & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \rho_m(g) \end{pmatrix}.$$

70.30. Пусть G — конечная группа порядка n, ρ — её регулярное представление. Доказать, что

$$\operatorname{tr}\rho(g) = \begin{cases} 0, & g \neq 1, \\ n, & g = 1. \end{cases}$$

70.31. Доказать, что для любого неединичного элемента конечной группы существует неприводимое комплексное представление, переводящее его в неединичный оператор.

70.32. Пусть $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$ — линейные операторы в конечномерном векторном пространстве V над полем F характеристики 0 и $\mathcal{A}^3 = \mathcal{B}^2 = \mathcal{E}$, $\mathcal{AB} = \mathcal{BA}^2$.

Доказать, что для всякого подпространства U, инвариантного относительно $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$, существует подпространство W, инвариантное относительно $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$ и такое, что $V = U \oplus W$.

70.33. Найти все неэквивалентные двумерные комплексные представления групп:

а) $\mathbf{A}_4$; б) $\mathbf{S}_3$.

70.34. Найти число и размерности неприводимых комплексных представлений групп:

а) $\mathbf{S}_3$; б) $\mathbf{A}_4$; в) $\mathbf{S}_4$; г) $\mathbf{Q}_8$; д) $\mathbf{D}_n$; е) $\mathbf{A}_5$.

70.35. Сколько прямых слагаемых в разложении на неприводимые компоненты регулярного представления следующих групп:

а) $\mathbf{Z}_3$; б) $\mathbf{S}_3$; в) $\mathbf{Q}_8$; г) $\mathbf{A}_4$?

70.36. С помощью теории представлений доказать, что группа порядка 24 не может совпадать со своим коммутантом.

70.37. Могут ли неприводимые комплексные представления конечной группы исчерпываться:

а) тремя одномерными и четырьмя двумерными;

б) двумя одномерными и двумя пятимерными;

в) пятью одномерными и одним пятимерным?

70.38. Доказать, что в группе $\mathbf{GL}_2(\mathbb{C})$ нет подгруппы, изоморфной $\mathbf{S}_4$.

70.39. Доказать существование двумерного инвариантного подпространства в любом восьмимерном комплексном представлении группы $\mathbf{S}_4$.

70.40. Доказать существование одномерного инвариантного подпространства в любом пятимерном представлении группы $\mathbf{A}_4$.

70.41. Доказать, что число неприводимых представлений группы G строго больше числа неприводимых представлений любой её факторгруппы по нетривиальной нормальной подгруппе.

70.42. Для каких конечных групп регулярное представление над полем $\mathbb{C}$ содержит лишь конечное число подпредставлений?

70.43. Доказать, что любое неприводимое представление конечной p-группы над полем характеристики p единично.

70.44. Пусть G — конечная p-группа и ρ — её представление в конечномерном пространстве V над полем характеристики p. Доказать, что в V существует такой базис, что для любого $g \in G$ матрица оператора $\rho(g)$ верхняя унитреугольная.

70.45. Пусть H — нормальная подгруппа в конечной группе G. Доказать, что размерность любого неприводимого представления группы G над полем F не превосходит $[G:H]m$, где m — наибольшая размерность неприводимого представления группы H над полем F.

70.46. Доказать, что в $\mathbf{GL}_n(\mathbb{C})$ существует лишь конечное число попарно несопряжённых подгрупп фиксированного конечного порядка.

70.47. Пусть $\rho : G \to \mathbf{GL}_3(\mathbb{R})$ — неприводимое трехмерное вещественное представление конечной группы G и представление $\widetilde{\rho} : G \to \mathbf{GL}_3(\mathbb{C})$ получается как композиция отображения ρ со стандартным вложением $\mathbf{GL}_3(\mathbb{R}) \to \mathbf{GL}_3(\mathbb{C})$. Доказать, что представле-

ние $\widetilde{\rho}$ неприводимо.

70.48. Доказать, что всякое неприводимое неодномерное комплексное представление группы порядка p^3 является точным.

70.49. Найти число неприводимых комплексных представлений некоммутативной группы порядка p^3 и их размерности.

70.50. Вещественное представление Φ циклической группы $\langle a\rangle$ порядка 4, при котором

$$\Phi(a) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

разложить в прямую сумму неприводимых.

70.51. Рассмотрим вещественное трехмерное представление группы $G = \langle a\rangle_2 \times \langle b\rangle_2$, где

$$\Phi(a) = \begin{pmatrix} 5 & -4 & 0 \\ 6 & -5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad \Phi(b) = -E.$$

Разложить Φ в прямую сумму неприводимых представлений.

70.52. Рассмотрим двумерное комплексное представление Φ группы $G = \langle a\rangle_2 \times \langle b\rangle_2$, где

$$\Phi(a) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \Phi(b) = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Разложить Φ в прямую сумму неприводимых представлений.

§ 71. Групповые алгебры и модули над ними

71.1. Является ли алгебра кватернионов вещественной групповой алгеброй:

а) группы кватернионов;

б) какой-либо группы?

71.2. Пусть V — векторное пространство над полем F с базисом (e_1, e_2, e_3), $\varphi : F[\mathbf{S}_3] \to \operatorname{End} V$ — гомоморфизм, где $\varphi(\sigma)(e_i) = e_{\sigma(i)}$ для всех $\sigma \in \mathbf{S}_3$ $(i = 1, 2, 3)$. Найти размерность ядра и размерность образа гомоморфизма φ.

71.3. Найти базис ядра гомоморфизма $\varphi\colon \mathbb{C}(\langle a\rangle_n) \to \mathbb{C}$, при котором $\varphi(a) = \varepsilon$, где ε — корень степени n из 1.

71.4. Пусть группа H изоморфна факторгруппе группы G. Доказать, что $F[H]$ изоморфна факторалгебре алгебры $F[G]$.

71.5. Пусть $G = G_1 \times G_2$. Доказать, что в

$$F[G] \simeq F[G_1] \otimes F[G_2].$$

71.6. Пусть G — конечная группа, R — множество отображений из G в поле F. Определим на R операции, полагая для $f_1, f_2 \in R$

$$(\alpha f_1 + \beta f_2)(g) = \alpha f_1(g) + \beta f_2(g),$$
$$(f_1 f_2)(g) = \sum_{h\in G} f_1(h) f_2(h^{-1}g).$$

Доказать, что R — алгебра над полем F и отображение

$$f \mapsto \sum_{g\in G} f(g)g$$

из R в $F[G]$ — изоморфизм алгебр.

71.7. Доказать, что если группа G содержит элементы конечного порядка, то групповая алгебра $F[G]$ имеет делители нуля.

71.8. Доказать, что всякий неприводимый $F[G]$-модуль изоморфен фактормодулю регулярного $F[G]$-модуля.

71.9. Найти все коммутативные двусторонние идеалы групповой алгебры $\mathbb{C}[G]$ для:

а) $G = \mathbf{S}_3$; б) $G = \mathbf{Q}_8$; в) $G = \mathbf{D}_5$.

71.10. Найти все элементы x групповой алгебры $F[G]$, удовлетворяющие условию $xg = x$ при любом $g \in G$.

71.11. Найти базис центра групповой алгебры групп:

а) $\mathbf{S}_3$; б) $\mathbf{Q}_8$; в) $\mathbf{A}_4$.

71.12. Доказать, что в групповой алгебре A свободной абелевой группы ранга r нет делителей нуля. Поле частных для A изоморфно полю рациональных дробей от r переменных.

71.13. Пусть A — кольцо, V — A-модуль и $V = U \oplus W$, причём U — неприводимый модуль и в W нет подмодулей, изоморфных U. Доказать, что если α — автоморфизм модуля V, то $\alpha(U) = U$.

71.14. Пусть A — кольцо, A-модуль V разложен в прямую сумму подмодулей $V = U \oplus W$, φ: $U \to W$ — гомоморфизм A-модулей. Доказать, что $U_1 = \{x + \varphi(x) \mid x \in U\}$ есть A-подмодуль в V, изоморфный U, и $V = U_1 \oplus W$.

71.15. Пусть A — полупростая конечномерная алгебра над $\mathbb{C}$ и A-модуль V разлагается в прямую сумму попарно неизоморфных неприводимых A-модулей: $V = V_1 \oplus \ldots \oplus V_k$. Найти группу автоморфизмов модуля V.

71.16. Пусть A — полупростая конечномерная алгебра над $\mathbb{C}$ и A-модуль V есть прямая сумма двух изоморфных неприводимых A-модулей. Доказать, что группа автоморфизмов A-модуля V изоморфна $\mathbf{GL}_2(\mathbb{C})$.

71.17. Пусть A — полупростая конечномерная алгебра над $\mathbb{C}$ и V — A-модуль, конечномерный над $\mathbb{C}$. Доказать, что V имеет конечное число A-подмодулей тогда и только тогда, когда он является прямой суммой попарно неизоморфных неприводимых A-модулей.

71.18. Пусть G — конечная группа, F — поле характеристики 0 и групповая алгебра $A = F[G]$ рассматривается как левый модуль над собой. Доказать, что для любого его подмодуля U и гомоморфизма A-модулей $\varphi : U \to A$ существует такой элемент $a \in A$, что $\varphi(u) = ua$ для всех $u \in U$.

71.19. Для каких конечных групп комплексная групповая алгебра является простой?

71.20. Пусть $A = F[G]$ (F — поле), G — конечная группа порядка $n > 1$, и для $n \cdot 1 \neq 0$ положим

$$e_1 = (n \cdot 1)^{-1} \sum_{g \in G} g, \; e_2 = 1 - e_1.$$

Доказать, что Ae_1 и Ae_2 — собственные двусторонние идеалы и $A = Ae_1 \oplus Ae_2$.

71.21. Доказать, что равенство

$$xy = f(x, y) \cdot 1 + \sum_{g \in G \setminus \{1\}} \alpha_g \cdot g, \qquad \alpha_g \in F$$

в групповой алгебре $F[G]$ задает на пространстве $F[G]$ симметрическую билинейную функцию и ядро этой функции f — двусторонний идеал в $F[G]$.

71.22. Пусть G — конечная группа, f — билинейная функция на $\mathbb{R}[G]$, определенная в задаче 71.21. Доказать, что f невырождена, и

найти сигнатуру функции f для групп:

а) $\mathbf{Z}_2$; б) $\mathbf{Z}_3$; в) $\mathbf{Z}_4$; г) $\mathbf{Z}_2 \oplus \mathbf{Z}_2$.

71.23. Пусть H — подгруппа группы G и $\omega(H)$ — левый идеал в $F[G]$, минимальный среди левых идеалов, содержащих $\{h-1 \mid h \in H\}$. Доказать, что если H — нормальная подгруппа, то идеал $\omega(H)$ двусторонний.

71.24. Разложить в прямую сумму полей групповые алгебры группы $\langle a \rangle_3$ над полями вещественных и комплексных чисел.

71.25. Доказать, что $\mathbb{Q}[\langle a \rangle_p]$ (p — простое число) есть прямая сумма двух двусторонних идеалов, один из которых изоморфен $\mathbb{Q}$, а другой $\mathbb{Q}(\varepsilon)$, где ε — первообразный корень степени p из 1.

71.26. Пусть G — конечная группа, $\operatorname{char} F$ не делит $|G|$, I — идеал в $F[G]$. Доказать, что $I^2 = I$.

71.27. Найти идемпотенты и минимальные идеалы в кольцах:

а) $\mathbb{F}_3[\langle a \rangle_2]$; б) $\mathbb{F}_2[\langle a \rangle_2]$; в) $\mathbb{C}[\langle a \rangle_2]$; г) $\mathbb{R}[\langle a \rangle_3]$.

71.28. Пусть G — конечная группа. Доказать, что при любом $a \in \mathbb{C}[G]$ уравнение $a = axa$ разрешимо в $\mathbb{C}[G]$.

71.29. Сколько различных двусторонних идеалов в алгебре:

а) $\mathbb{C}[\mathbf{S}_3]$; б) $\mathbb{C}[\mathbf{Q}_8]$?

71.30. Для каких конечных групп G групповая алгебра $\mathbb{C}[G]$ является прямой суммой $n = 1, 2, 3$ матричных алгебр?

71.31. Пусть G — группа, A — алгебра над полем F с единицей, φ — гомоморфизм $G \to A^*$. Доказать, что существует единственный гомоморфизм $F[G] \to A$, ограничение которого на G совпадает с φ.

71.32. Доказать, что если $\operatorname{char} F$ не делит порядка конечной группы G, то любой двусторонний идеал групповой алгебры $F[G]$ является кольцом с единицей. Верно ли это утверждение для произвольных алгебр с единицей?

71.33. Пусть F — поле характеристики $p > 0$, p делит порядок конечной группы G и

$$u = \sum_{g \in G} g \in F[G].$$

Доказать, что $F[G]u$ — подмодуль левого регулярного модуля, не выделяющийся прямым слагаемым.

71.34. Пусть $G = \langle a \rangle_p$, F — поле характеристики p, $\Phi: G \to \to \mathbf{GL}_2(F)$, где

$$\Phi(a^s) = \begin{pmatrix} 1 & s \cdot 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

— представление группы G. Указать такой $F[G]$ подмодуль U регулярного представления $V = F[G]$, что представление G на V/U изоморфно Φ. При каких p представление Φ изоморфно регулярному представлению?

71.35. Доказать, что алгебра $\mathbb{F}_2[\langle a \rangle_2]$ не является прямой суммой минимальных левых идеалов.

71.36. Пусть H — p-группа, являющаяся нормальной подгруппой в конечной группе G, F — поле характеристики p.

а) Доказать, что идеал $\omega(H)$ из задачи 71.23 нильпотентен.

б) Найти индекс нильпотентности идеала $\omega(H)$ при $G = \langle a \rangle_2$, $H = \langle a \rangle_2$, $F = \mathbb{F}_2$.

71.37. Доказать, что все идеалы групповой алгебры бесконечной циклической группы главные.

71.38. Доказать, что циклический модуль над алгеброй $F[\langle a \rangle_\infty]$ либо конечномерен над F, либо изоморфен левому регулярному $F[\langle a \rangle_\infty]$-модулю.

71.39. Пусть $A = \mathbb{C}[\langle g \rangle_\infty]$, $P = Ax_1 \oplus Ax_2$ — свободный A-модуль с базисом (x_1, x_2), H — подмодуль, порожденный в P элементами h_1, h_2. Разложить P/H в прямую сумму циклических A-модулей и найти их размерности, если:

а) $h_1 = gx_1 + x_2, \quad h_2 = x_1 - (g+1)x_2$;

б) $h_1 = g^2x_1 + g^{-2}x_2, \quad h_2 = g^4x_1 + (1-g)x_2$;

в) $h_1 = gx_1 + 2g^{-1}x_2, \quad h_2 = (1+g)x_1 + 2(g^{-2} + g^{-1})x_2$.

71.40. Пусть $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ — линейные операторы на $V = F[x]$, $\mathcal{A}(f(x)) = = f'(x)$, $\mathcal{B}(f(x)) = xf(x)$. Доказать, что отображение $\varphi : g \mapsto \mathcal{AB}$ продолжается до гомоморфизма $F[\langle g \rangle_\infty] \to \operatorname{End} V$, и найти $\operatorname{Ker} \varphi$.

71.41. Пусть M — максимальный идеал алгебры $A = F[\langle a \rangle_\infty]$ и $r = \dim_F(A/M)$.

Доказать, что:

а) если $F = \mathbb{C}$, то $r = 1$;

б) если $F = \mathbb{R}$, то $r = 1$ или $r = 2$;

в) если $F = \mathbf{F}_2$, то r может быть неограниченно велико.

71.42. Доказать, что групповая алгебра свободной абелевой группы конечного ранга является нётеровой.

71.43. Доказать, что в групповой алгебре свободной абелевой группы конечного ранга справедлива теорема о существовании и единственности разложения на простые множители.

71.44. Разложить в произведение простых множителей элемент групповой алгебры $A = \mathbb{C}[G]$ свободной абелевой группы G с базисом (g_1, g_2):

а) $g_1g_2 + g_1^{-1}g_2^{-1}$;

б) $1 + g_1^{-1}g_2 - g_1g_2^{-1} - g_1^{-2}g_2^2$.

71.45. Пусть G — свободная абелева группа с базисом (g_1, g_2). Найти факторалгебру групповой алгебры $A = F[G]$ по идеалу I, порожденному элементами:

а) $g_1g_2^{-1}$;

б) $g_1 - g_2$;

в) $g_1 - 1$ и $g_2 - 2$.

71.46. Доказать, что если группа G конечна и алгебра $\mathbb{C}[G]$ не имеет нильпотентных элементов, то G коммутативна.

71.47. Пусть H — нормальная подгруппа в группе G, V — некоторый $F[G]$-модуль и $(H-1)V$ — линейная оболочка элементов вида $(h-1)v$, где $h \in H$, $v \in V$.

Доказать, что:

а) $(H-1)V$ является $F[G]$-подмодулем в V;

б) если H — силовская (нормальная) p-подгруппа в G, $\operatorname{char} F = p$ и $(H-1)V = V$, то $V = 0$.

71.48. Доказать, что комплексные групповые алгебры групп $\mathbf{D}_4$ и $\mathbf{Q}_8$ изоморфны.

71.49. Найти число попарно неизоморфных комплексных групповых алгебр размерности 12.

71.50. Доказать, что число слагаемых в разложении групповой алгебры симметрической группы $\mathbf{S}_n$ над полем $\mathbb{C}$ в прямую сумму матричных алгебр равно числу представлений числа n в виде

$$n = n_1 + n_2 + \ldots + n_k,$$

где $n_1 \geqslant n_2 \geqslant \ldots \geqslant n_k > 0$.

§ 72. Характеры представлений

72.1. Пусть элемент g группы G имеет порядок k и χ — n-мерный характер группы G. Доказать, что $\chi(g)$ есть сумма n (не обязательно различных) корней степени k из 1.

72.2. Пусть Φ — трехмерное комплексное представление группы $\langle a\rangle_3$ и $\chi_\Phi(g) = 0$ для некоторого $g \in \mathbf{Z}_3$. Доказать, что Φ эквивалентно регулярному представлению.

72.3. Пусть χ — двумерный комплексный характер группы $G = \langle a\rangle_3 \times \langle b\rangle_3$. Доказать, что $\chi(g) \neq 0$ для всякого $g \in G$.

72.4. Пусть χ — двумерный комплексный характер группы нечётного порядка. Доказать, что $\chi(g) \neq 0$ для любого $g \in G$.

72.5. Пусть Φ — n-мерное комплексное представление конечной группы G. Доказать, что $\chi_\Phi(g) = n$ тогда и только тогда, когда g принадлежит ядру представления Φ.

72.6. Пусть A — аддитивная группа n-мерного векторного пространства V над полем $\mathbb{F}_p$ и χ — неприводимый нетривиальный комплексный характер группы A. Доказать, что подмножество

$$\{a \in A \mid \ \chi(\alpha) = 1\}$$

есть $(n-1)$-мерное подпространство в V.

72.7. Пусть χ — комплексный характер конечной группы G и $m = \max\{|\chi(g)| \mid g \in G\}$. Доказать, что

$$H = \{g \in G \mid \chi(g) = m\}, \qquad K = \{g \in G \mid |\chi(g)| = m\}$$

— нормальные подгруппы в G.

72.8. Доказать, что двумерный комплексный характер χ группы $\mathbf{S}_3$ неприводим тогда и только тогда, когда $\chi((123)) = -1$.

72.9. Пусть χ — двумерный комплексный характер конечной группы G и $g \in G'$. Доказать, что если $\chi(g) \neq 2$, то χ неприводим.

72.10. Чему равно “среднее значение”

$$\frac{1}{|G|}\sum_{g\in G}\chi(g)$$

неприводимого характера неединичной конечной группы G?

72.11. Доказать, что для любого элемента g неединичной конечной группы G существует такой нетривиальный неприводимый комплексный характер χ группы G, что $\chi(g) \neq 0$.

72.12. Доказать, что отображение группы G в $\mathbb{C}$ является одномерным характером группы G тогда и только тогда, когда это отображение является гомоморфизмом группы G в группу $\mathbb{C}^*$.

72.13. Доказать, что центральная функция, равная произведению двух одномерных характеров группы G, является одномерным характером группы G.

72.14. Доказать, что операция умножения функций определяет во множестве одномерных характеров группы G структуру абелевой группы $\widehat{G}$, двойственной к группе G.

72.15. Доказать, что для конечной циклической группы A группа $\widehat{A}$ — конечная циклическая группа того же порядка.

72.16. Пусть конечная абелева группа A разлагается в прямое произведение $A = A_1 \times A_2$, $\alpha_1 \in \widehat{A}_1$, $\alpha_2 \in \widehat{A}_2$. Доказать, что отображение $A \to \mathbb{C}^*$, переводящее элемент (a_1, a_2) в $\alpha_1(a_1) \cdot \alpha_2(a_2)$, является одномерным характером группы A и $\widehat{A} \simeq \widehat{A}_1 \times \widehat{A}_2$.

72.17. Пусть B — подгруппа конечной абелевой группы A и
$$B^0 = \{\alpha \in \widehat{A} \mid \alpha(b) = 1 \text{ для всякого } b \in B\}.$$
Доказать, что:

а) B^0 — подгруппа в $\widehat{A}$ и всякая подгруппа в $\widehat{A}$ совпадает с B^0 для некоторой подгруппы B;

б) $\widehat{B} \simeq \widehat{A}/B^0$;

в) $B_1 \subset B_2$ тогда и только тогда, когда $B_1^0 \supset B_2^0$;

г) $(B_1 \cap B_2)^0 = B_1^0 \cdot B_2^0$;

д) $(B_1 B_2)^0 = B_1^0 \cap B_2^0$.

72.18. Пусть Φ — гомоморфизм группы G в $\mathbf{GL}_n(\mathbb{C})$.

Доказать, что:

а) отображение $\Phi^*\colon\ g \mapsto (\Phi(g^{-1}))^t$ также является представлением группы G;

б) $\chi_\Phi(g) = \overline{\chi}_{\Phi^*}(g)$ для всякого $g \in G$;

в) представления Φ и Φ^* эквивалентны тогда и только тогда, когда значения характера χ вещественны.

72.19. Пусть Φ — неприводимое комплексное представление группы $\mathbf{S}_n$ и $\Phi'(\sigma) = \Phi(\sigma)\operatorname{sgn}\sigma$ $(\sigma \in \mathbf{S}_n)$.

Доказать, что Φ' — представление группы $\mathbf{S}_n$ и следующие утверждения эквивалентны:

а) $\Phi \sim \Phi'$;

б) ограничение представления Φ на $\mathbf{A}_n$ приводимо;

в) $\chi_\Phi(\sigma) = 0$ для любой нечётной подстановки $\sigma \in \mathbf{S}_n$.

72.20. В задаче 58.11 задана группа матриц из $\mathbf{M}_2(\mathbb{C})$, изоморфная группе кватернионов $\mathbf{Q}_8$. Доказать неприводимость этого двумерного представления группы $\mathbf{Q}_8$ и найти его характер.

72.21. Найти характер представления группы $\mathbf{S}_n$ в пространстве с базисом $(e_1, \ldots, e_n)$, задаваемого формулой

$$\Phi(\sigma)e_i = e_{\sigma(i)} \quad \text{для} \quad \sigma \in \mathbf{S}_n.$$

72.22. Найти характер двумерного представления группы $\mathbf{D}_n$, определяющегося изоморфизмом группы $\mathbf{D}_n$ с группой симметрий фиксированного правильного n-угольника.

72.23. Найти характер трехмерного представления группы $\mathbf{S}_4$, определяющегося изоморфизмом группы $\mathbf{S}_4$ с группой симметрий фиксированного правильного тетраэдра.

72.24. Найти характер представления группы $\mathbf{S}_4$, определяющегося изоморфизмом группы $\mathbf{S}_4$ с группой вращений куба.

72.25. Составить таблицу неприводимых характеров групп:

а) $\langle a\rangle_2$; б) $\langle a\rangle_3$; в) $\langle a\rangle_4$;

г) $\langle a\rangle_2 \times \langle b\rangle_2$; д) $\langle a\rangle_2 \times \langle b\rangle_2 \times \langle c\rangle_2$.

72.26. Составить таблицу характеров одномерных представлений и вычислить группу одномерных характеров (задача 72.14) для групп:

а) $\mathbf{S}_3$; б) $\mathbf{A}_4$; в) $\mathbf{Q}_8$; г) $\mathbf{S}_n$; д) $\mathbf{D}_n$.

72.27. Найти модуль определителя матрицы, строки которой совпадают со строками таблицы неприводимых характеров абелевой группы порядка n.

72.28. Составить таблицу неприводимых характеров групп:

а) $\mathbf{S}_3$; б) $\mathbf{S}_4$; в) $\mathbf{Q}_8$; г) $\mathbf{D}_4$; д) $\mathbf{D}_5$; е) $\mathbf{A}_4$.

72.29. Может ли характер представления некоторой группы порядка 8 принимать значения $(1, -1, 2, 0, 0, -2, 0, 0)$?

72.30. Разложить центральную функцию

$$(1, -1, i, -i, j, -j, k, -k) \mapsto (5, -3, 0, 0, -1, -1, 0, 0)$$

на $\mathbf{Q}_8$ по базису неприводимых характеров. Является ли она характером какого-либо представления?

72.31. Определить, какая из центральных функций на $\mathbf{S}_3$

$$f_1\colon\ (e, (12), (13), (23), (123), (132)) \mapsto (6, -4, -4, -4, 0, 0),$$
$$f_2\colon\ (e, (12), (13), (23), (123), (132)) \mapsto (6, -4, -4, -4, 3, 3)$$

является характером, и указать это представление.

72.32. Пусть A — аддитивная группа конечномерного векторного пространства V над полем $\mathbb{F}_p$ и Ψ — нетривиальный неприводимый (комплексный) характер аддитивной группы поля $\mathbb{F}_p$.

а) Доказать, что всякий неприводимый характер χ группы A имеет вид

$$\chi(a) = \Psi(l(a))$$

для некоторой линейной функции $l \in V^*$.

б) Установить изоморфизм двойственной группы $\widehat{A}$ (см. задачу 72.14) и аддитивной группы пространства V^*.

в) Построить изоморфизм A и $\widehat{\widehat{A}}$.

72.33. Пусть в условиях предыдущей задачи f — комплекснозначная функция на A. Определим функцию $\widehat{f}$ на $\widehat{A}$, полагая для $\chi \in \widehat{A}$

$$\widehat{f}(\chi) = \frac{1}{|A|} \sum_{a \in A} f(a)\chi(a) = (f, \chi)_A.$$

а) Доказать, что

$$f = \sum_{\chi \in \widehat{A}} \widehat{f}(\chi) \cdot \chi.$$

б) Доказать, что

$$\widehat{fg}(\chi) = \sum_{\varphi \in \widehat{A}} \widehat{f}(\varphi)\widehat{g}(\varphi^{-1} \cdot \chi).$$

в) Сравнить функции f на A и $\widehat{\widehat{f}}$ на $\widehat{\widehat{A}}$, используя изоморфизм из задачи 72.32, в).

72.34. Пусть A — аддитивная группа поля $\mathbf{F}_p$. Рассмотрим функцию f на A, полагая

$$f(a) = \begin{cases} 0, & \text{если} \quad a = 0, \\ 1, & \text{если} \quad a = x^2 \text{ для некоторого } x \in \mathbf{F}_p^*, \\ -1, & \text{в остальных случаях} \end{cases}$$

Доказать, что если χ — неприводимый комплексный характер группы A, то $|(f, \chi)_A| = p^{-1/2}$.

72.35. Пусть G — конечная группа, H — её подгруппа. Доказать, что центральная функция на H, получающаяся ограничением на H характера группы G, является характером группы H.

72.36. Пусть Φ — матричное n-мерное представление группы G. Построим представление Ψ группы G на пространстве квадратных матриц порядка n, полагая для $\mathcal{A} \in \mathbf{M}_n(K)$

$$\Psi_g(A) = \Phi_g A^t \Phi_g.$$

Выразить χ_Ψ через χ_Φ.

72.37. Найти неприводимые слагаемые представления Ψ задачи 72.36 и их кратности, если:

а) Φ — двумерное неприводимое представление группы $\mathbf{S}_3$;

б) Φ — представление из задачи 72.23;

в) Φ — двумерное представление группы $\mathbf{Q}_8$ из задачи 72.20.

72.38. Пусть Φ — матричное n-мерное представление группы G. Построим представление Ψ группы G на пространстве квадратных матриц $\mathbf{M}_n(K)$, полагая

$$\Psi_g(A) = \Phi_g \cdot A.$$

Выразить χ_Ψ через χ_Φ.

72.39. Пусть $\rho : G \to \mathbf{GL}(V)$ — регулярное комплексное представление группы $\langle a \rangle_n$. Найти кратность единичного представления группы $\mathbf{Z}_n$ в разложении представления $\rho^{\otimes m}$ (см. задачу 69.19) на неприводимые представления.

72.40. Пусть ρ — двумерное неприводимое комплексное представление группы $\mathbf{S}_3$. Разложить на неприводимые представления $\rho^{\otimes 2}$ и $\rho^{\otimes 3}$.

72.41. Пусть $\rho : \langle a \rangle_n \mapsto \mathbf{GL}(V)$ — комплексное регулярное представление группы $\langle a \rangle_n$. Найти кратность единичного представления группы в разложении на неприводимые компоненты представления, возникающего на пространстве кососимметрических m-контравариантных тензоров на V (см. задачу 69.19).

* * *

72.42. Пусть χ — характер группы G, f — центральная функция на G,

$$f(g) = \frac{1}{2}(\chi(g)^2 - \chi(g^2)).$$

Доказать, что f — характер группы G.

72.43. Пусть Φ — представление группы $G = \mathbf{S}_3$ в пространстве $\mathbb{C}(G)$ всех комплекснозначных функций на G:

$$(\Phi_\sigma f)(x) = f(\sigma^{-1}x), \qquad f \in \mathbb{C}(G), \quad x \in G, \quad \sigma \in G,$$

$f_0 \in \mathbb{C}(G)$ и V_0 — линейная оболочка множества элементов вида $\Phi_\sigma f_0$, где $\sigma \in G$.

Найти характер ограничения Φ на V_0 для:

а) $f_0(\sigma) = \operatorname{sgn} \sigma$;

б) $f_0(\sigma) = \begin{cases} 1, & \text{если} \quad \sigma \in \{e, (12)\}, \\ 0 & \text{в противном случае;} \end{cases}$

в) $f_0(\sigma) = \begin{cases} 1, & \text{если} \quad \sigma \in \{e, (123), (132)\}, \\ 0 & \text{в противном случае;} \end{cases}$

г) $f_0(\sigma) = \begin{cases} 1, & \text{если} \quad \sigma \in \{e, (13), (23)\}, \\ -1, & \text{если} \quad \sigma \in \{(12), (123), (132)\}. \end{cases}$

72.44. Пусть Φ — комплексное представление конечной группы G на пространстве V, Ψ — представление группы G на пространстве W. Обозначим через $T(\Phi, \Psi)$ пространство таких линейных отображений S из V в W, что $S \circ \Phi_g = \Psi_g \circ S$ для всех $g \in G$. Доказать, что

$$\dim T(\Phi, \Psi) = (\chi_\Phi, \chi_\Psi)_G.$$

§ 73. Первоначальные сведения о представлениях непрерывных групп

Если не указывается противное, то все рассматриваемые в этом параграфе представления предполагаются конечномерными.

* * *

73.1. Пусть F есть поле $\mathbb{R}$ или $\mathbb{C}$.

Доказать, что:

а) для любой матрицы $A \in \mathbf{M}_n(F)$ отображение $P_A\colon\ t \mapsto e^{tA}$ $(t \in F)$ является дифференцируемым матричным представлением аддитивной группы поля F;

б) всякое дифференцируемое матричное представление P аддитивной группы поля F имеет вид P_A, где $A = P'(0)$;

в) представления P_A и P_B эквивалентны тогда и только тогда, когда матрицы A и B подобны.

73.2. Доказать, что P является матричным представлением аддитивной группы поля $\mathbb{R}$, и найти такую матрицу A, что $P = P_A$, если:

а) $P(t) = \begin{pmatrix} \cos t & -\sin t \\ \sin t & \cos t \end{pmatrix}$; б) $P(t) = \begin{pmatrix} \operatorname{ch} t & \operatorname{sh} t \\ \operatorname{sh} t & \operatorname{ch} t \end{pmatrix}$;

в) $P(t) = \begin{pmatrix} e^t & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$; г) $P(t) = \begin{pmatrix} e^t & 0 \\ 0 & e^{-t} \end{pmatrix}$;

д) $P(t) = \begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$; е) $P(t) = \begin{pmatrix} 1 & e^t - 1 \\ 0 & e^t \end{pmatrix}$.

73.3. Какие из матричных представлений группы $\mathbb{R}$ из задачи 73.2 эквивалентны?

73.4. В каком случае представления P_A и P_{-A} эквивалентны для $F = \mathbb{C}$?

73.5. Найти все дифференцируемые комплексные матричные представления групп:

а) $\mathbb{R}_+^*$; б) $\mathbb{R}^*$; в) $\mathbb{C}^*$;

г) $\mathbf{U}$ (предполагается дифференцируемость представления по аргументу комплексного числа z).

73.6. Всякое ли комплексное линейное представление группы $\mathbb{Z}$ получается ограничением на $\mathbb{Z}$ некоторого представления группы $\mathbb{C}$?

73.7. Найти в пространстве $\mathbb{C}^n$ все подпространства, инвариантные относительно матричного представления P_A (см. задачу 73.1) в случае, когда характеристический многочлен матрицы A не имеет кратных корней.

73.8. Доказать, что матричное представление P_A, (см. задачу 73.1) вполне приводимо тогда и только тогда, когда матрица A диагонализируема.

73.9. Пусть R_n — пространство однородных многочленов степени n от x, y с комплексными коэффициентами. Для

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathbf{SL}_2(\mathbb{C})$$

и $f \in R_n$ положим

$$(\Phi_n(A)f)(x, y) = f(ax + cy, bx + dy).$$

Доказать, что ограничение представления Φ_n на подгруппу $\mathbf{SU}_2(\mathbb{C})$ неприводимо.

73.10. Пусть $G = \mathbf{GL}_2(\mathbb{C})$. Комплексную функцию на G назовем *полиномиальной*, если она есть многочлен от матричных элементов.

а) Пусть $t(A) = \operatorname{tr} A$, $d(A) = \det A$. Доказать, что t и d — центральные полиномиальные функции на G.

б) Доказать, что любая центральная полиномиальная функция на G является многочленом от t и d.

в) Пусть $A = (a_{ij}) \in G$ и $R = \mathbb{C}[x, y]$. Обозначим через $\Psi(A)$ гомоморфизм $R \to R$, для которого

$$\Psi(A)\colon\; x \mapsto a_{11}x + a_{12}y,$$
$$\Psi(A)\colon\; y \mapsto a_{21}x + a_{22}y.$$

Доказать, что Ψ — представление группы G в пространстве R и подпространства однородных многочленов степени n инвариантны относительно представления Ψ.

г) Доказать, что для $A \in \mathbf{SL}_2(\mathbb{C})$ ограничение $\Psi(A)$ на подпространство R_n совпадает с оператором $\Phi_n(A)$ из задачи 73.9.

д) Пусть χ_n — характер ограничения $\Psi|_{R_n}$. Доказать, что

$$\chi_n = t\chi_{n-1} - d\chi_{n-2}.$$

73.11. Пусть $\mathbb{H}$ — пространство комплексных матриц вида

$$X = \begin{pmatrix} z & w \\ -\overline{w} & \overline{z} \end{pmatrix}$$

со структурой четырехмерного евклидова пространства $(X, X) = \det X$ и $\mathbb{H}_0 = \{X \in \mathbb{H} \mid \operatorname{tr} X = 0\}$.

Доказать, что:

а) отображение $P\colon\; \mathbf{SU}_2 \to \mathbf{GL}(\mathbb{H}_0)$, определенное формулой

$$P(A)\colon\; X \mapsto AXA^{-1},$$

является (вещественным) линейным представлением группы $\mathbf{SU}_2$, $\operatorname{Ker} P = \pm E$, а $\operatorname{Im} P$ состоит из всех собственных ортогональных преобразований пространства H_0;

б) отображение $R : \mathbf{SU}_2 \times \mathbf{SU}_2 \to \mathbf{GL}(\mathbb{H})$, определенное формулой $R(A, B)\colon\; X \mapsto AXB^{-1}$, является (вещественным) линейным представлением группы $\mathbf{SU}_2 \times \mathbf{SU}_2$, $\operatorname{Ker} R = \{(E, E), (-E, -E)\}$, а $\operatorname{Im} R$ состоит из всех собственных ортогональных преобразований пространства $\mathbb{H}_0$;

в) комплексификация линейного представления P изоморфна ограничению представления Φ_2 группы $\mathbf{SL}_2$ из задачи 73.9 на подгруппу $\mathbf{SU}_2$.

73.12. Пусть G — топологическая связная разрешимая группа и ρ — непрерывный гомоморфизм G в группу невырожденных линейных операторов в конечномерном комплексном пространстве V.

Доказать, что:

а) в V существует ненулевой вектор, являющийся собственным для всех операторов $\rho(g)$, $g \in G$;

б) в V существует такой базис $e_1, \ldots, e_n$, что все матрицы $\rho(g)$, $g \in G$, в этом базисе верхнетреугольные.

73.13. Пусть F — алгебраически замкнутое поле и G — разрешимая группа невырожденных линейных операторов в конечномерном векторном пространстве V над F. Доказать, что существуют такие базис $e_1, \ldots, e_n$ в V и нормальная подгруппа N в G конечного индекса (зависящего только от n), что N состоит из верхнетреугольных матриц.

ОТВЕТЫ И УКАЗАНИЯ

1.3. Использовать индукцию для $\left|\bigcup_{i=1}^{r} A_i\right|$.

1.4. Провести индукцию по n.

1.5. 2^{2^n}. Пусть $X_1, \ldots, X_n$ — данные подмножества и X_i^{ε} обозначает X_i или $\overline{X}_i$. Тогда всякое образованное из $\{X_i\}$ подмножество может быть записано в виде

$$\bigcup_{(\varepsilon_1,\ldots,\varepsilon_n)\in\varepsilon} (X_1^{\varepsilon_1} \cap X_2^{\varepsilon_2} \cap \ldots \cap X_n^{\varepsilon_n}),$$

где ε — некоторое подмножество во множестве всех последовательностей $(\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n)$. Во множестве X всех подмножеств из n элементов построить n подмножеств X_i таких, что любой элемент из X можно записать в виде

$$X_1^{\varepsilon_1} \cap \ldots \cap X_n^{\varepsilon_n}.$$

2.2. Представить X в виде $(Y \cup A) \cup (X \setminus (Y \cup A))$, где A счётно и $A \cap Y = \varnothing$, $X \setminus Y$ в виде $A \cup (X \setminus (Y \cup A))$ и использовать существование биекции $Y \cup A \to A$.

2.4. 2^n.

2.5. а) $|Y^X| = n^m$. б) $n(n-1)\ldots(n-m+1)$.

в) $n!$ при $m = n$, 0 при $m \neq n$.

г) $n^m - n(n-1)^m + \ldots + (-1)^i \binom{n}{i}(n-i)^m + \ldots + (-1)^{n-1}\binom{n}{n-1}$.

Использовать задачу 1.3.

2.6. $n(n-1)\ldots(n-m+1)/m!$.

2.7. 2^{n-1}.

2.9. $n!/(m_1!\ldots m_k!)$.

2.11. з), и), к) Индукция по n.

2.12. Индукция по m.

2.13. $\binom{n+k-1}{k-1}$. Установить биекцию между множеством указанных разбиений и множеством подмножеств из $k-1$ элементов во множестве из $n+k-1$ элементов. Использовать задачу 1.3.

3.1. а) $\begin{pmatrix}1&2&3&4&5\\2&1&3&4&5\end{pmatrix}$ и $\begin{pmatrix}1&2&3&4&5\\1&2&5&4&3\end{pmatrix}$.

б) $\begin{pmatrix}1&2&3&4&5&6\\6&5&3&2&1&4\end{pmatrix}$ и $\begin{pmatrix}1&2&3&4&5&6\\1&3&5&6&4&2\end{pmatrix}$.

в) $\begin{pmatrix}1&2&3&4&5\\5&4&3&1&2\end{pmatrix}$ и $\begin{pmatrix}1&2&3&4&5&6\\4&1&6&5&3&2\end{pmatrix}$.

3.2. а) (153)(247). б) (1362)(47). в) (1362745). г) (1472365).
д) $(12)(34)\ldots(2n-1,2n)$. е) $(1\ n+1)(2\ n+2)\ldots(n\ 2n)$.

3.3. а) $\begin{pmatrix}1&2&3&4&5&6&7\\3&4&6&7&5&1&2\end{pmatrix}$. б) $\begin{pmatrix}1&2&3&4&5&6&7\\6&3&7&2&4&5&2\end{pmatrix}$.

в) $\begin{pmatrix}1&2&3&4&\ldots&2n-1&2n\\3&4&5&6&\ldots&1&2\end{pmatrix}$.

3.4. а) (1642573). б) (26537).

3.5. а) 5. б) 8. в) 13. г) 14. д) $\dfrac{n(n-1)}{2}$. е) $\dfrac{n(n+1)}{2}$.
ж) $(n-k+1)(k-1)$. з) $(k-1)(n-k)+\dfrac{(k-1)(k-2)}{2}$.

3.6. а) Нечётная. б) Чётная. в) Чётная. г) Нечётная.
д) $(-1)^{[(n+2)/2]}$. е) $(-1)^{[(n+1)/4]}$. ж) $(-1)^{[n/2]}$.
з) $(-1)^{[n/2][(n+1)/2]}$.

3.7. а), б) Чётная при k нечётном. в) Чётная.
г) Чётная при k чётном. д) Чётная при $p+q+r+s$ чётном.

3.8. $\binom{n}{2}-k$.

3.9. а) $\begin{pmatrix}1&2&\ldots&n\\n&n-1&\ldots&1\end{pmatrix}$. б) $k-1$. в) $n-k$.

3.10. Если пара чисел отлична от пар $(q,q+1)$ и $(q+1,q)$, то она образует инверсию в обоих последовательностях одновременно.

3.11. Воспользоваться задачей 3.10.

3.12. Показать, что если $\sigma=(i_1,\ldots,i_k)$, то

$$\pi G\pi^{-1}=(\pi(i_1),\ldots,\pi(i_k)).$$

3.13. Если i, j входят в разные циклы, то эти циклы сливаются в один; если i, j входят в один цикл, то он распадается на два цикла, остальные циклы не изменяются; декремент увеличивается или уменьшается на 1.

3.17. Если g — другой многочлен того же типа (при другом выборе двучленов), то $\sigma_f/\sigma_g = f/g$; затем использовать $\prod_{i>j}(x_j - x_i)$.

3.18. а) Если граф связный, то в виде указанных произведений представляются транспозиции $(12), \ldots, (1n)$, а если несвязный, то только циклы, которые содержатся в одной из компонент связности.

б) Воспользоваться утверждением а).

3.19. Рассмотрим ряд последовательностей, начинающийся с $1, 2, \ldots \ldots, n$, полученный следующим образом: сначала 1 переводим последовательно на 1-е, 2-е, ..., n-е место; затем 2 переводим последовательно на все места до $(n-1)$-го и т.д. На каждом шаге число инверсий увеличивается на 1 и достигает числа $\binom{n}{2}$ в последней последовательности $n, n-1, \ldots, 1$.

3.20. $\dfrac{n!}{2}\dbinom{n}{2}$. Воспользоваться задачей 3.8.

3.21. а) $\operatorname{sgn}\xi = (\operatorname{sgn}\sigma)^n(\operatorname{sgn}\tau)^m$. Лексикографически упорядочить $X \times Y$ и подсчитать число инверсий.

б) Длины циклов равны НОК(k_i, l_j), каждый входит НОД(k_i, l_j) раз $(i = 1, \ldots, s;\ j = 1, \ldots, t)$; рассмотреть сначала случай, когда сами σ, τ являются циклами. Заметить, что в этом случае чётность ξ совпадает с чётностью $|X| + |Y|$.

3.22. в) Воспользоваться задачей 3.12.

3.23. Разложить σ в произведение независимых циклов. Интерпретируя каждый цикл длины не меньше трех как поворот правильного n-угольника, представить поворот как произведение двух симметрий.

4.2. а) $u(n) = 3 \cdot 2^n - 5$. б) $u(n) = (-1)^n(2n-1)$.

4.3. Индукция по n.

4.4. а) $\dfrac{4^{n+1}-1}{3} - n - 1$. б) $-n^2 + 1$. в) $2^{n+2}(n-2) + 6$.

4.5. $u(n) = \dfrac{1}{\sqrt{5}}\left(\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \dfrac{1}{\sqrt{5}}\left(\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n$.

4.6 – 4.10. Индукция по n.

4.11. а)–д) Индукция по n. е) Вытекает из д).

ж) Вытекает из д), е) и алгоритма Евклида.

4.12. Индукция по n.

4.13. Если m — такое целое число, что $rm \in \mathbb{Z}$, то $U_m(2\cos r\pi) = 0$ по 4.12, б). По 4.12, б) и 28.1 число $2\cos r\pi$ целое. Так как $|\cos r\pi| \leqslant 1$, то $2\cos r\pi = 0, \pm 1, \pm 2$.

4.14. $\dfrac{n(n+1)}{2} + 1$. Добавление n-й прямой увеличивает число областей на n.

5.1. а) $n(n+1)(2n+1)/6$; рассмотреть сумму

$$(0+1)^3 + (1+1)^3 + \ldots + ((n-1)+1)^3.$$

б) $n^2(n+1)^2/4$.

5.2. См. указание к 5.1.

5.3. Пусть T — множество, состоящее из пар (σ, i), где $\sigma \in \mathbf{S}$ $\sigma(i) = i$; тогда

$$\sum_{\sigma \in \mathbf{S}_n} N(\sigma)^{s+1} = \sum_{(\sigma,i)\in T} N(\sigma)^s = \sum_{i=1}^{n} \sum_{\sigma' \in \mathbf{S}_{n-1}} (N(\sigma'+1)^s.$$

5.4. Использовать задачу 2.7 и 2.12, а).

5.5. Использовать задачу 5.4, предварительно представив в виде суммы выражение одной функции через другую.

5.6. Использовать задачу 5.5.

6.1. $(1, 4, -7, 7)$.

6.2. а) $(0, 1, 2, -2)$. б) $(1, 2, 3, 4)$.

6.3. а) Да. б) Нет. в) Да. г) Нет. д) Нет. е) Да.

6.7. а) Нет. б) Нет. в) Нет. г) Нет. д) Да при чётном k. е) Да.

6.8. Нет.

6.9. а) $\lambda = 15$. б) λ — любое число. в) λ — любое число. г) $\lambda \neq 12$. д) Такого λ не существует.

6.10. а) (a_1, a_2), (a_2, a_3). б) (a_1, a_3), (a_2, a_4), (a_1, a_4), (a_2, a_3). в) Любые два вектора образуют базис. г) (a_1, a_2, a_4), (a_2, a_3, a_4). д) (a_1, a_2, a_4), (a_1, a_2, a_5), (a_2, a_3, a_4), (a_2, a_3, a_5).

6.11. Если система линейно независима или получается из линейно независимой добавлением нулевых векторов.

6.12. а) (a_1, a_2, a_4, a_5), $a_3 = a_1 - a_2$.

б) (a_1, a_2, a_3), $a_4 = 17a_1 + 12a_2 - 26a_3$.

в) (a_1, a_2, a_3), $a_4 = 5a_1 + 2a_2 - 2a_3$, $a_5 = -a_1 + a_2 + a_3$.

г) (a_1, a_2), $a_3 = a_1 + 3a_2$, $a_4 = 2a_1 - a_2$.

д) (a_1, a_2, a_3).

е) (a_1, a_2), $a_3 = 2a_1 - a_2$.

ж) (a_1, a_2), $a_3 = -a_1 + a_2$, $a_4 = -5a_1 + 4a_2$.

з) (a_1, a_2, a_3), $a_4 = a_1 + a_2 - a_3$.

и) (a_1, a_2, a_4), $a_3 = 2a_1 - a_2$.

к) (a_1, a_2), $a_3 = 3a_1 - a_2$, $a_4 = a_1 - a_2$.

л) (a_1, a_2, a_3), $a_4 = a_1 - a_2 - a_3$.

6.13. Любые $k-1$ различных векторов образуют базис.

6.18. а), б) $p = 3$.

7.1. а) 2. б), в), д) 3. г), е), к) 4. ж), з), и) 5.

л) n при нечётном n; $n-1$ при чётном n.

7.2. а) 1 при $\lambda = 1$, 2 при $\lambda = -1$ и 3 при $\lambda \neq \pm 1$.

б) 2 при $\lambda = 1$, 3 при $\lambda = 2$ и $\lambda = 3$, 4 в остальных случаях.

в) 2 при $\lambda = 0$, 3 при $\lambda \neq 0$.

г) 2 при $\lambda = 3$, 3 при $\lambda \neq 3$.

д) 3 при $\lambda = \pm 1$ или ± 2, 4 при $\lambda \neq \pm 1$ или ± 2.

е) 3, если $\lambda = 0, -2, -4$ и 4 в остальных случаях.

ж) n при $\lambda = 1, 2, \ldots, n$, и $n+1$ при остальных значениях λ.

з) n при $\lambda = 1/2$ и $n+1$ при $\lambda \neq 1/2$.

7.4. Система строк произведения матриц линейно выражается через систему строк второй матрицы.

7.6. Система строк суммы матриц линейно выражается через объединение систем строк этих матриц.

7.7. Если, например, система строк матрицы ранга 2 есть $(a, b, \alpha a + \beta b, \gamma a + \delta b)$, то A есть сумма матриц со строками $(a, 0, \alpha a, \gamma a)$ и $(0, b, 0, \beta b, \delta b)$; далее использовать 7.6.

7.9. 0 при $r \leqslant n-2$; 1 при $r = n-1$; n при $r = n$.

7.10. Воспользоваться элементарными преобразованиями.

7.15. Использовать приведение к ступенчатому виду с помощью элементарных преобразований II типа со строками.

7.16. Индукция по числу столбцов.

7.19. Индукция по числу строк. Для доказательства единственности рассмотреть базис системы столбцов с наименьшими возможными номерами.

8.1. а) $x_3 = (x_1 - 9x_2 - 2)/11$, $x_4 = (-5x_1 + x_2 + 10)/11$; $(0, 1, -1, 0)$.

б) $x_3 = -\dfrac{11}{8}x_4$, $x_1 = \dfrac{2}{3}x_2 + \dfrac{1}{24}x_4 - \dfrac{1}{3}$; $\Big(-\dfrac{1}{3}, 0, 0, 0\Big)$.

в) Система несовместна.

г) $x_3 = 1 - 4x_1 - 3x_2$, $x_4 = 1$, $(1, -1, 0, 1)$.

д) $x_3 = 6 + 10x_1 - 15x_2$; $x_4 = -7 - 12x_1 + 18x_2$, $(1, 1, 1, -1)$.

е) $x_1 = 3$, $x_2 = 0$, $x_3 = -5$, $x_4 = 11$.

ж) $x_1 = 3$, $x_2 = 2$, $x_3 = 1$.

з) $x_3 = 13$, $x_5 = -34$, $x_4 = 19 - 3x_1 - 2x_2$.

8.2. а) При $\lambda = 0$ система несовместна; при $\lambda \neq 0$

$$x_1 = \frac{1}{\lambda}, \quad x_3 = \frac{9\lambda - 16}{5\lambda} - \frac{8}{5}x_2, \quad x_4 = \frac{4-\lambda}{5\lambda} - \frac{3}{5}x_2.$$

б) При $\lambda \neq 0$ система несовместна; при $\lambda = 0$

$$x_1 = -\frac{1}{2}(7 + 19x_3 + 7x_4), \quad x_2 = -\frac{1}{2}(3 + 13x_1 + 5x_4).$$

в) При $\lambda = 1$ система несовместна, при $\lambda \neq 1$

$$x_1 = \frac{43 - 8\lambda}{8 - 8\lambda} - \frac{9}{8}x_3, \quad x_2 = \frac{5}{4 - 4\lambda} + \frac{x_3}{4}, \quad x_4 = \frac{5}{\lambda - 1}.$$

г) При $\lambda = 8$ $x_2 = 4 + 2x_1 - 2x_4$, $x_3 = 3 - 2x_4$; при $\lambda \neq 8$ решение $x_2 = 4 - 2x_4$, $x_3 = 3 - 2x_4$.

д) При $\lambda = 8$ $x_3 = -1$, $x_4 = 2 - x_1 - \dfrac{3}{2}x_2$; при $\lambda \neq 8$ $x_2 = 4 - 2/3x_1$, $x_3 = -1$, $x_4 = 0$.

е) При $\lambda \neq 1, -2$ $x_1 = x_2 = x_3 = 1/(\lambda + 2)$; при $\lambda = 1$ $x_1 = 1 - x_2 - x_3$; при $\lambda = -2$ система несовместна.

ж) При $\lambda \neq 1, -3$ $x_1 = x_2 = x_3 = x_4 = 1/(\lambda + 3)$; при $\lambda = 1$ $x_1 = 1 - x_2 - x_3 - x_4$; при $\lambda = -3$ система несовместна.

з) При $\lambda \neq 0, -3$

$$x_1 = \frac{2 - \lambda^2}{\lambda(\lambda + 3)}, \quad x_2 = \frac{2\lambda - 1}{\lambda(\lambda + 3)}, \quad x_3 = \frac{\lambda^3 + 3\lambda^2 - \lambda - 1}{\lambda(\lambda + 3)};$$

при $\lambda = 0$ и $\lambda = -3$ система несовместна.

и) При $\lambda \neq 0, -3$ $x_1 = 2 - \lambda^2$, $x_2 = 2\lambda - 1$, $x_3 = \lambda^3 + 2\lambda^2 - \lambda - 1$; при $\lambda = 0$ $x_1 = -x_2 - x_3$; при $\lambda = -3$ $x_1 = x_2 = x_3$.

8.3. а) ${}^t(2, 3, 1)$[1].

б) Множество векторов вида ${}^t(0, 0, 2, -1) + \alpha\,{}^t(13, 0, 9, -1) + \beta\,{}^t(0, 13, -27, 3)$.

в) Множество векторов вида ${}^t(2, 1, -1, 0, 1) + \alpha\,{}^t(1, 0, 4, 0, -1) + \beta\,{}^t(0, 1, -8, 0, 2)$.

г) Множество векторов вида ${}^t(2, -2, 3, -1) + \alpha\,{}^t(-13, 8, -6, 7)$.

д) $\varnothing$.

е) Множество векторов вида ${}^t(1, 2, 22/5, 8/5) + \alpha\,{}^t(5, 0, -17, -8) + \beta\,{}^t(0, 5, 34, 16)$.

ж) Множество векторов вида ${}^t(-3, 1, 3/2, -1/2, -5/2) + \alpha\,{}^t(1, 0, -2, -4, -4) + \beta\,{}^t(0, 1, -1, -2, -2)$.

з) ${}^t(3, 0, -5, 11)$.

8.4. а) $x_1 = 8x_3 - 7x_4$, $x_2 = -6x_3 + 5x_4$; $({}^t(8, -6, 1, 0), {}^t(-7, 5, 0, 1))$.

б) Система имеет только нулевое решение.

[1] В ответах символ ${}^t u$ обозначает вектор-столбец, полученный транспонированием строки u.

в) $x_1 = x_4 = x_5$, $x_2 = x_4 - x_6$, $x_3 = x_4$; $({}^t(1,1,1,1,0,0),\ {}^t(-1,0,0,0,1,0),\ {}^t(0,-1,0,0,0,1))$.

г) Если $n = 3k$ или $n = 3k+1$, то система имеет только нулевое решение; если $n = 3k+2$, то общее решение

$$x_{3i} = 0, \quad x_{3i+1} = -x_n, \quad x_{3i+2} = x_n \qquad (i = 1, \ldots, k);$$

$({}^t(-1,1,0,-1,1,0,\ldots,0,-1,1))$.

8.5. а) $({}^t(7,-5,0,2),\ {}^t(-7,5,1,0))$.

б) $({}^t(-9,3,4,0,0),\ {}^t(-3,1,0,2,0),\ {}^t(-2,1,0,0,1))$.

в) Ядро состоит из нулевого вектора.

г) $({}^t(-9,-3,11,0,0),\ {}^t(3,1,0,11,0),\ {}^t(-10,4,0,0,11))$.

д) $({}^t(0,1,3,0,0),\ {}^t(0,0,2,0,1))$.

е) $({}^t(-3,2,1,0,0),\ {}^t(-5,3,0,0,1))$.

8.6. а) $x_1 = x_2 = 1$. б) $x_3 = 3$, $x_2 = -1$.

в) $x_1 = \cos(\alpha+\beta)$, $x_2 = \sin(\alpha+\beta)$. г) ${}^t\left(\frac{9}{4}, -\frac{3}{4}, \frac{3}{4}\right)$.

д) $x_1 = 3$, $x_2 = 2$, $x_3 = 1$. е) $x_1 = 3$, $x_2 = -2$, $x_3 = 2$.

8.7. $x^2 + 3x + 4$.

8.8. $x^3 + 3x^2 + 4x + 5$.

8.9. $-x^4 - x + 1$.

8.10. а) ${}^t(2,4,2)$. б) ${}^t(15,2,4)$.

8.11. Получить формулы Крамера $\Delta x_i = \Delta_i$ и обе части умножить на число u такое, что $\Delta u + mv = 1$.

8.12. Если $d = a_{ij}$ и $a_{ik} = dq + r$ $(0 < r < |d|)$, то элементарным преобразованием можно перейти к матрице с элементом $r < |d|$; поэтому все элементы строки i и столбца j делятся на d, и матрицу можно привести к виду B, где $b_{11} = d$, $b_{1i} = b_{k1} = 0$; если $b_2 = dq + s$ $(0 \leqslant s < |d|)$, то, вычтя из первой строки вторую, а затем прибавив ко второму столбцу первый, умноженный на q, получим матрицу с элементом $-s$, т.е. $s = 0$.

8.13. Использовать задачу 8.12 и её решение.

8.14. Использовать теорему Крамера. Обратное утверждение неверно: система из одного уравнения $2x = 2$ является определенной над кольцом целых чисел и неопределённой по модулю 2.

8.15. Неверно: система из одного уравнения $4x = 2$ не имеет целых решений, но совместна по модулю любого простого числа p.

8.16. а) Единственное решение по модулю $p \neq 3$; $x_1 = -1 + x_2 + x_3$ при $p = 3$.

б) Единственное решение по модулю $p \neq 3$; по модулю 3 система несовместна.

в) Единственное решение по модулю $p \neq 2$; по модулю $p = 2$ система несовместна.

8.19. Использовать результат предыдущей задачи.

8.23. Воспользоваться результатами задач 8.20–8.22.

8.24. а) $\{{}^t(1 - 3k - 2l, 2k, l) \mid k, l \in \mathbb{Z}\}$.

б) $\{{}^t(k, 0, 11(2k-1), -8(2k-1)) \mid k \in \mathbb{Z}\}$.

8.25. Использовать задачу 8.19.

8.26. Для столбца X через $\|X\|$ обозначим максимум модулей координат. Доказать, что для любых натуральных чисел n, m справедливо неравенство $\|X_n - X_m\| < q\|X_{n-1} - X_{m-1}\|$ где $0 < q < 1$. Отсюда следует сходимость последовательности X_n к решению уравнения $AX = b$.

9.1. а) -16. б) 0. в) 1. г) $\sin(\alpha - \beta)$.

д) 0. е) 0. ж) $a^2 + b^2 + c^2 + d^2$.

9.2. а) -8. б) -50. в) 16. г) 0.

д) $3abc - a^3 - b^3 - c^3$. е) 0. ж) $\sin(\beta - \gamma) + \sin(\gamma - \alpha) + \sin(\alpha - \beta)$.

з) -2. и) 0. к) $3i\sqrt{3}$.

10.1. а) Входит со знаком плюс. б) Входит со знаком минус. в) Не входит.

10.2. $i = 2$, $j = 3$, $k = 2$.

10.3. $2x^4 - 5x^3 + \ldots$

10.4. а) $a_{11}a_{22}\ldots a_{nn}$. б) $(-1)^{n(n-1)/2}a_{1n}a_{2,n-1}\ldots a_{n1}$.

в) $abcd$. г) $abcd$. д) 0.

10.6. 1.

11.1. Умножится на $(-1)^n$.

б) Не изменится.

в) Не изменится; преобразование можно заменить двумя симметриями относительно горизонтальной и вертикальной средних линий и симметрией относительно главной диагонали.

г) Не изменится.

д) Умножится на $(-1)^{n(n-1)/2}$.

11.2. а) Умножится на $(-1)^{n-1}$. б) Умножится на $(-1)^{n(n-1)/2}$.

11.3. а), б) Не изменится. в) Обратится в нуль. г) Определитель чётного порядка обратится в 0; нечётного порядка удвоится.

11.4. Транспонировать определитель и из каждой строки вынести -1 за знак определителя.

11.5. Использовать, что, например, $20604 = 2 \cdot 10^4 + 6 \cdot 10^2 + 4$.

11.6. 0, так как одна строка равна полусумме двух других.

11.7. 0.

11.10. а) $a_1a_2\ldots a_n+(a_1a_2\ldots a_{n-1}+a_1\ldots a_{n-2}a_n+\ldots+a_2a_3\ldots a_n)x$; разложить определитель на сумму двух слагаемых, пользуясь последней строкой.

б) $x^n+(a_1+\ldots+a_n)\times x^{n-1}$.

в) $D_n=0$ при $n>2$, $D_1=1+x_1y_1$, $D_2=(x_1-x_2)(y_1-y_2)$.

г) 0 при $n>1$; разложить на сумму определителей, используя каждый из столбцов.

д) $1+\sum_{i=1}^n(a_i+b_i)+\sum_{1\leqslant i<k\leqslant n}(a_i-a_k)\times(b_k-b_i)$; представить в виде суммы двух определителей, пользуясь первой строкой;

е) $1+x_1y_1+\ldots+x_ny_n$.

12.1. $8a+15b+12c-19d$.

12.2. $2a-8b+c+5d$.

12.3. а) $x^n+(-1)^{n+1}y^n$; разложить по первому столбцу.

б) $a_0x_1x_2x_3\ldots x_n+a_1y_1x_2x_3\ldots x_n+a_2y_1y_2x_3\ldots x_n+\ldots+a_ny_1y_2y_3\ldots y_n$; разложить по первой строке и использовать теорему об определителе с углом нулей или разложить по последнему столбцу и составить рекуррентное соотношение.

в) $a_0x^n+a_1x^{n-1}+\ldots+a_n$; разложить по первому столбцу.

г) $n!(a_0x^n+a_1x^{n-1}+\ldots+a_n)$.

д) $\dfrac{x^{n+1}-1}{(x-1)^2}-\dfrac{n+1}{x-1}$.

е) $\dfrac{nx^n}{x-1}-\dfrac{x^n-1}{(x-1)^2}$.

ж) $a_1a_2\ldots a_n-a_1a_2\ldots a_{n-1}+a_1a_2\ldots a_{n-2}-\ldots+(-1)^{n-1}a_1+(-1)^n$; разложить по первому столбцу или разложить по последнему столбцу, в первом слагаемом перенести последнюю строку на первое место и составить рекуррентное соотношение.

з) $\prod_{i=1}^n(a_ia_{2n+1-i}-b_ib_{2n+1-i})$.

и) $a_1a_2\ldots a_n\left(a_0-\dfrac{1}{a_1}-\dfrac{1}{a_2}-\ldots-\dfrac{1}{a_n}\right)$.

12.4. Доказать, что $D_n=D_{n-1}+D_{n-2}$.

13.1. а) 301. б) -153. в) 1932. г) -336.

д) -7497; получить угол из нулей. е) 10. ж) -18016.

з) 1. и) -2639. к) $\dfrac{28}{81}$. л) 1. м) -21. н) 60.

о) 78. п) -924. р) 800. с) 301.

13.2. а) $n!$. б) $(-1)^{n-1}n!$; последнюю строчку (или последний столбец) вычесть из всех остальных.

в) $(-1)^{n(n-1)/2}b_1b_2\ldots b_n$.

г) $x_1(x_2 - a_{12}) \cdot (x_3 - a_{23}) \dots (x_n - a_{n-1,n})$; из каждой строки, начиная с последней, вычесть предыдущую.

д) $(-1)^{n(n-1)} 2n$; из каждого столбца, начиная с последнего, вычесть предыдущий.

е) $\prod_{k=1}^{n} (1 - a_{kk} x)$.

ж) $(-1)^{n(n+1)/2} (n+1)^{n-1}$; прибавить все столбцы к первому.

з) $[(a + (n-1)b](a-b)^{n-1}$.

и) $b_1 \dots b_n$.

13.3. $(-nh)^{n-1} \left[a + \dfrac{(n-1)}{2} h\right]$; из каждой строки от 1-й до $(n-1)$-й вычесть следующую и полученные $n-1$ строки сложить.

14.1. а) $n+1$. б) $2^{n+1} - 1$. в) $9 - 2^{n+1}$.

г) $5 \cdot 2^{n-1} - 4 \cdot 3^{n-1}$. д) $2^{n+1} - 1$.

е) $\dfrac{\alpha^{n+1} - \beta^{n+1}}{\alpha - \beta}$ при $\alpha \neq \beta$; и $(n+1)\alpha^n$ при $\alpha = \beta$;

ж), з) $\prod_{k=1}^{n} k!$. и) $\prod_{n \geqslant i > k \geqslant 1} (x_i - x_k)$.

к) $\prod_{1 \leqslant i < k \leqslant n+1} (a_i b_k - a_k b_i)$.

л) $(\sum x_{\alpha_1} x_{\alpha_2} \dots x_{\alpha_{n-s}} \prod_{n \geqslant i > k \geqslant 1} (x_i - x_k)$, где сумма берется по всем сочетаниям $n - s$ чисел $\alpha_1, \dots, \alpha_{n-s}$ из чисел $1, 2, \dots, n$; приписать строку $1, z, z^2, \dots, z^{s-1}, z^s, z^{s+1}, \dots, z^n$ и столбец ${}^t(z^s, x_1^s, \dots, x_n^s)$, полученный определитель вычислить двумя способами: разложением по приписанной строке и как определитель Вандермонда и сравнить коэффициенты при z^s.

м) $[2x_1 x_2 \dots x_n - (x_1 - 1)(x_2 - 1) \dots (x_n - 1) \prod_{n \geqslant i > k \geqslant 1} (x_i - x_k)$; приписать первую строку $1, 0, 0, \dots, 0$ и первый столбец из единиц, первый столбец вычесть из остальных, единицу в левом верхнем углу представить в виде $2 - 1$ и представить определитель в виде разности двух определителей, пользуясь первой строкой.

н) $(-1)^{n-1}(n-1)x^{n-2}$.

о) $\dfrac{x(a-y)^n - y(a-x)^n}{x-y}$.

15.1. $(a^2 + b^2 + c^2 + d^2)^2$; умножить данную матрицу на транспонированную. Найти коэффициент при a^4 в развернутом выражении данного определителя.

15.2. а) 0, если $n > 2$, $\sin(\alpha_1 - \alpha_2)\sin(\beta_1 - \beta_2)$ при $n = 2$.

б) $\prod_{n \geqslant i > k \geqslant l} (a_i - a_k)(b_i - b_k)$.

в) $\binom{n}{1}\binom{n}{2} \dots \binom{n}{n} \prod_{n \geqslant i > k \geqslant 0} (a_k - a_i)(b_i - b_k)$.

г) $\prod_{n \geqslant i > k \geqslant 1} (x_i - x_k)^2$.

15.3. Умножить на определитель Вандермонда.

15.4. а) $(a+b+c+d)(a-b+c-d)(a+bi-c-di)(a-bi-c+di) = a^4 - b^4 + c^4 - d^4 - 2a^2c^2 + 2b^2d^2 - 4a^2bd + 4b^2ac - 4c^2bd + 4d^2ac$; см. зада-

чу 15.3.

б) $(1-\alpha^n)^{n-1}$; см. задачу 15.3 и равенство $(1-\alpha\varepsilon)(1-\alpha\varepsilon_2)\ldots(1-\alpha\varepsilon_n) = 1-\alpha^n$.

16.1. а) 2; показать, что все три члена определителя, входящие в развернутое выражение со знаком плюс, не могут равняться 1, и рассмотреть определитель с нулем на главной диагонали и остальными единицами.

б) 4; в развернутом выражении определителя рассмотреть произведение членов со знаком плюс и членов со знаком минус и вычислить определитель с элементами главной диагонали -1 и остальными единицами.

16.2. Воспользоваться развернутым выражением.

16.4. Применить теорему об умножении определителей к произведению $A\widehat{A}$.

16.5. Разложить $\det C$ в сумму n^m определителей, пользуясь столбцами. В каждом слагаемом из j-го столбца вынести b_{jk_j}. Показать, что $\det C = \sum_{k_1,\ldots,k_m=1}^{n} b_{1k_1}\ldots b_{mk_m} A_{k_1\ldots k_m}$. Заметить, что при $m > n$ среди чисел $k_1,\ldots,k_m$ всегда есть равные и $A_{k_1\ldots k_m} = 0$. Второй способ: при $m > n$ матрицы A и B дополнить до квадратных при помощи $m-n$ столбцов, состоящих из 0, и применить теорему об умножении определителей.

16.6, 16.7. Использовать задачу 16.5.

16.8. Разложить по последней строке.

16.9. Сначала доказать, что

$$\begin{vmatrix} a_{11}+x & \ldots & a_{1n}+x \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1}+x & \ldots & a_{nn}+x \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1n} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix} + x\sum_{i,j} A_{ij},$$

затем в левой части равенства и в первом слагаемом правой части вычесть первую строку из всех остальных и положить $x = 1$.

16.11. Выполнить над каждой из k групп по n строк определителя D преобразования, приводящие определитель A к треугольному виду, и разложить полученный определитель по строкам с номерами $n, 2n, \ldots, kn$ по теореме Лапласа.

16.12. а) Сумма всевозможных произведений $a_1,\ldots,a_n$, одно из которых содержит все элементы, а другие получаются из него выбрасыванием одной или нескольких сомножителей с соседними номерами (если выброшены все сомножители, считаем член равным 1); использовать рекуррентное соотношение $(a_1\ldots a_n) = a_n(a_1\ldots a_{n-1}) + (a_1\ldots a_{n-2})$.

б) $(a_1a_2\ldots a_n) =$

$$= (a_1a_2\ldots a_k)(a_{k+1}a_{k+2}\ldots a_n) + (a_1a_2\ldots a_{k-1})(a_{k+2}a_{k+3}\ldots a_n).$$

в) Применить метод математической индукции.

16.13. В случае линейной зависимости строк матрицы $(C|D)$ элементарными преобразованиями строк перевести её к матрице с нулевой строкой и эти же элементарные преобразования применить к столбцам мат-

риц ${}^tD$ и ${}^tC$; это даст матрицу, отличающуюся от $A{}^tD - B{}^tC$ невырожденным множителем; в случае, когда

$$\begin{vmatrix} c_{1i_1} & \ldots & c_{1i_k} & d_{1j_1} & \ldots & d_{1j_l} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ c_{ni_1} & \ldots & c_{ni_k} & d_{nj_1} & \ldots & d_{nj_l} \end{vmatrix} \neq 0, \qquad k+l=n,\ i_s \neq j_t,$$

рассмотреть произведение $\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} {}^tD & {}^tK \\ -{}^tC & {}^tL \end{pmatrix}$, где

$$(K|L) = \begin{pmatrix} 0 & \ldots & c'_{1i_1} & \ldots & c'_{1i_k} & \ldots & 0 & \ldots & d'_{1j_1} & \ldots & 0 & \ldots & d'_{1j_l} & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & \ldots & c'_{ni_1} & \ldots & c'_{ni_k} & \ldots & 0 & \ldots & d'_{nj_1} & \ldots & 0 & \ldots & d'_{nj_l} & \ldots & 0 \end{pmatrix},$$

$\begin{pmatrix} c'_{1i_1} & \ldots & c'_{ni_1} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ d'_{1j_l} & \ldots & d'_{nj_l} \end{pmatrix}$ — матрица, обратная к $\begin{pmatrix} c_{1i_1} & \ldots & d_{1j_l} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ c_{ni_l} & \ldots & d_{nj_l} \end{pmatrix}$.

16.14. Рассмотреть произведение $\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} C^{-1} & D \\ 0 & -C \end{pmatrix}$ или соответственно $\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} D & 0 \\ -C & D^{-1} \end{pmatrix}$.

16.15.

$$\left[(c-a)^n - \binom{n-1}{1}(c-a)^{n-2} + \binom{n-2}{2}(c-a)^{n-4} + \ldots\right] \times$$
$$\times \left[(c+a)^n - \binom{n-1}{1}(c+a)^{n-2} + \binom{n-2}{2}(c+a)^{n-4} - \ldots\right].$$

Воспользоваться тем, что

$$\begin{vmatrix} cE & A \\ A & cE \end{vmatrix} = |c^2E - A^2| = |cE - A||cE + A|.$$

16.16. В определителе D_{n+2} матрицы, полученной из исходной приписыванием снизу строки $1, x, \ldots, x^{n+1}$, вычесть из каждого столбца предыдущий, показать, что $D_{n+2} = (x-1)D_{n-1}$, и разложить D_{n+2} по последней строке.

16.17. Разложив D_{2k+1} по последнему столбцу, показать, что числа $-D_1, D_2, -D_3, D_4, \ldots$ удовлетворяют той же системе уравнений, что и коэффициенты разложения

$$\frac{x}{e^x - 1} = 1 + b_1x + b_2x^2 + b_3x^3 + \ldots$$

(использовать тождество

$$1 = (1 + b_1x + b_2x^2 + b_3x^3 + \ldots)\Big(1 + \frac{x}{2!} + \frac{x^2}{3!} + \frac{x^3}{4!} + \ldots\Big)\Big);$$

заметить, что $b_1 = -\dfrac{1}{2}$ и что $\dfrac{x}{e^x - 1} - 1 + \dfrac{1}{2}x$ — чётная функция.

16.18. Каждый из определителей возвести в квадрат.

16.19. а), б) $P_n = Q_n = 1$; показать, что $Q_n = P_n^2$.

16.20. Пользуясь формулой Гаусса $n = \sum_{d|n} \varphi(d)$, показать, что

$$d_{ij} = \sum_{k=1}^{n} p_{ki} p_{kj} \varphi(k),$$

где $p_{ij} = 1$, если i делит j, и $p_{ij} = 0$, если i не делит j; разложить определитель на сумму n^n слагаемых.

16.21. Проверить, что

$$A = \det \left(\frac{1}{1 - x_i y_j} \right)_{i,j=1,\ldots,n} \prod_{i,j=1}^{n} (1 - x_i y_j)$$

является целочисленным многочленом от $x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_n$, кососимметричным по $x_1, \ldots, x_n$ и по $y_1, \ldots, y_n$. Поэтому

$$A = b\Delta(x_1, \ldots, x_n)\Delta(y_1, \ldots, y_n),$$

где b — многочлен от $x_1, \ldots, y_n$. Сравнивая степень A и

$$\Delta(x_1, \ldots, x_n)\Delta(y_1, \ldots, y_n),$$

показать, что $b = 1$.

17.1.

а) $\begin{pmatrix} 1 & n+m \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. б) $\begin{pmatrix} \cos(\alpha+\beta) & -\sin(\alpha+\beta) \\ \sin(\alpha+\beta) & \cos(\alpha+\beta) \end{pmatrix}$. в) $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$.

г) $\begin{pmatrix} 6 & 14 & -2 \\ 10 & -19 & 17 \end{pmatrix}$. д) $\begin{pmatrix} 6 & 8 & 6 \\ 8 & 19 & 8 \\ 6 & 8 & 6 \end{pmatrix}$. е) $\begin{pmatrix} 7 & 5 & 0 \\ -7 & -5 & 0 \\ 14 & 10 & 0 \end{pmatrix}$.

ж) $\begin{pmatrix} 3 & 3 & 0 & 0 \\ 3 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & -2 \end{pmatrix}$. з) $\begin{pmatrix} 2 & 4 & 0 & 0 \\ 3 & 7 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 7 \\ 0 & 0 & -2 & 3 \end{pmatrix}$.

17.2. а) $\begin{pmatrix} -1 & -4 & -1 \\ 2 & 9 & -7 \\ 13 & -9 & 15 \end{pmatrix}$. б) $\begin{pmatrix} 7 & 4 & 5 & 11 \\ 6 & 4 & -1 & 6 \\ 0 & 0 & 6 & 12 \\ -1 & 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$.

17.3. а) $\begin{pmatrix} 9 & 0 & 0 \\ 0 & 9 & 0 \\ 0 & 0 & 9 \end{pmatrix}$. б) $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

в) $\begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$. г) $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 & 9 \\ 0 & 0 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

17.4. а) $\begin{pmatrix} \cos n\alpha & \sin n\alpha \\ -\sin n\alpha & \cos n\alpha \end{pmatrix}$, применить метод математической индукции.

б) $\begin{pmatrix} \lambda^n & n\lambda^{n-1} \\ 0 & \lambda^n \end{pmatrix}$.

в) $\begin{pmatrix} 3n+1 & -n \\ 9n & -3n+1 \end{pmatrix}$; заметить, что первая и третья матрицы взаимно обратные, и записать степени в виде n сомножителей.

17.5. а) $\begin{pmatrix} 1 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 4 & 0 \end{pmatrix}$. б) $\begin{pmatrix} 18 & 18 & 18 \\ 18 & 18 & 18 \\ 18 & 18 & 18 \end{pmatrix}$.

17.7. $H^k = \begin{pmatrix} 0 & E \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, где E — единичная матрица размера $n-k$, если $k \leqslant n-1$, и $H^k = 0$ при $k \geqslant n$.

17.8. Представить $f(x)$ в виде

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(\lambda)}{k!}(x-\lambda)^k$$

и I в виде $I = \lambda E + H$, где H из задачи 17.7. Воспользоваться задачей 17.7.

17.10. а) $\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -4 & -1 \end{pmatrix}$. б) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 5 \\ 0 & 1 & 6 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

17.11. а) $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -4 & -2 \end{pmatrix}$.

б) $\begin{pmatrix} 0 & 1 & -1/2 & 1/3 & -1/4 & \dots & (-1)^n/(n-1) \\ 0 & 0 & 1 & -1/2 & 1/3 & \dots & (-1)^n/(n-2) \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1/2 & \dots & (-1)^n/(n-3) \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}$.

17.14. $\sum_k a_{jk} E_{ik}$.

17.15. $\sum_k a_{ki} E_{kj}$.

17.16, 17.17. Воспользоваться задачами 17.14 и 17.15.

17.18. Показать, что перестановочность матрицы A с $E + E_{ij}$, $i \neq j$, эквивалентна перестановочности A с E_{ij}. Воспользоваться задачей 17.16.

17.19. $A = 0$; после умножения A на матричную единицу E_{ji} получится матрица, у которой на главной диагонали стоит элемент a_{ij}, а остальные

элементы — нули.

17.21. Использовать задачу 17.20.

17.22. При $\lambda = 0$; использовать задачу 17.20.

17.24. $\mathrm{tr}[A, B] = 0$. Вычислить квадрат матрицы с нулевым следом.

17.25. $\begin{pmatrix} AA_1 + BC_1 & AB_1 + BD_1 \\ CA_1 + DC_1 & CB_1 + DD_1 \end{pmatrix}$.

17.26. Найти элементы главной диагонали матриц A^tA и ${}^tAA$.

17.27. Пусть $B = (b_{ij})$, где $b_{ij} = 0$ при $i > j$. По условию $b_{ij} = 0$ при $i > j$, $b_{ii} \neq 0$ для всех i и $b_{1i}b_{1j} + \ldots + b_{ii}b_{ij} = 0$ при $j \geqslant i + k$. Индукцией по i показать, что $b_{ij} = 0$.

17.28. Заметить, что $E_{ij} = [E_{ij}, E_{jj}]$ при $i \neq j$, а матрица $\mathrm{diag}(\alpha_1, \ldots$ $\ldots, \alpha_n)$ с нулевым следом равна $\sum_{i=2}^{n} \alpha_i(E_{ii} - E_{11}) = \sum_{i=2}^{n} \alpha_i[E_{i1}, E_{1i}]$.

17.29. $A = \mathrm{diag}(h_1, \ldots, h_n)$,

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ h_1 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & h_1 + h_2 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & h_1 + h_2 + h_3 & \ldots & 0 & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & \sum_{k=1}^{n-1} h_k & 0 \end{pmatrix},$$

где $h_k = (n - 2k + 1)/2$.

18.1. а) $X = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$, $Y = \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$.

б) $Y = 2X + \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, где X — произвольная матрица порядка 2.

18.3. а) $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. б) $\begin{pmatrix} 11 & 3 \\ -24 & -7 \end{pmatrix}$.

в) $\begin{pmatrix} a & b \\ 2a - 1 & 2b - 3 \end{pmatrix}$ $(a, b \in \mathbb{R})$. г) $\varnothing$. д) $\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

е) $\begin{pmatrix} 6 & 4 & 5 \\ 2 & 1 & 2 \\ 3 & 3 & 3 \end{pmatrix}$. ж) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$. з) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & \ldots & 1 \\ 0 & 1 & \ldots & 1 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & 1 \end{pmatrix}$.

и) $\begin{pmatrix} -3 & 2 & 0 \\ -4 & 5 & -2 \\ -5 & 3 & 0 \end{pmatrix}$. к) $\dfrac{1}{6}\begin{pmatrix} 9 & -1 & 5 \\ 6 & 2 & -4 \\ -9 & 3 & 3 \end{pmatrix}$.

л) $\dfrac{1}{3}\begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. м) $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \end{pmatrix}$.

н) $\frac{1}{18}\begin{pmatrix} 1 & 7 & -5 \\ 7 & -5 & 1 \\ -5 & 1 & 7 \end{pmatrix}$. о) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 4 & -2 & 4 \\ -6 & 2 & 3 \end{pmatrix}$.

18.4. Воспользоваться теоремой Кронекера–Капелли.

18.5. Элементарными преобразованиями строк расширенной матрицы $(A|B)$ привести A к ступенчатому виду.

18.6. Указать матрицу B, считая A ступенчатой.

18.8. а) $\begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. б) $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -3/2 & 1/2 \end{pmatrix}$. в) $\begin{pmatrix} -5 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$.

г) $\begin{pmatrix} 7 & -3 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$. д) $\begin{pmatrix} 1/5 & 0 & 0 \\ 0 & 1/3 & 0 \\ 0 & 0 & -1/2 \end{pmatrix}$. е) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -3 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

ж) $\begin{pmatrix} 1/6 & 0 & 0 \\ 0 & -5 & 2 \\ 0 & 3 & -1 \end{pmatrix}$. з) $\begin{pmatrix} 7 & -3 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1/7 \end{pmatrix}$. и) $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1/3 \end{pmatrix}$.

к) $\begin{pmatrix} 1/2 & 0 & 0 \\ -3/2 & 1 & -1/2 \\ 0 & 0 & 1/2 \end{pmatrix}$. л) $\begin{pmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ -\sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$.

18.9. а) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$. б) $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$. в) $\begin{pmatrix} 1/2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

г) $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1/3 \\ 0 & 1/2 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. д) $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

е) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & -1 & 1 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & 1 & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & -1 & 1 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$.

ж) $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -38 & 41 & -34 \\ 27 & -29 & 24 \end{pmatrix}$. з) $\begin{pmatrix} -8 & 29 & -11 \\ -5 & 18 & -7 \\ 1 & -3 & 1 \end{pmatrix}$.

и) $\begin{pmatrix} -7/3 & 2 & -1/3 \\ 5/3 & -1 & -1/3 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$. к) $\frac{1}{9}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & -2 \\ 2 & -2 & 1 \end{pmatrix}$.

л) $\begin{pmatrix} 22 & -6 & -26 & 17 \\ -17 & 5 & 20 & -13 \\ -1 & 0 & 2 & -1 \\ 4 & -1 & -5 & 3 \end{pmatrix}$.

18.10. а) $\begin{pmatrix} A^{-1} & 0 \\ -C^{-1}BA^{-1} & C^{-1} \end{pmatrix}$. б) $\begin{pmatrix} A^{-1} & -A^{-1}BC^{-1} \\ 0 & C^{-1} \end{pmatrix}$.

18.11. а) $\begin{pmatrix} -3 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 0 & 0 \\ 8 & -9/2 & 1 & -3/2 \\ -1 & 1/2 & 0 & 1/2 \end{pmatrix}$. б) $\begin{pmatrix} -1 & 3 & -8 & 3 \\ 1 & -2 & 4 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$.

18.13. а), б) ± 1.

18.14. ± 1.

18.15. Использовать присоединенную матрицу $\widehat{A}$.

а) $\begin{pmatrix} t^3 & -1-t \\ -1-t^2 & 1-t \end{pmatrix}$. б) $\begin{pmatrix} -1+t & 0 & 1-t \\ 0 & 2t^2 & -2t \\ -1+t & -2t & 1+t \end{pmatrix}$.

18.16. б) Заметить, что если $\det A = 0$, то система уравнений $\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j = 0$ имеет ненулевое решение.

18.17. Положив $C = (E+AB)^{-1}$, доказать, что $(E-BCA)(E+BA) = E$.

18.18. Сравнить ранги матриц AB и BA с рангами матриц A и B.

18.19. Использовать 18.4.

18.20. Использовать связь между умножением на элементарные матрицы и элементарными преобразованиями.

18.22. Пусть $A = (a_{ij})$, $B = (b_{ij})$ — матрицы порядка n с коэффициентами — многочленами от $2n^2$ неизвестных a_{ij}, b_{ij}, $1 \leqslant i, j \leqslant n$. Тогда $A^{\Lambda} = (\det A)A^{-1}$. Воспользоваться задачей 18.21 для доказательства первого равенства. Вместо неизвестных a_{ij}, b_{ij} можно подставить любые значения. Аналогично доказывать остальные равенства.

18.23. Воспользоваться задачей 11.10, е).

18.24. Пусть B_i — строка длины $n-1$, получающаяся из B выбрасыванием i-координаты. Доказать, что ${C_i}^t B_i \neq -1$ для некоторого i. Пользуясь задачей 18.22 указать минор порядка $n-1$, отличной от нуля.

19.2. а) $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 4 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

б) $(E-E_{12})(E+E_{21})(E-2E_{22})(E+E_{12})(E+E_{31})(E+E_{32})(E-3E_{33}) \times$ $\times (E+E_{13})(E+2E_{23})$; использовать задачу 17.13.

19.3. а) $\begin{pmatrix} 1 & 4 & 9 & 16 \\ 1 & 6 & 15 & 28 \\ 1 & 4 & 12 & 32 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}$. б) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 6 & 10 & 14 \\ 3 & 6 & 12 & 24 \\ 4 & 4 & 4 & 4 \end{pmatrix}$.

в) $\begin{pmatrix} -5 & 2 & 3 & 4 \\ -10 & 3 & 5 & 7 \\ -15 & 2 & 4 & 8 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$. г) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 5 & 8 & 11 \\ 3 & 6 & 10 & 16 \\ -2 & -5 & -8 & 11 \end{pmatrix}$.

19.6. Воспользоваться задачей 19.4.

19.8. Если матрицы перестановочны.

19.9. Для построения матрицы Y использовать матрицы U, V такие, что $UXV = E_{11} + \ldots + E_{rr}$.

19.12. Верно при $n \geqslant 3$.

19.14. $\{\alpha E_{1,n-1} \mid \alpha \in K\}$.

19.15. Воспользоваться формулой бинома из задачи17.6; неверно.

19.17. Если $A^n = 0$, то $\det A = 0$; далее использовать задачу 18.2.

19.19. Воспользоваться формулой суммы бесконечной геометрической прогрессии.

19.20. Использовать задачу 19.19.

19.22. См. задачи 19.17 и 19.19.

19.23. Неверно.

19.27. Использовать вычисление обратной матрицы с помощью элементарных преобразований.

19.28. Если $\det(CD) \neq 0$, то

$$\det\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \det\begin{pmatrix} D & 0 \\ 0 & c \end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} AD & BC \\ CD & DC \end{pmatrix} =$$

$$= \det\begin{pmatrix} AD & BC \\ CD & CD \end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} AD - BC & BC \\ 0 & CD \end{pmatrix} = \det(AD - BC)\det(CD).$$

В связи с этой задачей см.: *T.H. Lehagan* // Commun. Algebra. — 1981. — V. 9, № 3. — P. 267–269.

20.1. а) $1 + 18i$. б) $4i$. в) $7 + 17i$. г) $10 - 11i$. д) $14 - 5i$. е) $5 + i$. ж) $\dfrac{13}{2} - \dfrac{1}{2}i$. з) $\dfrac{11}{5} - \dfrac{27}{5}i$. и) 4. к) $52i$. л) 2. м) 1. н) -1.

20.2. $i^n = 1$ при $n = 4k$, $i^n = i$ при $n = 4k + 1$, $i^n = -1$ при $n = 4k + 2$, $i^n = -i$ при $n = 4k + 3$, где k — целое число; $i^{77} = i$; $i^{98} = -1$, $i^{-57} = -i$.

20.4. а) $z_1 = i$, $z_2 = 1 + i$. б) $z_1 = 2$, $z_2 = 1 - i$. в) $\varnothing$. г) $z_1 = \dfrac{(2+i)z_2 - i}{2}$. д) $x = 3 - 11i$, $y = -3 - 9i$, $z = 1 - 7i$.

20.5. а) $x = 2$, $y = -3$. б) $x = 3$, $y = -5$.

20.8. а) $0,\ 1,\ -\dfrac{1}{2} \pm i\dfrac{\sqrt{3}}{2}$. б) $0,\ \pm 1,\ \pm i$.

20.9. Применить индукцию по числу операций.

20.10. Применить предыдущую задачу.

20.11. а) $\pm\frac{\sqrt{2}}{2}(1+i)$. б) $\pm(2-i)$. в) $\pm(3-2i)$.
г) $z_1=1-2i$, $z_2=3i$. д) $z_1=5-2i$, $z_2=2i$. е) $z_1=5-3i$, $z_2=2+i$.

21.1. а) $5(\cos 0+i\sin 0)$. б) $\cos\frac{\pi}{2}+i\sin\frac{\pi}{2}$.
в) $2(\cos\pi+i\sin\pi)$. г) $3\left(\cos\left(-\frac{\pi}{2}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right)\right)$.
д) $\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right)$. е) $\sqrt{2}\left(\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right)$.
ж) $2\left(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}\right)$. з) $2\left(\cos\frac{2\pi}{3}+i\sin\frac{2\pi}{3}\right)$.
и) $2\left(\cos\left(-\frac{2\pi}{3}\right)+i\sin\left(-\frac{2\pi}{3}\right)\right)$. к) $2\left(\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)\right)$.
л) $2\left(\cos\frac{\pi}{6}+i\sin\frac{\pi}{6}\right)$. м) $2\left(\cos\frac{5\pi}{6}+i\sin\frac{5\pi}{6}\right)$.
н) $2\left(\cos\left(-\frac{5\pi}{6}\right)+i\sin\left(-\frac{5\pi}{6}\right)\right)$. о) $2\left(\cos\left(-\frac{\pi}{6}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)\right)$.
п) $\frac{2}{\sqrt{3}}\left(\cos\frac{\pi}{6}+i\sin\frac{\pi}{6}\right)$.
р) $2\sqrt{2+\sqrt{3}}\times\left(\cos\frac{\pi}{12}+i\sin\frac{\pi}{12}\right)$ или $(\sqrt{6}+\sqrt{2})\left(\cos\frac{\pi}{12}+i\sin\frac{\pi}{12}\right)$; для получения второго выражения для модуля применить формулу

$$\sqrt{a\pm\sqrt{b}}=\sqrt{\frac{a+\sqrt{a^2-b}}{2}}\pm\sqrt{\frac{a-\sqrt{a^2-b}}{2}}.$$

с) $2(\sqrt{2+\sqrt{3}})\times\left(\cos\left(-\frac{5\pi}{12}\right)+i\sin\left(-\frac{5\pi}{12}\right)\right)$. т) $\cos(-\alpha)+i\sin(-\alpha)$.
у) $\cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)$. ф) $\cos 2\alpha+i\sin 2\alpha$.
х) $2\cos\frac{\varphi}{2}\left(\cos\frac{\varphi}{2}+i\sin\frac{\varphi}{2}\right)$. ц) $\cos(\varphi-\psi)+i\sin(\varphi-\psi)$.

21.2. а) 2^{50}. б) 2^{150}. в) -2^{30}. г) $(2+\sqrt{3})^{12}$.
д) $-2^{12}(2-\sqrt{3})^6$. е) -2^6. ж) $2^{15}i$. з) -64.

21.3. а) $3+4i$. б) $5-12i$.

21.5. Использовать задачу 21.4.

21.6. Равенство получится, если либо $\arg z_1=\arg z_2$, либо хотя бы одно из данных чисел равно нулю; выяснить геометрический смысл числа $\min(|z_1|,|z_2|)|\arg z_1-\arg z_1|$.

21.7. Свести задачи к теореме о сумме квадратов длин диагоналей параллелограмма.

21.10. Доказать, что $z=\cos\varphi\pm i\sin\varphi$.

21.11. а) $4\cos^3 x\sin x - 4\cos x\sin^3 x$; вычислить $(\cos x + i\sin x)^4$ по формулам Муавра и бинома Ньютона.

б) $\cos^4 x - 6\cos^2 x\sin^2 x + \sin^4 x$.

в) $5\cos^4 x\sin x - 10\cos^2 x\sin^3 x + \sin^5 x$.

г) $\cos^5 x - 10\cos^3 x\sin^2 x + 5\cos x\sin^4 x$.

21.13. а) $\dfrac{1}{8}(\cos 4x - 4\cos 2x + 3)$; если $z = \cos x + i\sin x$, то $\sin x = \dfrac{z - z^{-1}}{2i}$, $z^k + z^{-k} = 2\cos kx$.

б) $\dfrac{1}{8}(\cos 4x + 4\cos 2x + 3)$. в) $\dfrac{1}{16}(\sin 5x - 5\sin 3x + 10\sin x)$.

г) $\dfrac{1}{16}(\cos 5x + 5\cos 3x + 10\cos x)$.

21.14. а) Применить указание к задаче 21.13.

22.6. Неверно: эти множества состоят из разного числа элементов.

22.7. а) $\cos\dfrac{(4k+1)\pi}{12} + i\sin\dfrac{(4k+1)\pi}{12}$ $(0 \leqslant k \leqslant 5)$.

б) $2\left[\cos\dfrac{(6k-1)\pi}{30} + i\sin\dfrac{(6k-1)\pi}{30}\right]$ $(0 \leqslant k \leqslant 9)$.

в) $\sqrt[4]{2}\left[\cos\dfrac{(8k-1)\pi}{32} + i\sin\dfrac{(8k-1)\pi}{32}\right]$ $(0 \leqslant k \leqslant 7)$.

г) $\left\{1, -\dfrac{1}{2} \pm i\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right\}$. д) $\{\pm 1, \pm 1\}$. е) $\left\{\pm 1, \pm\dfrac{1+i\sqrt{3}}{2}, \pm\dfrac{1-i\sqrt{3}}{2}\right\}$.

ж) $\left\{\dfrac{\sqrt{3}}{2} + \dfrac{1}{2}i, -\dfrac{\sqrt{3}}{2} + \dfrac{1}{2}i, -i\right\}$. з) $\{1 \pm i, -1 \pm i\}$.

и) $2\sqrt{1}$. к) $\{\pm\sqrt{2},\ \pm\sqrt{2}i,\ \pm(1+i),\ \pm(1-i)\}$.

л) $\left\{\pm i\sqrt{3}, \pm\dfrac{\sqrt{3}}{2}(\sqrt{3}+i), \pm\dfrac{\sqrt{3}}{2}(\sqrt{3}-i)\}\right\}$.

м) $\{\sqrt{3}+i, -1+i\sqrt{3}, -\sqrt{3}-i, 1-i\sqrt{3}\}$.

н) $\{3+i\sqrt{3},\ \sqrt{3}-3i,\ -3-i\sqrt{3},\ -\sqrt{3}+3i\}$.

о) $\left\{\dfrac{1}{2}\sqrt[3]{4}(i-1),\ \dfrac{\sqrt[3]{4}}{4}(1-\sqrt{3}-i(\sqrt{3}+1)),\ \dfrac{\sqrt[3]{4}}{4}(1+\sqrt{3}-i(\sqrt{3}-1))\right\}$.

п) $\left\{\dfrac{1}{2}\sqrt{2}(\sqrt{2+\sqrt{3}} - i\sqrt{2-\sqrt{3}}), -\dfrac{1}{2}\sqrt{2}(\sqrt{2-\sqrt{3}} - i\sqrt{2+\sqrt{3}}), 1-i\right\}$.

р) $\left\{\pm\left(\dfrac{3}{2} + i\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right), \pm\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2} - \dfrac{3}{2}i\right)\right\}$.

с) $\{\pm\dfrac{\sqrt{2}}{2} \pm i\dfrac{\sqrt{2}}{2}\}$. т) $\{+2i, -\sqrt{3}-i, \sqrt{3}-i\}$.

у) $\sqrt[4]{2}\left(\cos\dfrac{\pi+6k\pi}{12} + i\sin\dfrac{\pi+6k\pi}{12}\right)$, $k = 0, 1, 2, 3$.

22.8. а) $\frac{1}{4}(\sqrt{5}-1)$. б) $\frac{1}{4}\sqrt{10+2\sqrt{5}}$.

22.10. $\{\pm 1\}$; $\left\{1,\ \frac{1}{2}\pm i\frac{\sqrt{3}}{2}\right\}$; $\{\pm 1,\ \pm i\}$;

$$\left\{\pm 1,\ \pm\frac{1}{2}(1+i\sqrt{3})\pm\frac{1}{2}(1-i\sqrt{3})\right\};$$

$$\left\{\pm 1,\ \pm i,\ \pm\frac{\sqrt{2}}{2}(1+i),\ \pm\frac{\sqrt{2}}{2}(1-i)\right\};$$

$$\left\{\pm i,\ \pm\frac{1}{2}(1+i\sqrt{3})\pm\frac{1}{2}(\sqrt{3}+i),\ \pm\frac{1}{2}(\sqrt{3}-i)\right\}.$$

22.11. $(-1)^{n-1}$; все сомножители, отличные от 1 и -1, разбить на пары взаимно обратных.

22.13. Наибольший общий делитель чисел r и s может быть представлен в виде $ru+sv$.

в) Если $\alpha\in\mathbf{U}_r$, $\beta\in\mathbf{U}_s$, то $(\alpha\beta)^{rs}=1$, т.е. $\alpha\beta\in\mathbf{U}_{rs}$ и $\mathbf{U}_r\mathbf{U}_s\subseteq\mathbf{U}_{rs}$; если $\alpha_1\neq\alpha_2$ — элементы $\mathbf{U}_r$, $\beta_1\neq\beta_2$ — элементы $\mathbf{U}_s$, то $\alpha_1\beta_1\neq\alpha_2\beta_2$, в противном случае $\alpha_1\alpha_2^{-1}=\beta_1\beta_2^{-1}\in\mathbf{U}_r\cap\mathbf{U}_s$, хотя $\alpha_1\alpha_2^{-1}\neq 1$, $\mathbf{U}_r\cap\mathbf{U}_s=\{1\}$ (см. б)); поэтому $|\mathbf{U}_r\mathbf{U}_s|=rs=|\mathbf{U}_{rs}|$, так что $\mathbf{U}_{rs}=\mathbf{U}_r\mathbf{U}_s$.

22.15. ε и $\overline{\varepsilon}$ имеют одинаковые порядки.

22.16. См. задачу 22.12.

22.17. а) $-n(1-z)^{-1}$, если $z\neq 1$, и $n(n+1)/2$, если $z=1$.

б) $2(1-z)^{-1}$.

в) Число z является корнем 6-й степени из 1, и пара (n,m) совпадает с одной из пар $(2+6N,1+6M)$, $(1+6M,2+6N)$, $(5+6N,4+6M)$, $(4+6M,5+6M)$, $(2+6N,4+6M)$, $(4+6M,2+6N)$, $(1+6N,5+6M)$, $(5+6M,1+6N)$, где N,M — любые неотрицательные целые числа.

22.18. а) См. задачу 22.14. б) См. задачу 22.16.

22.19. См. задачу 22.16.

22.20. б) Каждый корень является первообразным ровно для одной степени, и поэтому данная сумма есть сумма всех корней степени n.

в), г) следует из б). д) См. задачу 22.16.

е) Рассмотреть разложение n на простые множители.

22.22. Представить z в тригонометрической форме.

22.23. а) $x-1$. б) $x+1$. в) x^2+x+1. г) x^2+1. д) x^2-x+1. е) x^4-x^2+1. ж) $x^{p-1}+x^{p-2}+\ldots+1$. з) $(x^{p^k}-1)/(x^{p^{k-1}}-1)$.

22.24. а) См. указание к задаче 22.20, б).

б) См. задачу 22.19, а), б); ε — первообразный корень степени n тогда и только тогда, когда $-\varepsilon$ — первообразный корень степени $2n$ (n нечётно).

в) Вытекает из а) и формулы обращения 5.5, б).

г) Если $\{\varepsilon_i\}$ — все первообразные корни степени d из 1, и $\{\varepsilon_{ik} \mid 1 \leqslant k \leqslant d\}$ — все значения корней степени d из ε_i, то $\{\varepsilon_{ik} \mid i=1,\ldots,\phi(k);\ k=1,\ldots,d\}$ — первообразные корни степени n.

д) См. задачу 22.19; для любого делителя d числа $m = n/p$ имеем

$$\mu\left(\frac{n}{d}\right) = \mu\left(\frac{m}{d}p\right) = \mu\left(\frac{m}{d}\right)\mu(p) = -\mu\left(\frac{m}{d}\right),$$

и все делители n получаются, если ко всем делителям m добавить их произведения на p; поэтому

$$\Phi_m(x) = \prod_{d|n}(x^d-1)^{\mu(n/d)} = \prod_{d|n}(x^d-1)^{\mu(n/d)}\prod_{d|n}(x^{pd}-1)^{\mu(m/d)} =$$
$$= \prod_{d|m}(x^d-1)^{-\mu(m/d)}\cdot\prod_{d|n}(x^{pd}-1)^{\mu(m/d)} = \frac{\Phi_m(x^p)}{\Phi_m(x)}.$$

22.25. а) $\Phi_{10}(x) = \Phi_5(-x) = x^4 - x^3 + x^2 - x + 1$.

б) $\Phi_{14}(x) = x^6 - x^5 + x^4 - x^3 + x^2 - x + 1$.

в) $\Phi_{15}(x) = \dfrac{\Phi_3(x^5)}{\Phi_3(x)} = \dfrac{x^{10}+x^5+1}{x^2+x+1} = x^8 - x^7 + x^5 - x^4 + x^3 - x + 1$.

г) $\Phi_{30}(x) = \Phi_{15}(-x) = x^8 + x^7 - x^5 - x^4 - x^3 - x + 1$.

д) $\Phi_{36}(x) = \Phi_6(x^6) = x^{12} - x^6 + 1$.

е) $\Phi_{100}(x) = \Phi_{10}(x^{10}) = x^{40} - x^{30} + x^{20} - x^{10} + 1$.

ж) $\Phi_{216}(x) = \Phi_6(x^{36}) = x^{72} - x^{36} + 1$.

з) $\Phi_{288}(x) = \Phi_6(x^{48}) = x^{96} - x^{48} + 1$.

и) $\Phi_{1000}(x) = \Phi_{10}(x^{100}) = x^{400} - x^{300} + x^{200} - x^{100} + 1$.

22.26. а), б) Следует из задачи 22.24, в); в $\Phi_n(0)$ есть произведение всех первообразных корней степени n на -1.

22.27. $\Phi_1(1) = 0$, $\Phi_{p^k}(1) = p$, p — простое число, $\Phi_n(1) = 1$ для остальных n; по задаче 22.24, г),д)

$$\Phi_{p_1^{k_1}\ldots p_s^{k_s}}(1) = \Phi_{p_1\ldots p_s}(1) = \frac{\Phi_{p_2\ldots p_s}(1)}{\Phi_{p_2\ldots p_s}(1)} = 1;$$

далее см. задачу 22.23, з).

23.1. а) $2^{n/2}\cos\dfrac{n\pi}{4}$. Вычислить $(1+i)^n$ по формуле бинома Ньютона и по формуле Муавра.

б) $2^{n/2}\sin\dfrac{n\pi}{4}$.

в) $\dfrac{1}{2}(2^{n-1} + 2^{n/2}\cos\dfrac{n\pi}{4})$; использовать а) и равенства $\sum_{k=0}^n\binom{n}{k} = 2^n$; $\sum_{k=0}^n(-1)^k\binom{n}{k} = 0$.

г) $\dfrac{1}{2}(2^{n-1} + 2^{n/2}\sin\dfrac{n\pi}{4})$.

д) $-\dfrac{n}{1-\varepsilon}$ при $\varepsilon \neq 1$; $\dfrac{n(n+1)}{2}$ при $\varepsilon = 1$. При $\varepsilon \neq 1$ умножить данную сумму на $1-\varepsilon$.

23.2. Левая и правая части равенств а) и б) равны вещественной и мнимой частям суммы $z + \ldots + z^n = z\dfrac{z^n-1}{z-1}$, где $z = \cos x + i \sin x$.

в), г) Аналогично а) и б).

е) разложить левую часть в произведение $(x-\varepsilon_1)\ldots(x-\varepsilon_{2n})$ и объединить множители $x-\varepsilon_i$ и $x-\varepsilon_{n-i} = x-\overline{\varepsilon}_i$.

з) Равенства в задачах е), ж) сократить соответственно на x^2-1 и на $x-1$ и в полученных равенствах положить $x=1$.

23.3. $x_k = -\left[\sin\dfrac{(2k+1)\pi-2\varphi}{2n}\right]\left[\sin\dfrac{(2k+1)\pi-2\varphi-2n\alpha}{2n}\right]^{-1}$, $k = 0, 1, \ldots, n-1$. Если $z = \cos\varphi + i\sin\varphi$, $t = \cos\alpha + i\sin\alpha$, то $2\cos\varphi = z + z^{-1}$; $2\cos(\varphi + k\alpha) = zt^k + z^{-1}t^{-k}$, и поэтому $t(1+zx)^n + t^{-1}(1+z^{-1}x)^n = 0$.

23.4. г) Использовать задачу 4.12.

23.5. а) $2^n \cos^n \dfrac{x}{2} \cos\dfrac{n+2}{2}x$.

б) $2^n \cos^n \dfrac{x}{2} \sin\dfrac{n+2}{2}x$.

в) $\dfrac{n}{2} - \dfrac{\sin 4nx}{4\sin 2x}$.

г) $\dfrac{(n+1)\sin nx - n\cos(n+1)x - 1}{4\sin^2(x/2)}$.

д) $\dfrac{(n+1)\sin nx - n\sin(m+1)x}{4\sin^2(x/2)}$.

23.7. Как в задачах 4.12 и 23.4, г) $\dfrac{\sin mx}{\sin x}$ — многочлен степени $\dfrac{m-1}{2}$ от $\sin^2 x$ со старшим коэффициентом $(-4)^{(m-1)/2}$, корнями которого являются $\sin^2(2\pi j/m)$, где $j = 1, 2, \ldots, \dfrac{m-1}{2}$.

24.2. а) $\pm\dfrac{1}{2} \pm \dfrac{1}{2}i$. б) -1, $\dfrac{1}{2} \pm i\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

в) $4+i\sqrt{3}$, $3+2i\sqrt{3}$, $1+2i\sqrt{3}$, $i\sqrt{3}$, 1, 3.

24.3. Расстояние между точками, соответствующее данным числам.

24.4. а) Вершины правильного треугольника с центром 0.

б) Вершины ромба с центром 0.

24.6. а) Окружность радиуса 1 с центром в начале координат.

б) Луч, выходящий из начала координат и образующий угол $\pi/3$ с положительной вещественной полуосью.

в) Круг радиуса 2 с центром в начале координат, включая границу.

г) Внутренность круга радиуса 1 с центром в точке $1+i$.

д) Круг радиуса 5 с центом в точке $-3-4i$, включая границу.

е) Внутренность кольца, заключенного между окружностями радиусов 2 и 3 и с центром в начале координат.

ж) Кольцо, заключенное между окружностями радиусов 1 и 2 с центром в точке $2i$, причём окружность радиуса 1 включается, а радиуса 2 не включается.

з) Внутренность угла, содержащего положительную вещественную полуось и образованного лучами, выходящими из начала координат под углами $-\pi/6$ и $\pi/6$ к этой полуоси.

и) Полоса, заключенная между прямыми $x = \pm 1$, включая эти прямые.

к) Внутренность полосы, заключённой между $y = 1$ и вещественной осью.

л) Две прямых $y = \pm 1$.

м) Внутренность полосы, заключённой между прямыми $x + y = \pm 1$.

н) Эллипс $\dfrac{4x^2}{9} + \dfrac{4y^2}{5} = 1$.

о) Гипербола $\dfrac{4x^2}{9} - \dfrac{4y^2}{7} = 1$.

п) Парабола $y^2 = 8x$.

р) Внутренность угла с вершиной z_0, стороны которого образуют с положительным направлением вещественной оси углы α и β.

24.7. Сумма квадратов диагоналей параллелограмма равна сумме квадратов его сторон. Положить $z_1 = x_1 + y_1 i$, $z_2 = x_2 + y_2 i$ или истолковать квадрат модуля комплексного числа как скалярный квадрат вектора, соответствующего этому числу.

24.8. $z_4 = z_1 - z_2 + z_3$.

24.9. $\dfrac{z+w}{2} \pm i\dfrac{z-w}{2}$.

24.10. $z_k = c + (z_0 - c)\left(\cos\dfrac{2\pi k}{n} + i\sin\dfrac{2\pi k}{n}\right)$ $(k = 0, 1, 2, \ldots, n-1)$, где $c = \dfrac{1}{2}(z_0 + z_1) \pm \dfrac{1}{2} i \operatorname{ctg}\dfrac{\pi}{n}(z_1 - z_0)$ — центр многоугольника.

24.11. Окружность радиуса 1 с центром в начале координат, исключая точку $z = -1$; положить $t = \operatorname{tg}(\varphi/2)$, $-\pi < \varphi < \pi$.

24.12. а) При доказательстве необходимости убедиться, что векторы $z_3 - z$ и $z_3 - z_2$ коллинеарны; для доказательства достаточности из данного равенства вычесть равенство $(\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3)z_1 = 0$. б) Использовать предыдущую задачу.

24.13. При $\lambda \neq 1$ — окружность с концами диаметра в точках $\dfrac{z_1 + \lambda z_2}{1+\lambda}$ и $\dfrac{z_1 - \lambda z_2}{1-\lambda}$; при $\lambda = 1$ — прямая, проходящая через середину отрезка с

концами z_1, z_2 и перпендикулярная этому отрезку.

24.14. $\sqrt{13}-1$.

24.15. $1+3\sqrt{5}$.

24.16. Искомая кривая состоит из точек, для каждой из которых произведение расстояний этой точки от точек $z=\pm 1$ равно λ. Эти кривые называются *лемнискатами.* При $\lambda=1$ получим *лемнискату Бернулли*, имеющую в полярных координатах уравнение $r^2=2\cos 2\varphi$; при $\lambda<1$ показать, что кривая не имеет точек на мнимой оси.

24.24, 24.25. *Картан А.* Элементарная теория аналитических функций одного и нескольких комплексных переменных. — М.: ИЛ, 1961. — Гл. VI, § 3, п. 5 и 6.

24.26. $a=0$. Рассмотрим образ U при отображении $z\to 1+az$.

25.1. а) $2x^2+3x+11$, $25x-5$. б) $(3x-7)/9$, $-(26x+2)/9$.

25.2. а) $x+1$. б) x^3-x+1. в) x^3+x^2+2. г) 1. д) x^2+1. е) x^3+1. ж) x^2-2x+2. з) $x+3$. и) x^2+x+1. к) $x^2-2\sqrt{2}x-1$. л) 1.

25.3. а) $d=x^2-2=-(x+1)f+(x+2)g$.

б) $d=1=xf-(3x^2+x-1)g$.

25.4. а) Переходя от f и g к fd^{-1} и gd^{-1}, можно считать, что $d=1$. Пусть $1=fw+gh$, в качестве u взять остаток от деления w на g.

б) Сравнить степени gv и $d-fu$.

в) Использовать взаимную простоту u и v.

25.5. а) $u(x)=(-16x^2+37x+26)/3$, $v(x)=(16x^3-53x^2-37x+23)/3$.

б) $u(x)=4-3x$, $v(x)=1+2x+3x^2$.

в) $u(x)=35-84x+70x^2-20x^3$, $v(x)=1+4x+10x^2+20x^3$.

25.6. Пусть $P_{r,s}(x)=1+\dfrac{r}{1!}x+\dfrac{r(r+1)}{2!}x^2+\ldots+\dfrac{r(r+1)\ldots(r+s-1)}{s!}x^s$. Тогда $u(x)=P_{m,n-1}(1-x)$, $v(x)=P_{n,m-1}(x)$.

25.7. а) $x^2+x+1=(x+1)f+x^2g$. б) $x+1=xf+(x^2+1)g$.

в) $1=(x+1)f+x^2g$. г) $1=(x^3+x)f+(x^4+x+1)g$.

25.8. а) $(x-1)^3(x+3)^3(x-3)$.б) $(x-2)(x^2-2x+2)^2$. в) $(x+1)^4(x-4)$. г) $(x+1)^4(x-2)^2$. д) $(x^3-x^2-x-2)^2$.

е) $(x^2+1)^2(x-1)^3$. ж) $(x^4+x^3+2x^2+x+1)^2$.

26.1. а) $f(x)=(x-1)(x^3-x^2+3x-3)+5$, $f(x_0)=5$.

б) $f(x)=(x+3)(2x^4-6x^3+13x^2-39x+109)-327$, $f(x_0)=-327$.

в) $f(x)=(x-2)(3x^4+7x^3+14x^2+9x+5)$, $f(x_0)=0$.

г) $f(x)=(x+2)(x^3-5x^2+2)+1$, $f(x_0)=1$, $f(x_0)=1$.

д) $f(x)=(x-1)^5+5(x-1)^4+10(x-1)^3+10(x-1)^2+5(x-1)+1$, $f(x_0)=1$.

е) $f(x)=(x+1)^4-2(x+1)^3-3(x+1)^3-3(x+1)^2+4(x+1)+1,\ f(x_0)=1.$

ж) $f(x)=(x-2)^4-18(x-2)+38,\ f(x_0)=38.$

з) $f(x)=(x+i)^4-2i(x+i)^3-(1+i)(x+i)^2-5(x+i)+7+5i,\ f(x_0)=7+5i.$

и) $f(x)=(x+1-2i)^4-(x+1-2i)^3+2(x+1-2i)+1,\ f(x_0)=1.$

26.2. а) $f(2)=18,\ f'(2)=48,\ f''(2)=124,\ f'''(2)=216,\ f^{\mathrm{IV}}(2)=240,\ f^{\mathrm{V}}(2)=120.$

б) $f(1+2i)=-12-2i,\quad f'(1+2i)=-16+8i,\quad f''(1+2i)=-8+30i,\ f'''(1+2i)=24+30i,\quad f^{\mathrm{IV}}(1+2i)=24.$

в) $f(-2)=8,\quad f'(-2)=2,\quad f''(-2)=12,\quad f'''(-2)=-24,\quad f^{\mathrm{IV}}(-2)=24.$

26.3. а) 3. б) 4. в) 2. г) 3.

26.4. -5.

26.5. $a=n,\quad b=-(n+1).$

26.6. $3125b^2+108a^5=0,\quad a\neq 0.$

26.8. Вычислить производную.

26.9. Индукция по k.

26.10. Если k — кратность a как корня $f'''(x)$, то кратность равна $k+3$.

26.11. Индукция по степени многочлена.

26.12. Показать, что если x_0 — корень кратности k, то $f(x_0)\neq 0$ и x_0 — корень кратности $k+1$ полинома $f(x)f'(x_0)-f(x_0)f'(x)$ степени не выше n.

26.13. Индукция по r. Рассмотреть многочлен $xf'(x)$.

26.14. а) Использовать 26.13.

б) Доказать, что для любых чисел $b_0,\ldots,b_{k-1}$ существуют такие многочлены $g_i(n)$ степени не выше s_i-1, что

$$b_n=\sum_{i=1}^{m} g_i(n)a_i^n,\quad n=0,\ldots,k-1.$$

27.1. а) $(x-1)(x-2)(x-3)$.

б) $(x-1-i)(x-1+i)(x+1-i)(x+1+i)$.

в) $(x-i\sqrt{3})(x+i\sqrt{3})\times$

$$\times\left(x-\frac{3}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)\left(x-\frac{3}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)\left(x+\frac{3}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)\left(x+\frac{3}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right).$$

г) $\displaystyle\prod_{\substack{k=1\\(k,3)=1}}^{3n-1}\left(x-\cos\frac{2\pi k}{3n}-i\sin\frac{2\pi k}{3n}\right).$

д) $\displaystyle 2^{n-1}\prod_{k=1}^{n}\left(x-\cos\frac{(2k-1)\pi}{2n}\right).$

27.2. а) $(x^2+3)(x^2+x+3)(x^2-3x+3)$.

б) $\left(x^2+2x+1+\sqrt{2}+2(x+1)\sqrt{\dfrac{\sqrt{2}+1}{2}}\right)\times$

$$\times\left(x^2+2x+1+\sqrt{2}-2(x+1)\sqrt{\dfrac{\sqrt{2}+1}{2}}\right).$$

в) $(x^2-x\sqrt{a+2}+1)(x^2+x\sqrt{a+2}+1)$.

г) $\prod_{k=0}^{n-1}(x^2-2x\cos\dfrac{(3k+1)2\pi}{3n}+1)$.

д) $(x^2-2x\cos\dfrac{\pi}{9}+1)(x^2+2x\cos\dfrac{2\pi}{9}+1)(x^2+2x\cos\dfrac{4\pi}{9}+1)$.

е) $(x^2+x\sqrt{2}+1)(x^2-x\sqrt{2}+1)(x^2+x\sqrt{2+\sqrt{2}}+1)\times$
$\times(x^2-x\sqrt{2+\sqrt{2}}+1)(x^2+x\sqrt{2-\sqrt{2}}+1)(x^2-x\sqrt{2-\sqrt{2}}+1)$.

27.3. а) $(x-1)^2(x-2)(x-3)(x-1-i)$.

б) $(x-i)^2(x+1+i)$.

27.4. а) $(x-1)^2(x-2)(x-3)(x^2-2x+2)$.

б) $(x^2+1)^2(x^2+2x+2)$.

27.5. Корни многочлена x^2+x+1, т.е. корни из 1 степени 3, отличные от 1, являются корнями многочлена $x^{3m}+x^{3n+1}+x^{3p+2}$.

27.6. Числа m, n, p должны иметь одинаковую чётность.

27.7. При $m=6k+1$; записать условие того, чтобы корни многочлена x^2+x+1 были не менее чем двукратными корнями многочлена $(x+1)^m-x^m-1$.

27.8. а) $(x-1)^2(x+2)$. б) $(x+1)^2(x^2+1)$. в) $x^{(m,n)}-1$.

г) $x^{(m,n)}+1$, если $\dfrac{m}{(m,n)}$ и $\dfrac{n}{(m,n)}$ — нечётные числа, и 1 — в противном случае.

27.9. Доказать, что $f(1)=0$.

27.10. Индукция по степени $f(x)$. Рассмотреть $\dfrac{d}{dx}f(x^n)$.

27.11. Разделить $f_1(x^3)$ и $f_2(x')$ с остатком на x^2+x+1.

27.12. Заметить, что $f(x)=g(x)^2h(x)$, где $h(x)$ не имеет вещественных корней. Показать, что $[u(x)^2+v(x)^2](x^2+px+q)$ — сумма квадратов, если x^2+px+q не имеет вещественных корней.

27.13, 27.14. См. *Lang S.* // Bull. Amer. Math. Soc. — 1990. — V. 23, № 1. — С. 38–39.

28.1. в) Сделав замену $x=y-m$, свести к утверждению б).

28.2. а) 2. б) -3. в) -3, $1/2$. г) $5/2$, $-3/4$.

д) $1/2$, $-2/3$, $3/4$. е) Рациональных корней нет.

ж) $-1/2$ кратности два. з) $1/2$.

28.3. Пусть m — целый корень $f(x)$. Тогда $f(x)=(x-m)g(x)$. Отсюда $f(0)=-mg(0)$, т.е. m нечётно. Аналогично $f(1)=(1-m)g(1)$, т.е. $1-m$ нечётно, что неверно.

28.4. Если многочлен $f \in \mathbb{Q}[x]$ неприводим над $\mathbb{Q}$, то $(f, f') = 1$.

28.7. Заметим, что многочлен $f(x)$ примитивен. Если $f(x)$ имеет рациональный корень r, то по задаче 28.6 в $\mathbb{Z}[x]$ получаем $f(x) = (ax - b)g(x)$, где $a, b \in \mathbb{Z}$, $(a, b) = 1$, $r = a^{-1}b$, и $g(x) \in \mathbb{Z}[x]$. По условию $ax_1 - b$, $ax_2 - b = \pm 1$ и $a(x_1 - x_2) = \pm 2$. Следовательно, либо $a = \pm 2$, $x_1 - x_2 = \pm 1$ либо $a = \pm 1$, $x_1 - x_2 = \pm 2$. Во всех случаях $x_i - a^{-1}b = \pm a^{-1}$.

28.8. Предположив, что коэффициенты произведения делятся на простое число p, сделать редукцию по модулю p.

28.9. а), б) Воспользоваться задачей 28.8.

в) Пусть $x^{105} - 9 = f(x)g(x)$, где $f(x), g(x) \in \mathbb{Q}[x]$ и $a = \sqrt[105]{9}$; тогда

$$f(x) = (x - \alpha_1 a) \ldots (x - \alpha_k a) \quad (\alpha_i^{105} = 1), \qquad |f(0)| = a^k |\alpha_1 \ldots \alpha_k| = a^k \in \mathbb{Q};$$

при $k < n$ получаем противоречие.

г) Сделать замену $y = x - 1$.

д) Если $f = gh$, где $g, h \in \mathbb{Z}[x]$, то при любом $i = 1, \ldots, n$ имеем $g(a_i)h(a_i) = -1$; отсюда $g(a_i) + h(a_i) = 0$, и если степени многочленов g и h меньше n, то $g + h = 0$, так что $f = -g^2$.

е) Пусть $f(x) = g(x)h(x)$, где $g(x), h(x) \in \mathbb{Z}[x]$. Можно считать, что $g(x)$, $h(x)$ принимают положительные значения. Тогда $g(a_i) = h(a_i) = 1$ для всех i. Поэтому можно предполагать, что степени $g(x)$ и $h(x)$ равны n, т.е. $g(x) = 1 + b(x - a_1) \ldots (x - a_n)$, $h(x) = 1 + c(x - a_1) \ldots (x - a_n)$, где $b = c = \pm 1$. Но тогда $g(x)h(x) \neq f(x)$.

28.10, 28.11. См.: *Selmer E.S.* // Math. Scand. — 1956. — V. 4. — P. 287–302.

28.12. См.: *Tverberg H.* // Math. Scand. — 1960. — V. 8. — P. 121–126.

28.13. См.: *Ljunggren W.* // Math. Scand. — 1960. — V. 8. — P. 65–70.

28.14. Если множество таких чисел p конечно, то $a_0 \neq 0$, и пусть c — число, делящееся на все эти простые числа. Тогда $f(a_0 c) = a_0 r$, где $r \equiv 1 \pmod{c}$ и (при надлежащем выборе c) $r \neq \pm 1$; поэтому $f(x)$ имеет корень в поле вычетов по модулю любого простого делителя r, что противоречит выбору c.

28.15. Заметить, что все элементы поля F являются корнями многочлена $x^q - x$.

28.16. Рассмотреть сначала случай отображения h, принимающего значения 1 в одной точке из F^n, а в остальных точках — значение 0.

28.17. См. статьи из задач 28.12 и 28.13.

28.18 – 28.20. См. статью из задачи 28.10.

28.21. См.: *Perron O.L.* // J. reine angew Math. — 1907. — V. 132. — P. 288–307.

28.22. а) x, $x+1$, x^2+x+1, x^3+x^2+1, x^3+x+1, x^4+x^3+1, x^4+x+1, $x^4+x^3+x^2+x+1$.

б) x^2+1, x^2+x+2, x^2+2x+2. Многочлен степени 4 неприводим тогда и только тогда, когда он не имеет корней в данном поле и не является произведением двух неприводимых многочленов второй степени.

в) 6. г) 8 и 18.

28.23. $\dfrac{q(q-1)}{q}$ и $\dfrac{q(q-1)(q-2)}{3}$.

28.24. Группа $\mathbf{Z}_p^*$ является циклической порядка $p-1$. Поэтому в $\mathbf{Z}_p^*$ имеется подгруппа порядка d. Все образующие этой группы являются корнями $\Phi_d(x)$.

28.25. Пусть $f(x) = f(x+k)$ для некоторого $1 \leqslant k \leqslant p-1$. Тогда $f(x) = f(x+kl)$ для всех $l \in \mathbb{Z}$. Но элементы kl пробегают все поле $\mathbf{Z}_p$.

28.26. Пусть $H(x) = x^p - x - a = f(x)g(x)$, где $f(x) \in \mathbf{Z}_p[x]$ неприводим. Заметим, что $H(x) = H(x+k)$ для всех $k \in \mathbf{Z}_p$. Поэтому $f(x)g(x) = f(x+k)g(x+k)$. Воспользоваться задачей 28.25 и факториальностью кольца $\mathbf{Z}_p[x]$.

28.27. См.: *Ленг С.* Алгебра. — М.: Мир, 1965. — С. 245.

28.28. $x = b(a-1)^{-1}$.

28.29, 28.30. См.: *Лидл Р.*, *Нидеррайтер Г.* Конечные поля. Т. 1. — М.: Мир, 1988. — Гл. 3, § 5.

28.31. $a = 0$ и 36. Разложить по степеням $x - a$.

28.32 – 28.34. См.: *Берлекэмп Э.* Алгебраическая теория кодирования. — М.: Мир, 1971. — Гл. 3, п. 3.

29.1. а) $\dfrac{1}{12(x-1)} - \dfrac{4}{3(x+2)} + \dfrac{9}{4(x+3)}$.

б) $-\dfrac{1}{16}\left(\dfrac{1+i}{x-1-i} + \dfrac{1-i}{x-1+i} + \dfrac{-1+i}{x+1-i} + \dfrac{-1+i}{x+1+i}\right)$.

в) $\dfrac{1}{4(x-1)^2} - \dfrac{1}{4(x+1)^2}$.

г) $\dfrac{3}{(x-1)^3} - \dfrac{4}{(x-1)^2} + \dfrac{1}{x-1} - \dfrac{1}{(x+1)^2} - \dfrac{2}{x+1} + \dfrac{1}{x-2}$.

д) $-\dfrac{1}{6(x-1)} + \dfrac{1}{2(x-2)} - \dfrac{1}{2(x-3)} + \dfrac{1}{6(x-4)}$.

е) $-\dfrac{2}{(x-1)} + \dfrac{-2+i}{2(x-i)} - \dfrac{2+i}{2(x+i)}$.

ж) $-\dfrac{1}{4(x-1)} - \dfrac{1}{4(x+1)} - \dfrac{i}{4(x-i)} + \dfrac{i}{4(x+i)}$.

з) $\dfrac{1}{3}\left(-\dfrac{1}{(x-1)} + \dfrac{\varepsilon}{x-\varepsilon} + \dfrac{\varepsilon^2}{x-\varepsilon^2}\right)$, $\varepsilon = -\dfrac{1}{2} + \dfrac{i\sqrt{3}}{2}$.

и) $\sum\limits_{k=-n}^{n} \dfrac{(-1)^{n-k}\binom{n}{k}}{x-k}$.

к) $\dfrac{1}{4(x+1)} - \dfrac{1}{4(x-1)} + \dfrac{1}{4(x-1)^2} + \dfrac{1}{4(x+1)^2}$.

л) $\dfrac{1}{n}\sum\limits_{k=0}^{n-1} \dfrac{\varepsilon_k}{x-\varepsilon_k}$, $\varepsilon_k = \cos\dfrac{2\pi k}{n} + i\sin\dfrac{2\pi k}{n}$.

29.2. а) $-\dfrac{1}{8(x-2)} - \dfrac{1}{8(x+2)} + \dfrac{1}{2(x^2+4)}$.

б) $\dfrac{1}{8}\left(-\dfrac{x+2}{x^2+2x+2} - \dfrac{x-2}{x^2-2x+2}\right)$.

в) $-\dfrac{1}{4(x+1)} + \dfrac{x-1}{4(x^2+1)} + \dfrac{x+1}{2(x^2+1)^2}$.

г) $\dfrac{1}{16(x-1)^2} - \dfrac{3}{16(x-1)} + \dfrac{1}{16(x+1)^2} + \dfrac{3}{16(x+1)} + \dfrac{1}{4(x^2+1)} + \dfrac{1}{4(x^2+1)^2}$.

д) $\dfrac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n}(-1)^{k-1}\dfrac{\sin\dfrac{2k-1}{2nz}\pi}{x-\cos\dfrac{2k-1}{2n}\pi}$.

е) $\sum\limits_{i=1}^{n} \dfrac{1}{f'(x_i)(x-x_i)}$ $(x_1, \ldots, x_n$ — корни $f(x))$.

ж) $\dfrac{1}{3(x-1)} - \dfrac{x+2}{3(x^2+x+1)}$.

з) $\dfrac{1}{18}\left(\dfrac{1}{x^2+3x+3} + \dfrac{1}{x^2-3x+3} - \dfrac{2}{x^2+3}\right)$.

и) $-\dfrac{1}{x} + \dfrac{7}{x+1} + \dfrac{3}{(x+1)^2} - \dfrac{6x+2}{x^2+x+1} - \dfrac{3x+2}{(x^2+x+1)^2}$.

к) $\dfrac{1}{16(x-1)^2} - \dfrac{3}{16(x-1)} + \dfrac{3}{16(x+1)} + \dfrac{1}{4(x^2+1)} + \dfrac{1}{4(x^2+1)^2} + \dfrac{1}{16(x+1)^2}$.

л) $\dfrac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{\cos\dfrac{(2k-1)m\pi}{n} - x\cos\dfrac{(2k-1)(2m+1)}{2n}\pi}{x^2 - 2x\cos\dfrac{(2k-1)}{2n}\pi + 1}$.

29.3. $-\sum\limits_{a=0}^{p-1} \dfrac{1}{x-a}$.

29.5. Использовать задачу 29.4.

30.1. а) $-x^4 + 4x^3 - x^2 - 7x + 5$. б) $x^3 - 9x^2 + 21x - 8$.

30.5. $f(0) = \dfrac{1}{n}(y_1 + \ldots + y_n)$.

30.6. Путем замены переменной свести задачу к случаю, когда $x_1, \ldots, x_n$ — корни степени n из 1, а $x_0 = 0$; затем воспользоваться задачей 30.5.

30.7. а) Свести к задаче 30.5 для многочлена x^{s+1}.

б) Свести к задаче 30.5 для многочлена $x^n - f(x)$.

30.8. $f(x) = 1 - \dfrac{2x}{1} + \dfrac{2x(2x-2)}{12} + \ldots + \dfrac{2x(2x-2)\ldots(2x-4n+2)}{(2n)!}(-1)^n$.

30.9. $f(x) = x^{p-2}$.

30.11, 30.12. *Лидл Р., Нидеррайтер Г.* Конечные поля. Т. 2 — М.: Мир, 1988. — Гл. 7, § 3.

31.1. а) $x^4 + 4x^3 - 7x^2 - 22x + 24$.

б) $x^4 + (3-i)x^3 + (3-3i)x^2 + (1-3i)x - i$.

в) $x^4 - 3x^3 + 2x^2 + 2x - 4$.

г) $x^4 - 19x^2 - 6x + 72$.

31.2. а) $2/3$ и $-2/3$. б) a^2 и $(-1)^n b$.

31.3. а) 0. б) -1.

31.4. $\sigma_i = 0$ при $i < n$ и $\sigma_n = (-1)^{n+1}$.

31.5. $\lambda = \pm 6$.

31.6. $\lambda = -3$.

31.7. $q^3 + pq + q = 0$.

31.8. Вычислить по формуле Виета произведение корней многочлена $x^{p-1} - 1$ над полем вычетов по модулю p.

31.9. а) $\sigma_1\sigma_2 - 3\sigma_3$. б) $\sigma_1^4 - 4\sigma_1^2\sigma_2 + 8\sigma_1\sigma_3$.

в) $\sigma_1^2\sigma_4 + \sigma_3^2 - 4\sigma_2\sigma_4$. г) $\sigma_1^3 - 4\sigma_1\sigma_2 + 8\sigma_3$.

д) $\sigma_1\sigma_2 - \sigma_3 + \sigma_1^2 + \sigma_2 + 2\sigma_1 + 1$. е) $\sigma_3^2 + \sigma_1^2\sigma_3 - 2\sigma_2\sigma_3 + \sigma_2^2 - 2\sigma_1\sigma_3 + \sigma_3$.

ж) $3\sigma_1^3 - 9\sigma_1\sigma_2 + 27\sigma_3$. з) $\sigma_1\sigma_2\sigma_3 - \sigma_1^2\sigma_4 - \sigma_3^2$.

и) $\sigma_1^3\sigma_2^2 - 2\sigma_1^4\sigma_3 - 3\sigma_1\sigma_2^3 + 6\sigma_1^2\sigma_2\sigma_3 + 3\sigma_2^2\sigma_3 - 7\sigma_1\sigma_3^2$.

к) $\sigma_1^3 - 4\sigma_1\sigma_2 + 8\sigma_3$. л) $\sigma_1^2 - 2\sigma_2$.

м) $\sigma_1^3 - 3\sigma_1\sigma_2 + 3\sigma_3$. н) $\sigma_1\sigma_3 - 4\sigma_4$.

о) $\sigma_2^2 - 2\sigma_1\sigma_3 + 2\sigma_4$. п) $\sigma_1^2\sigma_3 - 2\sigma_2\sigma_3 - \sigma_1\sigma_4 + 5\sigma_5$.

р) $\sigma_1\sigma_2^2 - 2\sigma_1^2\sigma_3 - \sigma_2\sigma_3 + 5\sigma_1\sigma_4 - 5\sigma_5$.

31.10. а) -35. б) 16. в) $a_1^2a_2^2 - 4a_1^3 - 4a_2^3 + 18a_1a_2a_3 - 27a_3^2$.

г) $25/27$. д) $35/27$. е) $-1679/625$.

31.12. Воспользоваться тем, что $\sigma_{ki} = \sigma_k - x_i\sigma_{k-1,i}$.

31.14. $\dfrac{d}{dt}(\ln\lambda_t) = \sum_i \dfrac{x_i}{1 + x_i t} = \sum_i (1 - x_i t + x_i^2 t^2 + \ldots) = s_1 - s_2 + \ldots$

31.15. $\dfrac{d}{dt}(\ln\lambda_t) = \dfrac{\lambda_t'}{\lambda_t} = \dfrac{\sigma_1 + 2\sigma_2 t + \ldots + n\sigma_n t^{n-1}}{1 + \sigma_1 t + \ldots + \sigma_n t^n}$. Отсюда по задаче 31.14

$$(1 + \sigma_1 t + \ldots + \sigma_n t^n)(s_1 - s_2 t + \ldots) = \sigma_1 + 2\sigma_2 t + \ldots + n\sigma_n t^{n-1}.$$

Сравнить коэффициенты при одинаковых степенях t.

31.16. Воспользоваться задачей 31.15.

31.18. $\dfrac{\varphi(n)}{\varphi\left(\dfrac{n}{d}\right)}\mu\left(\dfrac{n}{d}\right)$, где $d = (m, n)$.

31.19. $s_1 = -1$, $s_2 = \ldots = s_n = 0$.

31.20. $s_1 = \ldots = s_{n-1} = 0$, $s_n = n$.

31.21. а) $x_1 = 2$, $x_2 = -1 + i\sqrt{3}$, $x_3 = -1 - i\sqrt{3}$ с точностью до перестановки.

б) $x_1 = 1$, $x_2 = 1$, $x_3 = -2$ с точностью до перестановки.

31.24. Представить $f(x)$ в виде произведения линейных множителей и воспользоваться задачей 31.23.

31.25. $x^3 - 3x^2 + 2x - 1$.

31.26. $x^4 - 4x^3 + 10x^2 - x + 9$.

31.27. а) Проверить, что $f(x_1, \ldots, x_n)$ делится на $x_i - x_j$ для всех $1 \leqslant i < j \leqslant n$.

б) вытекает из а)

31.28. б) Рассмотреть произведение

$$\Big[\sum_{r\geqslant 0} h_r t^r (-1)^r\Big](1 + x_1 t)\ldots(1 + x_n t)$$

и использовать а).

в) Использовать б).

31.31. См.: *Макдональд И.* Симметрические функции и многочлены Холла. — М.: Мир, 1985. — Гл. I, § 3.

31.32. Там же, гл. I, § 4.

31.33. Там же, гл. I, § 5.

32.1. а) -7. б) 243. в) 0. г) -59. д) 4854.

32.2. а) 3 и -1. б) $\pm i\sqrt{2}$ и $\pm 2i\sqrt{3}$. в) 1 и $\pm\sqrt{2}$.

32.3. а) $y^6 - 4y^4 + 3y^2 - 12y + 12 = 0$.

б) $5y^5 - 7y^4 + 6y^3 - 2y^2 - y - 1 = 0$.

в) $x_1 = 1$, $x_2 = 2$, $x_3 = 0$, $x_4 = -2$; $y_1 = 2$, $y_2 = 3$, $y_3 = -1$, $y_4 = 1$.

г) $x_1 = 0$, $x_2 = 3$, $x_3 = 2$, $x_4 = 2$; $y_1 = 1$, $y_2 = 0$, $y_3 = 2$, $y_4 = -1$.

д) $x_1 = x_2 = 1$, $x_3 = -1$, $x_4 = 2$; $y_1 = y_2 = -1$, $y_3 = 1$, $y_4 = 2$.

32.4. Если $f = a_0(x - x_1)\ldots(x - x_n)$ и g_1, g_2 имеют степени m и k, то

$$R(f, g_1 g_2) = a_0^{m-k} g_1(x_1) g_2(x_1)\ldots g_1(x_n) g_2(x_n) = R(f, g_1) R(f, g_2).$$

32.5. Рассмотреть случай $n > 2$ и m не делится на n. Тогда

$$R(\Phi_n, x^m - 1) = p^{\varphi(n)/\varphi(n_1)},$$

если $n_1 = n/d = p^\lambda$. В остальных случаях результат равен 1.

32.6. $R(\Phi_m, \Phi_n) = 0$ при $m = n$; $R(\Phi_m, \Phi_n) = p^{\varphi(n)}$ при $m = np^\lambda$ и $R(\Phi_m, \Phi_n) = 1$ в остальных случаях, если $m \geqslant n$.

32.7. а) $b^2 - 4ac$. б) $-27q^2 - 4p^3$.

в) $-27a_3^2 + 18a_1a_2a_3 - 4a_1^3a_3 - 4a_2^3 + a_1^2a_2^2$.

г) 2777. д) 725.

32.8. а) ± 2. б) $\left\{3, 3\left(-\frac{1}{2} \pm i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\right\}$.

в) $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = -3$, $\lambda_3 = 125$.

г) $\lambda_1 = -1$, $\lambda_2 = -\frac{3}{2}$, $\lambda_{3,4} = \frac{7}{2} \pm \frac{9}{2}i\sqrt{3}$.

32.9. Воспользоваться разложением $f = a_0(x - x_1) \ldots (x - x_n)$.

32.10. $(-1)^{(n-1)(n-2)/2}$.

32.11. $(-1)^{\phi(n)/2} n^{\phi(n)} \left[\prod_{p|n} p^{\phi(n)/(1-p)}\right]$.

32.12. $(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} (n!)^{-n}$.

32.13. Воспользоваться задачей 32.9.

32.14. Воспользоваться задачами 32.1, 32.4 и 31.23.

32.15. См.: *Берлекэмп Э.* Алгебраическая теория кодирования. — М.: Мир, 1971. — С. 143.

32.16. $(-1)^{n(n-1)/2} n^n a^{n-1}$.

32.17. а) $1 \cdot 2^2 \cdot 3^3 \cdot \ldots \cdot (n-1)^{n-1} n^n$.

б) $1 \cdot 2^3 \cdot 3^5 \cdot \ldots \cdot n^{2n-1}$.

в) $2^{n-1} n^n$.

33.1. а) Три вещественных корня в интервалах $(-2, -1)$, $(-1, 0)$, $(1, 2)$.

б) Три вещественных корня в интервалах $(-2, -1)$, $(-1, 0)$, $(1, 2)$.

в) Три вещественных корня в интервалах $(-4, -3)$, $(1, 3/2)$, $(3/2, 2)$.

г) Один вещественный корень в интервале $(-2, -1)$.

д) Один вещественный корень в интервале $(1, 2)$.

е) Четыре вещественных корня в интервалах $(-3, -2)$, $(-2, -1)$, $(-1, 0)$, $(4, 5)$.

ж) Два вещественных корня в интервалах $(-1, 0)$, $(1, 2)$.

з) Четыре вещественных корня в интервалах $(-1, 0)$, $(0, 1)$, $(1, 2)$, $(2, 3)$.

и) Два вещественных корня в интервалах $(-1, 0)$, $(0, 1)$.

к) Вещественных корней нет.

33.2. Если $a^5 - b^2 > 0$, то все корни вещественны. Если $a^5 - b^2 < 0$, то полином имеет один вещественный корень.

33.3. Если n нечётно и $d > 0$, то имеются три вещественных корня. Если n нечётно и $d < 0$, то один вещественный корень. Если n чётно и $d > 0$,

то два вещественных корня. Если n чётно и $d < 0$, то вещественных корней нет.

33.4. Если n чётно, то $E_n(x)$ не имеет вещественных корней. Если n нечётно, то E_n имеет один вещественный корень.

33.5. Проверить, что производная не может иметь корней в интервале $(0, 1)$.

33.6. а) Числа $a_1, \ldots, a_m$ являются корнями $f'(x)$ кратностей $k_1 - 1, \ldots, k_m - 1$. Кроме того, в каждом интервале (a_i, a_{i+1}) производная $f'(x)$ имеет корень.

б) Вытекает из а).

в) Если $c_k = c_{k+1}$, то $x = 0$ является кратным корнем k-й производной $f^{(k)}(x)$, т.е. по б) $x = 0$ является корнем кратности не меньше $k + 1$ многочлена $f(x)$.

33.7. Вытекает из задачи 33.6, в).

33.8. Домножить на $x - 1$ и воспользоваться задачей 33.7.

33.9. Умножить на x^{-n}.

33.10. Доказать, что $f(x) > 0$ при $x \geqslant 1/n!$.

33.12. По одному корню в первом и четвёртом квадранте. По два корня во втором и третьем квадрантах.

33.14. Показать, что корень z удовлетворяет условию $z^n = \dfrac{1 - ax}{a - x}$. Проверить, что для вещественного числа a $|1 - ax| = |a - x|$.

33.15. Показать, что $1 - |a_1 z + \ldots + a_n z^n| > \dfrac{1}{(k+1)^n}$ при $|z| < \dfrac{1}{k+1}$.

33.16. По задаче 29.5 $f'/f = (x - a_1)^{-1} + \ldots + (x - a_n)^{-1}$, где a_i — корни f. Пусть $x = a - bi$, где $b > 0$. Тогда

$$\operatorname{Im}\left(\frac{f'(a - bi)}{f(a - bi)}\right) = \sum_{j=1}^{n} \frac{b + \operatorname{Im} a_j}{|a - bi - a_j|^2} > 0.$$

Поэтому $f'(a - bi) \neq 0$.

33.17. Любая выпуклая область является пересечением полуплоскостей. Воспользоваться задачей 33.16.

33.18. Воспользоваться теоремой Штурма (*Ленг С.* Алгебра. — М.: Мир, 1965. — Гл. IX, § 2).

33.19. Воспользоваться задачей 33.18.

33.20. $x^3 + x^2 - x - 1$, $x^2 \pm x - 1$, $x \pm 1$.

34.2. а) $\lambda = \pm 1$. б) $\lambda \neq (-1)^n$.

34.3. В случаях в), г), д) продифференцировать два раза и применить индукцию. В случаях е), ж) использовать определитель Вандермонда.

34.4. а), б) Использовать определитель Вандермонда.

в) Продифференцировать и использовать определитель Вандермонда.

34.5. Если $f_1, \ldots, f_n$ линейно независимы, то найдется точка a_1 такая, что $f_1(a_1) \neq 0$; проверить, что система $f_i - \dfrac{f_i(a_1)}{f_1(a_1)} f_1$, $i = 2, \ldots, n$, линейно независима и завершить доказательство индукцией по n.

34.7. а) Если $\operatorname{char} P \neq 2$, то $1 + 1 = 2$ — обратимый элемент в P. Поэтому для любого векторного пространства L над P и любого $x \in L$ существует вектор $y \in L$ такой, что $y = x/2$. Тогда $y + y = x$. Если же характеристика поля P равна 2, то $x + x = 2x = 0$ для любого вектора $x \in L$, но в аддитивной группе целых чисел $1 + 1 \neq 0$ и $2y \neq 1$ для любого целого числа y.

б) В векторном пространстве на поле характеристики p для любого вектора x справедливо равенство $px = 0$.

в) Для доказательства необходимости см. указание к задаче 34.7, б); достаточность проверить, положив $[k]a = \underbrace{a + a + \ldots + a}_{k \text{ раз}}$.

г) Для доказательства достаточности для любого рационального числа p/q ($p, q \in \mathbb{Z}$) положить $(p/q)a = b$, где b — решение уравнения $qx = pa$, и проверить, что решения уравнений $qx = pa$ и $nx = ma$ совпадают, если $p/q = m/n$.

34.8. д), е) Индукция по n.

34.9. а) Базисом является, например, система всех одноэлементных подмножеств множества M. Размерность равна n.

б) Использовать индукцию по k.

34.10. а) (1, 2, 3). б) (1, 1, 1). в) (0, 2, 1, 2).

34.11. а) $x_1 = -27x'_1 - 71x'_2 - 41x'_3$, $x_2 = 9x'_1 + 20x'_2 + 9x'_3$, $x_3 = 4x'_1 + 12x'_2 + 8x'_3$.

б) $x_1 = 2x'_1 + x'_3 - x'_4$, $x_2 = -3x'_1 + x'_2 + x'_4$, $x_3 = x'_1 - 2x'_2 + 2x'_3 - x'_4$, $x_4 = x'_1 - x'_2 + x'_3 - x'_4$.

34.12. $a_0, a_1, \ldots, a_n$; $f(\alpha), f'(\alpha), \dfrac{f''(\alpha)}{2!}, \ldots, \dfrac{f^{(n)}(\alpha)}{n!}$;

$$\begin{pmatrix} 1-\alpha & \alpha^2 & -\alpha^3 & \ldots & (-1)^n \alpha^n \\ 0 & 1-2\alpha & 3\alpha^2 & \ldots & (-1)^{n-1} n\alpha^{n-1} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 1 \end{pmatrix}.$$

34.13. а) Поменяются местами две строки.

б) Поменяются местами два столбца.

в) Произойдет симметрия матрицы относительно её центра.

35.1. б) Если прямая проходит через 0.

е), ж), з), и), к) При $a = 0$.

л) Если f — нулевая последовательность. н), о).

35.2. а) $((1,0,0,\ldots,0,1),(0,1,0,\ldots,0,0),(0,0,1,\ldots,0,0),\ldots,(0,0,0,\ldots$ $\ldots,1,0))$; $n-1$.

б) $((1,0,0,0,0,\ldots,0),(0,0,1,0,0,\ldots,0),(0,0,0,0,1,\ldots,0),\ldots)$; $\left[\dfrac{n+1}{2}\right]$.

в) К векторам из пункта б) добавить вектор $(1,1,1,\ldots,1,1)$; $1+\left[\dfrac{n+1}{2}\right]$ при $n>1$.

г) $((1,0,1,0,1,\ldots),(0,1,0,1,0,\ldots))$; 2 (при $n>1$).

д) Базис — фундаментальная система решений.

35.3. а) $\{E_{ij}\mid i,j=1,2,\ldots,n\}$; n^2.

б) Базис образуют, например, матрицы $\{E_{ij}+E_{ji}\mid 1\leqslant i\leqslant j\leqslant n\}$; $\dfrac{n(n+1)}{2}$.

в) Если $\operatorname{char}K\neq 2$, то $\{E_{ij}-E_{ji}\mid 1\leqslant i<j\leqslant n\}$; $\dfrac{n(n-1)}{2}$; при $\operatorname{char}K=2$ ответ, как и в пункте б).

е) $\{E_{11}-E_{ii}\mid i=2,3,\ldots,n\}\cup\{E_{ij}\mid i,j=1,2,\ldots,n;\ i\neq j\}$; n^2-1.

ж) $\{E_{ii}\mid i=1,2,\ldots,n\}$; n.

35.4. а) и б) При $a=0$, в) Если $|S|=1$; д).

35.5. а), б), г).

35.7. а) $\{f(x)(x-\alpha)\mid f(x)\in R[x]_{n-1}\}$.

б) $\{f(x)(x-\alpha)(x-\overline{\alpha})\mid f(x)\in R[x]_{n-2}\}$.

в) Размерность равна $n-k+1$.

35.9. а) Размерность $\dbinom{m+k-1}{m-1}$; в качестве базиса взять одночлены и использовать задачу 35.1.

б) $\dbinom{k+m}{m}$; положить $x_i=\dfrac{y_i}{y_{m+1}}$ и свести к а).

35.10. а) q^n. б), в) $(q^n-1)(q^n-q)\ldots(q^n-q^{n-1})$.

г) $q^{n^2}-(q^n-1)(q^n-q)\ldots(q^n-q^{n-1})$.

д) $\dfrac{(q^n-1)(q^n-q)\ldots(q^n-q^{n-k+1})}{(q^k-1)(q^k-q)\ldots(q^k-q^{k-1})}$; знаменатель равен числу различных базисов в k-мерном подпространстве.

е) q^{n-r}.

35.11. а) (a_1,a_2,a_4); 3. б) (a_1,a_2,a_5); 3.

35.12. б), в) Использовать формулу

$$\dim L_1+\dim L_2=\dim(L_1+L_2)+\dim(L_1\cap L_2).$$

35.13. а) Нет; рассмотреть $U=\langle a+b\rangle$, $V=\langle a\rangle$, $W=\langle b\rangle$, где a и b — линейно независимые векторы.

б) Если $x \in U \cap (V+W)$, то $x = v + w$, $w = x - v \in U$ (так как $v, x \in U$), т.е. $w \in U \cap W$, и поэтому $x \in (U \cap V) + (U \cap W)$. Обратное включение следует из того, что $U \cap V$ и $U \cap W$ содержатся и в U, и в $V + W$.

35.14. а) 3, 1. б) 3, 2. в) 4, 2.

35.15. а) (a_1, a_2, b_1); $(3, 5, 1)$.

б) (a_1, a_2, a_3, b_1); $(1, 1, 1, 1, 1)$, $(0, 2, 3, 1, -1)$.

в) $(a_1, a_2, , a_3, b_1)$; $(1, 1, 1, 1, 0)$, $(1, 0, 0, 1, -1)$.

г) (a_1, a_2, b_1); $(5, -2, -3, -4)$.

д) (a_1, a_2, a_3, b_1); базис пересечения — b_2.

35.16. а) $x_1 - x_3 - x_4 = 0$, $x_2 + x_3 - x_4 = 0$.

б) $x_1 - x_2 - 2x_3 = 0$, $x_1 - x_2 + 2x_4 = 0$, $2x_1 + x_2 - x_5 = 0$.

35.17. б) Рассмотреть $\langle x \rangle$, $\langle y \rangle$, $\langle z \rangle$, где векторы попарно линейно независимы.

35.18. Проекция вектора e_i на L_1 параллельно L_2 имеет i-ю координату $\dfrac{n-1}{n}$, а остальные равны $\left(-\dfrac{1}{n}\right)$; проекция на L_2 параллельно L_1 имеет все координаты, равные $\dfrac{1}{n}$.

35.19. $(-1, -3, 1, 3)$.

35.21. $A = \dfrac{1}{2}(A + {}^tA) + \dfrac{1}{2}(A - {}^tA)$.

35.22. б) 0 и E_{ij} при $i \leqslant j$; $E_{ij} - E_{ji}$ и E_{ji} при $i > j$.

35.23. б) 0 и E_{ij}, если $i < j$; E_{ii} и 0, если $i = j$; $E_{ij} + E_{ji}$ и $-E_{ji}$, если $i > j$.

35.24. $(q^n - q^m)(q^n - q^{m+1}) \ldots (q^n - q^{n-1})/(q^m - 1) \ldots (q^m - q^{m-1})$.

36.1. Применить индукцию по m.

36.2. а) q^{nk}. б) $(q^k - 1)(q^k - q) \ldots (q^k - q^{n-1})$, причём $n \leqslant k$.

36.3. $\begin{pmatrix} -3 & -6 & -9 \\ 3 & 7 & 12 \end{pmatrix}$.

36.4. $\begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & b \\ 0 & c \\ 1 & d \end{pmatrix}$.

36.5. Выбрать в V такой базис $e_1, \ldots, e_n$, что $A(e_1), \ldots, A(e_k)$ — базис $\operatorname{Im} A$ и $e_{k+1}, \ldots, e_n \in \operatorname{Ker} A$. Задать действие C и D на $e_{k+1}, \ldots, e_n$ и $A(e_1), \ldots, A(e_k)$.

36.6. Выбрать базис $e_1, \ldots, e_n$ как и в задаче 36.5. Задать C на $A(e_1), \ldots, A(e_k)$.

36.7. Использовать задачу 36.5.

36.8. Выбрать базис $e_1, \ldots, e_n$ как и в задаче 36.5.

36.9. а) Использовать многочлены Лагранжа f_i такие, что $f_i(i) = 1$, $f_i(j) = 0$ $(i, j = 0, \ldots, n;\ i \neq j)$.

б) Рассмотреть многочлены $1, x, \ldots, x^n$.

в) Рассмотреть матрицу $(\gamma^i(x^j))$ $(i, j = 1, \ldots, n+1)$.

36.10. а) Выбрав в V произвольную систему координат, записать условие задачи в виде систем уравнений.

б) f_i — многочлен Лагранжа:

$$f_i(x) = \frac{(x-0)(x-1)\ldots(x-i+1)(x-i-1)\ldots(x-n)}{i(i-1)\ldots 1\cdot(-1)\ldots(i-n)}.$$

в) $f_i(x) = \dfrac{x^i}{i!}$ $(i = 0, 1, \ldots, n)$.

36.11. Найти базис $(e_1, e_2, \ldots, e_k)$, для которого $f(e_1) = 1$, $f(e_2) = \ldots$ $\ldots = f(e_n) = 0$.

36.12. Использовать системы линейных уравнений.

36.13. Доказать, что $y = x - \dfrac{f(x)}{f(a)}a \in U$.

36.14. Использовать задачу 36.13, б).

36.15. В некотором базисе задать пересечение ядер (однородной системой линейных уравнений задачи 36.12).

36.16. Если система $e_1, \ldots, e_k$ линейно независима, то дополнить её до базиса и рассмотреть сопряженный базис в V^*.

36.17. а) Базис $(e_1, \ldots, e_k)$ подпространства U дополнить до базиса $(e_1, \ldots, e_n)$ пространства V. Если $(e^1, \ldots, e^n)$ — сопряжённый базис, то доказать, что $U^\perp = \langle e^{k+1}, \ldots, e^n\rangle$.

б) Использовать а).

в) Использовать б).

36.18. Доказать, что $\mathbb{Q}[x]$ — счётное множество, и указать в $\mathbb{Q}[x]^*$ несчётное множество различных линейных функций. Например, для каждого подмножества I натуральных чисел определить функцию f_I формулой $f_I(u) = \sum_{i\in I} u_i$, где $u = \sum_j u_j x^j$.

36.19. Использовать задачу 35.26, где $U = \operatorname{Ker} l_1$, $W = \operatorname{Ker} l_2$.

36.20. Использовать задачу 35.25.

36.21. См.: *Ленг С.* Алгебра. — М.: Мир, 1965. — Гл. VIII, § 4–6.

37.1. а), б), в), е), ж), з), и), к), м), н), о), р), с), т), у).

37.2. а) E в стандартном базисе.

в) В базисе из матричных единиц E_{ij} матричные элементы $a_{ij,kl}$ функции f имеют вид $a_{ij,ji} = 1$, а в остальных случаях 0.

г) 0.

ж) $a_{ij,ij} = 1$, в остальных случаях 0 (см. в)).

з) В базисе $(1, i)$ матрица $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$.

и) E (см. ж)).

л) $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$.

м), н), п) Пространство бесконечномерно.

с) $2E$ в стандартном базисе.

т) $\begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$ в ортонормированном базисе пространства $\mathbb{R}^3$.

37.5. а), б), г), е), ж).

37.6. а) $\begin{pmatrix} 0 & -6 & -9 \\ -2 & 20 & 30 \\ -3 & 30 & 45 \end{pmatrix}$. б) $\begin{pmatrix} 11 & 8 & 15 \\ 6 & 5 & 12 \\ 11 & 10 & 29 \end{pmatrix}$.

37.7. а) $\begin{pmatrix} 1+i & 1-i \\ -3+i & -1-i \end{pmatrix}$. б) $\begin{pmatrix} 4-2i & -2-i \\ 1+i & -i \end{pmatrix}$.

37.8. а) -43. б) $1-19i$.

37.9. а) $-3+7i$. б) $22+40i$.

37.10. а) $\begin{pmatrix} 2 & 5 & -1 \\ -4 & 6 & 8 \\ -10 & -23 & -4 \end{pmatrix}$. б) $\begin{pmatrix} -2 & 3 & 0 \\ -5 & -10 & 15 \\ 29 & -26 & 3 \end{pmatrix}$.

37.11. а) $\begin{pmatrix} 5+5i & 2i \\ 7+2i & -1+4i \end{pmatrix}$. б) $\begin{pmatrix} 13-i & 7-5i \\ 4 & 3-i \end{pmatrix}$.

37.12. а) $\langle(-1,-1,1)\rangle$, $\langle(10,7,1)\rangle$. б) $\langle(-1,-5,3)\rangle$, $\langle(1,-2,1)\rangle$.

37.14. а) $\langle(-1,1,1)\rangle$, $\langle(-17,-13,7)\rangle$. б) $\langle(2,-3,1)\rangle$, $\langle(-4,-5,1)\rangle$.

37.16. а) $\langle(1,-2,1)\rangle$, $\langle(-1,-5,3)\rangle$. б) $\langle(-1,1,1)\rangle$, $\langle(4,0,-9)\rangle$.

37.18. в) Воспользоваться задачей 36.21 и показать, что левое и правое ядро являются идеалами в K.

г) $(a - a^q |\ a \in K)$.

37.19. в) $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$. г) Следует из в). д) $F\sqrt{2}$.

37.21. а) при $\lambda = \pm 1$. в).

37.22. $F = {}^tAG\overline{B}$.

37.23. Если функция f симметрическая, то к виду aE_{11}, если не является симметрической, то к виду E_{12}.

37.24. $F' = {}^tCF\overline{C}$, $\widetilde{F} = F\overline{C} = {}^t\overline{C}^{-1}F'$.

37.26. Пример несовпадения: функция на $\mathbb{R}^2$ с матрицей $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ в некотором базисе.

37.28. б) Пример: функция на $\mathbb{R}^2$ с матрицей $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ в некотором базисе.

37.29. г) В случае $\varepsilon = 1$ матрицы для f_1 и f_2 в подходящих базисах имеют вид $\begin{pmatrix} 0 & A \\ {}^tA & 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 0 & B \\ {}^tB & 0 \end{pmatrix}$, где A, B — невырожденные матрицы. Остается непосредственно подобрать матрицу перехода.

37.30. Использовать задачу 37.29.

37.31. б) Аналогично теореме о приведении симметрической билинейной формы к нормальному виду; можно использовать и приём, аналогичный алгоритму Лагранжа и сгруппировать сначала члены с множителями y_1 и x_1, а затем применить предположение индукции.

37.32. а) Нет. б) Нет.

37.33. а) $x_1'y_2' - x_2'y_1'$, где $x_1' = x_1 - 2x_3$, $x_2' = x_2 - x_3$, $x_3' = x_3$.

б) $x_1'y_2' - x_2'y_1'$, где $x_1' = x_1 - \dfrac{3}{2}x_3$, $x_2' = 2x_2 + x_3$, $x_3' = x_3$.

в) $x_1'y_2' - x_2'y_1' + x_3'y_4' - x_4'y_3'$, где $x_1' = x_1 - 2x_3$, $x_2' = x_2 - x_4$, $x_3' = x_3$, $x_4' = x_4$.

г) $x_1'y_2' - x_2'y_1'$, где $x_1' = x_1 + x_3$, $x_2' = x_2 + x_3 + x_4$, $x_3' = x_3$, $x_4' = x_4$.

37.35. $60t(1-t)$, $t^2(1-t)$, $t(1-t)(t^2-t-1)$.

37.36. Использовать задачу 37.31, б).

37.37. Определитель кососимметрической матрицы нечётного порядка равен нулю.

37.45. а) 1, 2.

б) 2, 3, 4. Максимальная возможная размерность равна $\dbinom{n}{2}$.

38.1. а), б), г), е), ж), к), н), р), с), т).

38.3. Нет.

38.4. Для f_1.

38.6. а) $\langle(2,1,0)\rangle$. б) $\langle(-21,13,0)\rangle, \langle(-79,0,13)\rangle$.

38.8. а) $2x_1'y_1' - \dfrac{1}{2}x_2'y_2' + 3x_3'y_3'$. б) $x_1'y_1' - x_2'y_2' + 16x_3'y_3'$.

38.9. а) Да. б) Нет.

38.10. а), в), и), м), о), р).

38.11. а) $\lambda > 2$. б) $|\lambda| < \sqrt{5/3}$.

в) $-0,8 < \lambda < 0$. г) Ни при каких λ.

38.13. Рассмотреть функцию $x_1^2 + 4x_1x_2 + x_2^2$.

38.14. а) $\lambda < -20$. б) $\lambda < -0,6$.

38.15. а) $x_1y_1 + x_1y_2 + x_2y_1 + 2x_2y_2 - 3x_1y_3 - 3x_3y_1 + 2x_2y_3 + 2x_3y_2 - x_3y_3$.

б) $\dfrac{1}{2}(x_1y_2 + x_2y_1 + x_1y_3 + x_3y_1 + x_2y_3 + x_3y_2)$.

38.16. а) $2x_1y_1 - x_1y_2 - x_2y_1 - 2x_3y_1 - 2x_1y_3 - \dfrac{5}{2}x_2y_3 - \dfrac{5}{2}x_3y_2 + x_3y_3$.

б) $-2x_2y_2 + \dfrac{3}{2}x_2y_3 + \dfrac{3}{2}x_3y_2 - \dfrac{1}{2}x_1y_3 - \dfrac{1}{2}x_3y_1 + 2x_3y_3$.

38.17. а) Нет. б) Да.

38.18. а) $y_1^2 + y_2^2 - y_3^2$.

б) $y_1^2 + y_2^2 - y_3^2$. в) $y_1^2 - y_2^2$. г) $y_1^2 - y_2^2 - y_3^2 - y_4^2$.

38.19. а) Нет. б) Да.

38.22. $n(n+1)/2$, $n(n-1)/2$.

38.23. В случае $U = \langle e_1, e_2\rangle$ и $f(e_1, e_2) = f(e_2, e_2)$ выбрать в $U^{\perp}$ вектор e_3 такой, что $f(e_2, e_3) \neq 0$.

38.26. Привести к нормальному виду, применить рассуждение, аналогичное доказательству закона инерции.

38.27. n, n.

38.29. Рассмотреть соответствующую квадратичную функцию.

38.31. $\dfrac{n(n+1)}{2}$.

38.32. Рассмотреть значения в точках вида $\lambda x + y$, где $\lambda \in F$.

39.1. а) При $a = 0$. б) При $a = 0$.

в), г), д) При $a = 0$. е), ж), з), л).

39.5. а) $\{0\}$, V. б) V, $\{0\}$. в) V, $\{0\}$ при $\alpha \neq 0$; V при $\alpha = 0$.

г) $\langle b\rangle$, $\langle a\rangle^{\perp}$ при $a, b \neq 0$; $\{0\}$, V при $a = 0$ или $b = 0$.

д) V, $\{0\}$. е) $\mathbb{R}[x]_n$, $\{0\}$.

ж) $\mathbb{R}[x]_{n-1}$, $\mathbb{R}$. з) $\mathbb{R}[x]_{n-k}$, $\mathbb{R}[x]_{k-1}$. л) $\mathbb{R}$, $\{0\}$.

39.7. Дополнить базис $(e_1, \ldots, e_k)$ подпространства до базиса $(e_1, \ldots$ $\ldots, e_n)$ пространства и рассмотреть проектирования на $\langle e_1, \ldots, e_k\rangle$ и $\langle e_{k+1}, \ldots, e_n\rangle$, (см. задачу 39.17).

39.9. Дополнить базис подпространства до базиса пространства.

39.12. Сначала доказать, что $\operatorname{rk}\mathcal{A} = \operatorname{rk}\mathcal{B}\mathcal{A} + \dim(\operatorname{Im}\mathcal{A} \cap \operatorname{Ker}\mathcal{B})$.

39.14. $n(n-r)$, где $r = \operatorname{rk}\mathcal{A}$.

39.15. а) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$.

б) $\begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$, если положительное направление отсчета углов совпадает с направлением кратчайшего поворота, переводящего первый базисный угол во второй.

в) $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ и $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. г) $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. д) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 4 \end{pmatrix}$.

е) $\begin{pmatrix} a & 0 & b & 0 \\ 0 & a & 0 & b \\ c & 0 & d & 0 \\ 0 & c & 0 & d \end{pmatrix}$. ж) $\begin{pmatrix} a & c & 0 & 0 \\ b & d & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a & c \\ 0 & 0 & b & d \end{pmatrix}$. з) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

и) $\begin{pmatrix} a_1b_1 & a_1b_3 & a_2b_1 & a_2b_3 \\ a_1b_2 & a_1b_4 & a_2b_2 & a_2b_4 \\ a_3b_1 & a_3b_3 & a_4b_1 & a_4b_3 \\ a_3b_2 & a_3b_4 & a_4b_2 & a_4b_4 \end{pmatrix}$, где $A = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ a_3 & a_4 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} b_1 & b_2 \\ b_3 & b_4 \end{pmatrix}$.

к) $\begin{pmatrix} a_1 + b_1 & b_3 & a_2 & 0 \\ b_2 & a_1 + b_4 & 0 & a_2 \\ a_3 & 0 & a_4 + b_1 & b_3 \\ 0 & a_3 & b_2 & a_4 + b_4 \end{pmatrix}$.

л) $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & n \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}$. м) $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ n & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & n-1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & n-2 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

н) $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}$.

39.17. Первые k элементов главной диагонали матрицы оператора равны 1, а все остальные элементы матрицы — нули.

39.18. Первые k столбцов матриц состоят из коэффициентов выражений векторов $b_1, \dots, b_k$ через $a_1, \dots, a_n$, остальные столбцы произвольны.

39.19. а) $\begin{pmatrix} 4 & 5 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 0 & 3 \\ 1 & 6 & -1 & 7 \end{pmatrix}$. б) $\begin{pmatrix} -5 & -8 & -6 & -2 \\ 2 & 4 & 4 & 0 \\ -3 & -2 & -1 & -5 \\ 6 & 7 & 6 & 13 \end{pmatrix}$.

39.20. $\begin{pmatrix} -1/3 & 2/3 & 2/3 \\ 2/3 & 2/3 & -1/3 \\ 2/3 & -1/3 & 2/3 \end{pmatrix}$.

39.21. $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 3 & -1 & -2 \\ 2 & -3 & 1 \end{pmatrix}$.

39.23. а) Первые k столбцов матрицы нулевые, остальные k линейно независимые.

39.24. Рассмотреть подпространства V_i $((i = 1, 2)$, состоящие из всех векторов x, для которых $(f_i(\mathcal{A}))(x) = 0$.

40.1. а) Многочлены нулевой степени; $\{0\}$.

б) Ненулевые симметрические и кососимметрические матрицы; $\{1, -1\}$.

в) Одночлены; $\{0, 1, 2, \ldots, n\}$.

г) Одночлены; $\{1, 1/2, \ldots, 1/(n+1)\}$.

40.2. Из равенства $f(ax+b) = \lambda f(x)$ следует, что $\lambda = a^k$, где k — степень $f(x)$.

40.4. Если $\mathcal{A}(x) = \lambda x$, $\lambda \neq 0$, то $\mathcal{A}^{-1}(x) = x/\lambda$.

40.6. Использовать матрицы операторов.

40.8. а) Использовать задачу 40.7.

б) Рассмотреть факторпространство по подпространству $\langle a \rangle$, где a — общий собственный вектор всех заданных операторов.

40.9. Рассмотреть $\mathcal{A}^2 - \lambda^2 \mathcal{E}$.

40.11. Рассмотреть матрицу

$$A = \begin{pmatrix} -a_{n-1} & -a_{n-2} & \ldots & -a_1 & -a_0 \\ 1 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \ldots & 0 & 0 \\ \multicolumn{5}{c}{\dotfill} \\ 0 & 0 & \ldots & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

40.13. $\lambda_1 = a_1^2 + \ldots + a_n^2, \quad \lambda_2 = \ldots = \lambda_n = 0$.

40.15. а) $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = -1, \quad c(1, 1, -1)$ $(c \neq 0)$.

б) $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 2$; $c_1(1, 2, 0) + c_2(0, 0, 1)$ (c_1 и c_2 не равны нулю одновременно).

в) $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = \lambda_3 = 0$; для $\lambda_1 = 1$ имеют вид $c(1, 1, 1)$, для $\lambda_{2,3} = 0$ $c(1, 2, 3)$ $(c \neq 0)$.

г) $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$; для $\lambda_{1,2} = 1$ $c_1(2, 1, 0) + c_2(1, 0, -1)$ (c_1 и c_2 не равны нулю одновременно), для $\lambda_3 = -1$ $c(3, 5, 6)$ $(c \neq 0)$.

д) $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 2 + 3i$, $\lambda_3 = 2 - 3i$ (над $\mathbb{C}$); для $\lambda_1 = 1$ $c(1, 2, 1)$, для $\lambda_2 = 2+3i$ $c(3-3i, 5-3i, 4)$, для $\lambda_3 = 2-3i$ $c(3+3i, 5+3i, 4)$, где везде $c \neq 0$.

е) $\lambda = 2$; $c_1(1, 1, 0, 1) + c_2(0, 0, 1, 1)$ (c_1 и c_2 не равны нулю одновременно).

40.16. а) $((1, 1, 1), (1, 1, 0), (1, 0, -3))$, $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

б) $((1, 1, 2), (3-3i, 4, 5-3i), (3+3i, 4, 5+3i))$, $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2+3i & 0 \\ 0 & 0 & 2-3i \end{pmatrix}$.

в) не сводится к диагональному виду ни в $\mathbb{R}$, ни в $\mathbb{C}$.

г) $((1, 1, 0, 0), (1, 0, 1, 0), (1, 0, 0, 1), (1, -1, -1, -1))$, $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$.

40.17. Элементы α_k и α_{n-k+1} должны либо оба быть отличными от нуля, либо оба обращаться в нуль ($k = 1, \ldots, n$).

40.18. В качестве T можно взять матрицу с 1 на главной диагонали и на соседней диагонали ниже главной, -1 на соседней диагонали выше главной и 0 на остальных местах. B имеет на главной диагонали сверху $\frac{n}{2}$ единиц при чётном n и $\frac{n+1}{2}$ единиц при нечётном n, а ниже на главной диагонали -1.

40.19. Рассмотреть матрицу оператора $\mathcal{A}$ в базисе, первыми векторами которого являются линейно независимые собственные векторы, принадлежащие λ_0.

40.20. $\lambda_1, \ldots, \lambda_n, \overline{\lambda}_1, \ldots, \overline{\lambda}_n$.

40.21. а) $\lambda_i \lambda_j$ $(i, j = 1, \ldots, n)$. б) λ_i / λ_j $(i, j = 1, \ldots, n)$.

40.22. $\{0\}$ и $\mathbb{R}[x]_k$ $(k = 0, 1, 2, \ldots, n)$.

40.27. $\{0\}$ и линейные оболочки подсистем базиса.

40.28. $V_i = \langle e_1, \ldots, e_i \rangle$ $(i = 1, \ldots, n)$.

40.29. $\{0\}$, V, $\langle (2, 2, -1) \rangle$, $U = \langle (1, 1, 0), (1, 0, -1) \rangle$, $\langle (2, 2, -1), a \rangle$, $\langle a \rangle$, где $a \in U$.

40.30. V, $\{0\}$, $\langle (1, -2, 1) \rangle$, $\langle (1, 1, 1),\ (1, 2, 3) \rangle$.

40.31. Линейная оболочка любого множества одночленов степени не выше n.

40.32. а) Сумма некоторых подпространств $\langle \cos kx, \sin kx \rangle$.

б) Сумма подпространства из $\langle \cos x, \cos 2x, \ldots, \cos nx \rangle$ и некоторых подпространств $\langle \sin kx \rangle$.

40.33. Рассмотреть собственные подпространства U_1, U_{-1} оператора $\mathcal{A}$ и V_1, V_{-1} оператора $\mathcal{B}$. В случае когда все пересечения $U_i \cap V_j$ нулевые, получить ненулевые векторы $a \in V_1$, $a + \lambda b \in V_{-1}$ для которых $a + b \in V_1$, $a + \lambda b \in V_{-1}$ при некотором λ.

40.35. а) $\lambda_1 = 1$, $\lambda_{2,3} = 0$; $\langle (1, 1, 1) \rangle$ для $\lambda_1 = 1$, $\langle (1, 1, 0), (1, 0, -3) \rangle$ для $\lambda_{2,3} = 0$.

б) $\lambda_1 = 3$, $\lambda_{2,3} = -1$; $\langle (1, 2, 2) \rangle$ для $\lambda_1 = 3$, $\langle (1, 1, 0), (1, 0, -1) \rangle$ для $\lambda_{2,3} = -1$.

в) $\lambda_{1,2,3} = -1$; V.

г) $\lambda_{1,2} = 2$, $\lambda_{3,4} = 0$; $\langle (1, 0, 1, 0), (1, 0, 0, 1) \rangle$ для $\lambda_{1,2} = 2$, $\langle (1, 0, 0, 0), (0, 1, 0, 1) \rangle$ для $\lambda_{3,4} = 0$.

40.37. Использовать задачу 40.36.

40.40. Собственные значения оператора L_A являются собственными значениями матрицы A.

40.41. а) Использовать приведение X к ступенчатому виду.

б) Использовать а).

40.42. Индукция по размерности пространства.

40.43. Использовать индукцию по степени минимального аннулирующего многочлена.

41.1. а) $\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$. б) $\operatorname{diag}(1, 2+3i, 2-3i)$.

в) $\begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. г) $\begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$.

д) $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$. е) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

ж) Две клетки порядка 2 с 0 на главной диагонали.

з) Клетка с 1 на главной диагонали.

и) Клетка с единицей на главной диагонали.

к) Клетка с числом n на главной диагонали.

л) $\operatorname{diag}(1, 2, \ldots, n)$.

м) $\operatorname{diag}(\varepsilon_0, \varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_{n-1})$, где ε_i — корень степени n из 1 $(i = 1, \ldots, n)$.

н) Клетка с числом α главной диагонали; в правом верхнем углу матрицы $A - \lambda E$ стоит отличный от нуля минор порядка $n-1$; найти элементарные делители матрицы $A - \lambda E$.

41.3. а) $\begin{pmatrix} f(\alpha) & \dfrac{f'(\alpha)}{1!} & \dfrac{f''(\alpha)}{2!} & \ldots & \dfrac{f^{(n)}(\alpha)}{n!} \\ 0 & f(\alpha) & \dfrac{f'(\alpha)}{1!} & \ldots & \dfrac{f^{(n-1)}(\alpha)}{(n-1)!} \\ 0 & 0 & f(\alpha) & \ldots & \dfrac{f^{(n-2)}(\alpha)}{(n-2)!} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & f(\alpha) \end{pmatrix}$.

б) При $\alpha \neq 0$ жорданова клетка с числом α^2 на диагонали; при $\alpha = 0$ две жордановы клетки с нулём на диагонали, имеющие порядок $n/2$ при чётном n и порядки $(n-1)/2$ и $(n+1)/2$ при нечётном n.

41.4. Две клетки с числом α на диагонали порядка $n/2$ при чётном n и порядков $(n-1)/2$ и $(n+1)/2$ при нечётном n; использовать задачи 41.2 и 41.3.

41.5. а) В каждой клетке жордановой формы матрицы A заменяем λ $(\lambda \neq 0)$ на λ^2; если в клетке порядка k на главной диагонали стоит 0, то при $k = 2l$ заменяем её двумя клетками порядка l, а при $k = 2l + 1$ двумя клетками порядков $l + 1$ и l.

б) В жордановой форме матрицы A заменяем диагональные элементы на обратные.

41.6. а) Диагональная матрица с элементами ± 1 на главной диагонали; $\mathcal{A}$ является отражением пространства V относительно некоторого подпространства L_1 параллельно некоторому дополнительному подпространству L_2.

б) Диагональная матрица, где на диагонали стоят 0 и 1; $\mathcal{A}$ является проектированием пространства V на некоторое подпространство L_1 параллельно некоторому дополнительному подпространству L_2.

41.7. На главной диагонали стоят корни из 1.

41.10. а) $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$, $((1,4,3),(1,0,0),(3,0,1))$.

б) $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $((1,-3,-2),(1,0,0),(1,0,1))$.

в) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $((1,1,1,1),\ (-1,0,0,0),\ (1,1,0,0),\ (0,0,-1,0))$.

г) $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $((-1,-1,-1,0),\ (2,1,0,0),\ (1,0,0,-1)),\ (3,6,7,1))$.

41.11. Одна жорданова клетка.

41.12. Использовать жорданову форму матрицы оператора.

41.13. Использовать жорданову форму матриц операторов.

41.14. Использовать жорданову форму матрицы B.

41.16. Собственное значение 1, клетки размера 1, 3, 5.

41.17. Собственное значение 0. Порядки клеток $n+1, n, \ldots, 2, 1$.

41.18. Использовать приведение к жордановой форме.

41.20. Использовать вид жордановой формы k-й степени жордановой клетки (см. задачу 41.3.)

41.21. а) $\pm\frac{1}{4}\begin{pmatrix} 7 & 1 \\ -1 & 9 \end{pmatrix}$. б) $\pm\frac{1}{5}\begin{pmatrix} 12 & 2 \\ 3 & 13 \end{pmatrix}$, $\pm\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$.

41.22. а) $2^{50}\begin{pmatrix} -24 & 25 \\ -25 & 26 \end{pmatrix}$. б) $\begin{pmatrix} -7 & 4 \\ -14 & 8 \end{pmatrix}$.

41.23. $(t-\lambda_1)\ldots(t-\lambda_n)$.

41.24. $(t-\alpha)^n$.

41.26. а) $t-1$. б) t. в) t^2-t. г) t^2-1.

д) t^k. е) $t(t-1)\ldots(t-n)$. ж) $(t-1)\left(t-\frac{1}{2}\right)\ldots\left(1-\frac{1}{n+1}\right)$.

з) $(t^2+1)\ldots(t^2+n^2)$. и) $(t^2+1)\ldots\left(t^2+\dfrac{1}{n^2}\right)$.

к) Совпадает с минимальным многочленом матрицы A_3.

л) $(t-1)^2$.

41.27. а) $(t-2)^3$. б) t^2-5t+6.

41.28. $(t-1)^2(t-2)$, $V=L_1\oplus L_2$, где L_1 имеет базис (e_1, e_2-e_3), а L_2 — базис (e_2).

41.30. Состоит из клеток первого порядка с 1 на главной диагонали и клеток первого или второго порядка с 0 на диагонали.

41.33. Сравнить размерности пространства многочленов от $\mathcal{A}$ и пространства матриц, перестановочных с A.

41.34. в) Использовать б).

41.38. Использовать задачу 41.34 и разложение пространства в прямую сумму циклических подпространств.

41.42. в) Доказать индукцией по l существование такого $\mathcal{B}_i\in I$, что $p(\mathcal{A}+\mathcal{B}_i)$ делится на $p^l(\mathcal{A})$ в кольце $K[\mathcal{A}]$.

41.43. Вывести из задачи 41.36 и предыдущей задачи, доказав, что все элементы идеала I нильпотентны.

41.44. Использовать задачи 41.39, 41.42.

41.45. а) Использовать жорданову форму матрицы A.

б) Использовать задачу 31.17.

41.47. Вытекает из задачи 41.16.

42.2. См.: *Кострикин А.И.*, *Манин Ю.И.* Линейная алгебра и геометрия. — М.: Наука, 1986. — Ч. 1, § 10.

42.3. Использовать задачи 42.2 и 42.1.

42.4. Использовать задачи 42.3.

42.13. См.: *Бурбаки Н.* Спектральная теория. — М.: Мир, 1972. — Гл. 1, § 2, п. 5.

42.14. См.: *Хорн Р.*, *Джонсон Ч.* Матричный анализ. — М.: Мир, 1989. — С. 359.

42.19. а) $\begin{pmatrix}2e^2 & -e^2\\ e^2 & 0\end{pmatrix}$. б) $\begin{pmatrix}4e-3 & 2-2e\\ 6e-6 & 4-3e\end{pmatrix}$.

в) $\begin{pmatrix}3e-1 & e & -3e+1\\ 3e & e+3 & -3e-3\\ 3e-1 & e+1 & -3e\end{pmatrix}$.

г) $\begin{pmatrix}3 & -15 & 6\\ 1 & -5 & 2\\ 1 & -5 & 2\end{pmatrix}+2\pi i n E$, где $n\in\mathbb{Z}$.

д) $\begin{pmatrix}1 & -1\\ 1 & -1\end{pmatrix}$.

42.20. $\det e^A = e^{\operatorname{tr} A}$.

42.22, 42.33. См.: *Хорн Р., Джонсон Ч.* Матричный анализ. — М.: Мир, 1989. — Гл. 8, § 81–84.

42.34. а) $x = (1, 1)$, $\rho(A) = 3$. б) $x = (1, 1)$, $\rho(A) = 7$.

в) $x = (5, 3, 1)$, $\rho(A) = 5$. г) $x = (1, 0, 1, 0)$, $\rho(A) = 6$.

43.4. а) Скалярные матрицы.

б) Кососимметрические матрицы.

в) Симметрические матрицы.

г) Нижние нильтреугольные матрицы.

43.13. Обе матрицы равны G^{-1}.

43.14. а) ${}^tS^{-1}$. б) ${}^t\overline{S}^{-1}$.

43.15. а) $((1, 2, 2, -1), (2, 3, -3, 2), (2, -1, -1, -2))$.

б) $((1, 1, -1, -2), (2, 5, 1, 3))$.

в) $((2, 1, 3, -1),\ (3, 2, -3, -1),\ (1, 5, 1, 10))$.

43.16. Например: а) $((2, -2, -1, 0), (1, 1, 0, -1))$;

б) $((0, 1, 0, -1),\ (1, 0, -1, 0))$.

43.18. а) $x_2 + x_4 = 0$. б) $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0, \\ -18x_1 + x_2 + 18x_3 + 11x_4 = 0. \end{cases}$

43.19. а) $(1, -1, -1, 5)$, $(3, 0, -2, -1)$.

б) $(3, 1, -1, -2)$, $(2, 1, -1, 4)$.

в) $(0, -3/2, 3/2, 0)$, $(7, -5/2, -5/2, 2)$.

43.21. а) $\sqrt{14}$. б) 2. в) 7/5. г) $\sqrt{3/5}$. д) $\sqrt{5/7}$.

43.26. См. задачу 43.25, г).

43.28. а) 6, 6, 6; 60°.

43.32. 0 при n нечётном, $\dfrac{1}{2}\dbinom{n}{k} = \dbinom{2k-1}{k-1}$ при $n = 2k$.

43.33. $a\sqrt{n}$; $\arccos \dfrac{1}{\sqrt{n}}$.

43.34. $R = \dfrac{a\sqrt{n}}{2}$; $R < a$ при $n < 4$, $R = a$ при $n = 4$ и $R > a$ при $n > 4$.

43.36. а) 8. б) 4. в) 12714. г) 0.

43.38. а) 60°. б) 30°. в) 0°.

43.41. $\arccos \sqrt{k/n}$.

43.42. $\arccos \dfrac{2}{3}$; пусть $a_i = \overline{A_0A_i}$ $(i = 1, 2, 3, 4)$; показать, что квадрат косинуса угла между векторами $a_1t_1 + a_2t_2$ и $a_3t_3 + a_4t_4$ равен

$$\frac{(t_1 + t_2)^2(t_3 + t_4)^2}{4(t_1^2 + t_1t_2 + t_2^2)(t_3^2 + t_3t_4 + t_4^2)},$$

и найти максимум функции $(t_1+t_2)^2$ при условии $t_1^2+t_1t_2+t_2^2=1$.

43.43. 45°. Найти минимум углов векторов плоскости с их ортогональными проекциями на первую плоскость.

43.44. б) $P_0(x)=1,\ \ P_1(x)=x,\ \ P_2(x)=\dfrac{1}{2}(3x^2-1),$

$$P_3(x)=\frac{1}{2}(5x^2-3x),\ \ P_4(x)=\frac{1}{8}(35x^4-30x^2+3).$$

в) $$P_k(x)=\sum_{j=0,\ j\geqslant k/2}(-1)^{k-j}\frac{1\cdot 3\cdot 5\dots(2j-1)}{(k-j)!(2j-k)!2^{k-j}}x^{2j-k}=$$
$$=\frac{1}{2^k k!}\sum_{j=0,j\geqslant k/2}(-1)^{k-j}\binom{k}{j}\frac{(2j)!}{(2j-k)!}x^{2j-k}.$$

г) $\sqrt{2/2k+1}$. д) 1.

43.45. а) $\sqrt{\Delta}$, где

$$\Delta=\begin{vmatrix}1 & \frac{1}{2} & \dots & \frac{1}{n+1}\\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \dots & \frac{1}{n+2}\\ \dots & \dots & \dots & \dots\\ \frac{1}{n+1} & \frac{1}{n+2} & \dots & \frac{1}{2n+1}\end{vmatrix}=\frac{(1!2!\dots n!)^3}{(n+1)!(n+2)!\dots(2n+1)!}.$$

б) $$\frac{1}{\binom{2n}{n}\sqrt{4n+1}}.$$

44.2. $\overline{G}^{-1t}\overline{AG}$.

44.3. $\begin{pmatrix}3 & 6\\ -1 & -3\end{pmatrix}$.

44.4. Проектирование параллельно оси координат на биссектрису второй и четвёртой четверти.

44.9. а) $D^*=-D$. б) Интегрировать по частям.

44.10. См. указание к задаче 44.9.

44.13. Воспользоваться задачей 44.12 и связью между эрмитовыми и квадратичными функциями.

44.14. Условие задачи эквивалентно равенству $(\mathcal{A}\mathcal{A}^*x,x)=(\mathcal{A}^*\mathcal{A}x,x)$ для всех $x\in V$. Воспользоваться задачами 44.1, д) и 44.13.

44.15. Если $\mathcal{A}=\mathcal{B}-\lambda\mathcal{E}$, то $\mathcal{A}^*=\mathcal{B}-\overline{\lambda}\mathcal{E}$; воспользоваться задачей 44.14, где x — собственный вектор оператора $\mathcal{B}$ с собственным значением λ.

44.16. Воспользоваться задачей 44.15.

44.17. а) Воспользоваться задачами 44.15, 44.6 и 44.1, а).

б) Воспользоваться а) и задачей 44.2.

в) Если $\mathcal{A}$ нормален, то утверждение следует из задачи 44.15. Для доказательства обратного утверждения, как и в б), доказать, что $\mathcal{A}$ имеет собственный ортонормированный базис.

44.19. Использовать диагональный вид матрицы оператора в ортонормированном базисе.

44.20. Использовать собственные ортонормированные базисы операторов $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$.

44.21. Использовать собственный ортонормированный базис.

44.22. Использовать собственный ортонормированный базис и интерполяционный полином.

44.23. Воспользоваться задачей 44.1, в), г), д).

44.24. а), б) Воспользоваться задачей 44.23 для подпространства $\operatorname{Ker} f(\mathcal{A})$.

в) Существуют такие многочлены $a(x)$, $c(x)$, что

$$a(x)f_1(x) + c(x)f_2(x) = 1;$$

отсюда вывести

$$\operatorname{Ker} f(\mathcal{A}) = \operatorname{Ker} f_1(\mathcal{A}) \oplus \operatorname{Ker} f_2(\mathcal{A});$$

если $x \in \operatorname{Ker} h(\mathcal{A})$, $y \in \operatorname{Ker} f(\mathcal{A})$, то по задачам 44.23 и 44.24, а), б) имеем

$$(x, y) = (c(\mathcal{A})f_2(\mathcal{A})x, y) = (x, \overline{c}(\mathcal{A}^*)\overline{f}_2(\mathcal{A}^*)y) = 0.$$

г) По задачам 44.7, 44.23 и 44.21, а)–в) имеем

$$\operatorname{Ker} f(\mathcal{A})^{\perp} = \operatorname{Im} \overline{f}(\mathcal{A}^*) \subseteq \operatorname{Ker} \overline{f}(\mathcal{A}^*)^{n-1} = \operatorname{Ker} f(\mathcal{A})^{n-1},$$

отсюда $V = \operatorname{Ker} f(\mathcal{A}) + \operatorname{Ker} f(\mathcal{A})^{n-1}$, т.е. $f(x)^{n-1}$ аннулирует $\mathcal{A}$ при $n \geqslant 2$.

44.25. Использовать задачу 44.23.

44.26. Использовать задачу 44.25.

44.27. а) Использовать задачу 44.26.

б) Вытекает из задачи 44.6.

44.29. Индукция по размерности с помощью задач 44.27 и 44.28.

45.4. а) $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$, $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}(1, -1), \frac{1}{\sqrt{2}}(1, 1)\right)$.

б) $\begin{pmatrix} 9 & 0 & 0 \\ 0 & 18 & 0 \\ 0 & 0 & -9 \end{pmatrix}$, $\left(\frac{1}{3}(2, 2, 1), \frac{1}{3}(2, -1, -2), \frac{1}{3}(1, -2, 2)\right)$.

в) $\begin{pmatrix} 9 & 0 & 0 \\ 0 & 9 & 0 \\ 0 & 0 & 27 \end{pmatrix}$, $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}(1, 1, 0), \frac{1}{\sqrt{18}}(1, -1, -4), \frac{1}{3}(2, -1, 1)\right)$.

г) $\begin{pmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$, $\left(\frac{1}{\sqrt{6}}(1,-2,1), \frac{1}{\sqrt{2}}(-1,0,1), \frac{1}{\sqrt{3}}(1,1,1)\right)$.

д) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$, $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}(1,0,1), (0,1,0), \frac{1}{\sqrt{2}}(1,0,-1)\right)$.

е) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$, $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}(1,0,0,1), \frac{1}{\sqrt{2}}(0,1,1,0), \frac{1}{\sqrt{2}}(1,0,0,-1), \frac{1}{\sqrt{2}}(0,1,-1,0)\right)$.

ж) $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$, $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}(1,1,0,0), \frac{1}{2}(1,-1,1,1), \frac{1}{\sqrt{2}}(0,0,1,-1), \frac{1}{2}(1,-1,-1,-1)\right)$.

45.7. а) $\begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$, $\left(\frac{1}{\sqrt{3}}(1+i,1), \frac{1}{\sqrt{6}}(1+i,-2)\right)$.

б) $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$, $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}(1,-i), \frac{1}{\sqrt{2}}(1,i)\right)$.

в) $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 8 \end{pmatrix}$, $\left(\frac{1}{\sqrt{6}}(2-i,-1), \frac{1}{\sqrt{6}}(1,2+i)\right)$.

45.9. Перестановочные операторы имеют общий собственный вектор x; рассмотреть ортогональное дополнение к $\langle x \rangle$.

45.10. в) Воспользоваться формулами Виета и теоремой Декарта.

45.11. Воспользоваться задачей 44.1, д).

45.13. Использовать диагональность матрицы $\mathcal{A}$ в некотором ортогональном базисе и задачу 45.10.

45.14. $\begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 \\ 2 & 4 & 2 \\ 0 & 2 & 5 \end{pmatrix}$.

45.15. В силу задачи 45.13 $\mathcal{A} = \mathcal{A}_1^2$, $\mathcal{B} = \mathcal{B}_1^2$, где $\mathcal{A}_1$, $\mathcal{B}_1$ — неотрицательные самосопряжённые операторы; если $\mathcal{A}$ положителен, то

$$\mathcal{A}\mathcal{B} = \mathcal{A}_1[\mathcal{A}_1\mathcal{B}_1)(\mathcal{A}_1\mathcal{B}_1)^*]\mathcal{A}_1^{-1};$$

воспользоваться задачей 45.11.

45.18. Доказать, что ранг $A - \lambda E$ не меньше $n-1$ для любого λ.

45.19. Указаны функции в главных осях и матрицы перехода A (${}^t x = A\,{}^t y$).

а) $3y_1^2+6y_2^2+9y_3^2$, $\quad \dfrac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & -1 & 2\\ 2 & 2 & -1\\ -1 & 2 & 2\end{pmatrix}$.

б) $9y_1^2+18y_2^2-9y_3^2$, $\quad \dfrac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & 2 & -1\\ -1 & 2 & 2\\ 2 & -1 & 2\end{pmatrix}$.

в) $3y_1^2+6y_2^2-2y_3^2$, $\quad \dfrac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix} \sqrt{2} & 1 & \sqrt{3}\\ -\sqrt{2} & -1 & \sqrt{3}\\ \sqrt{2} & -2 & 0\end{pmatrix}$.

г) $5y_1^2-y_2^2-y_3^2$, $\quad \dfrac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix} \sqrt{2} & 1 & \sqrt{3}\\ \sqrt{2} & 1 & -\sqrt{3}\\ \sqrt{2} & -2 & 0\end{pmatrix}$.

д) $3y_1^2-6y_2^2$, $\quad \dfrac{1}{6}\begin{pmatrix} 4 & \sqrt{2} & 3\sqrt{2}\\ 2 & -4\sqrt{2} & 0\\ 4 & \sqrt{2} & -3\sqrt{2}\end{pmatrix}$.

е) $2y_1^2+4y_2^2-2y_3^2-4y_4^2$, $\quad \dfrac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1\\ -1 & 1 & 1 & -1\\ -1 & -1 & 1 & 1\\ 1 & -1 & 1 & -1\end{pmatrix}$.

ж) $5y_1^2-5y_2^2+5y_3^2$, $\quad \dfrac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0\\ 1 & -2 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 2 & 1\\ 0 & 0 & -1 & 2\end{pmatrix}$.

з) $2y_1^2-4y_2^2$, $\quad \dfrac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0\\ 1 & 0 & -1 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 0 & -1\end{pmatrix}$.

и) $9y_1^2+9y_2^2+9y_3^2$, $\quad \dfrac{1}{3}\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 2 & 2\\ 0 & 2 & 1 & -2\\ 0 & 2 & -2 & 1\end{pmatrix}$.

к) $4y_1^2+4y_2^2+4y_3^2-6y_4^2-6y_5^2$, $\quad \dfrac{1}{\sqrt{10}}\begin{pmatrix} \sqrt{10} & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & \sqrt{2} & 0 & 2\sqrt{2} & 0\\ 0 & -2\sqrt{2} & 0 & \sqrt{2} & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0 & 3\\ 0 & 0 & 3 & 0 & -1\end{pmatrix}$.

46.4. Использовать задачу 46.3 и процесс ортогонализации.

46.5. б) Положить $w = x - \dfrac{\|x\|}{\|y\|}y$.

46.6. а) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$, $\left(\frac{1}{\sqrt{3}}(1,1,1), \frac{1}{\sqrt{2}}(1,0,-1), \frac{1}{\sqrt{6}}(1,-2,1)\right)$.

б) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$, $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}(1,1,0), (0,0,1), \frac{1}{\sqrt{2}}(1,-1,0)\right)$.

в) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ 0 & \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$, $\left(\frac{1}{\sqrt{3}}(1,1,1), \frac{1}{\sqrt{6}}(2,-1,-1), \frac{1}{\sqrt{2}}(0,1,-1)\right)$.

г) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ 0 & \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$, $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}(1,1,0), \frac{1}{\sqrt{2}}(1,-1,0), (0,0,1)\right)$.

д) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{2\sqrt{2}-1}{4} & -\frac{\sqrt{7+4\sqrt{2}}}{4} \\ 0 & \frac{\sqrt{7+4\sqrt{2}}}{4} & \frac{2\sqrt{2}-1}{4} \end{pmatrix}$;

$$\left(\frac{1}{\sqrt{5-2\sqrt{2}}}(1-\sqrt{2},1,-1), \frac{1}{\sqrt{2}}(0,1,1), \frac{1}{\sqrt{10-4\sqrt{2}}}(-2,1,-\sqrt{2}-1)\right).$$

е) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$,

$$\left(\frac{1}{2}(1,1,1,-1), \frac{1}{2}(1,1,-1,1), \frac{1}{2}(1,-1,1,1), \frac{1}{2}(-1,1,1,1,1)\right).$$

ж) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$,

$$\left(\frac{1}{\sqrt{2}}2(1,1,0,0), \frac{1}{\sqrt{2}}(0,0,1,-1), \frac{1}{\sqrt{2}}(1,-1,0,0), \frac{1}{\sqrt{2}}(0,0,1,1)\right).$$

з) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ 0 & -\frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$, $\left(\frac{1}{\sqrt{3}}(1,1,1), \frac{1}{\sqrt{6}}(2,-1,-1), \frac{1}{\sqrt{2}}(2,-1,-1\right)$.

и) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, $\left(\frac{1}{3}(-1,2,2), \frac{1}{3}(2,2,-1), \frac{1}{3}(-2,1,-2)\right)$.

к) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{7} & -\frac{4\sqrt{3}}{7} \\ 0 & \frac{4\sqrt{3}}{7} & \frac{1}{7} \end{pmatrix}$, $\left(\frac{1}{\sqrt{3}}(1,1,1), \frac{1}{\sqrt{2}}(1,-1,0), \frac{1}{3\sqrt{10}}(3,5,-8)\right)$.

л) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{12}(-2+7\sqrt{2}) & -\frac{1}{12}\sqrt{42+28\sqrt{2}} \\ 0 & \frac{1}{12}\sqrt{42+28\sqrt{2}} & \frac{1}{12}(-2+7\sqrt{2}) \end{pmatrix}$,

$$\left(\frac{1}{\sqrt{42+28\sqrt{2}}}(-2-\sqrt{2}, -4-3\sqrt{2}, \sqrt{2}), \frac{1}{84}(6\sqrt{2}, -2-\sqrt{2}, 2-\sqrt{2}), \frac{1}{84}(0, \sqrt{42-28\sqrt{2}}, \sqrt{42+28\sqrt{2}})\right).$$

м) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & -\frac{-\sqrt{3}}{2} \\ 0 & -\frac{1}{2}\sqrt{3} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$, $\left(\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, 0\right), \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}, 0\right), (0,0,-1)\right)$.

46.7. а) $\begin{pmatrix} e^{i\alpha} & 0 \\ 0 & e^{-i\alpha} \end{pmatrix}$, $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}(1,i), \frac{1}{\sqrt{2}}(1,-i)\right)$.

б) $\frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix} 1+i\sqrt{2} & 0 \\ 0 & 1-i\sqrt{2} \end{pmatrix}$,

$$\left(\frac{1}{4-2\sqrt{2}}(1, -i(1-\sqrt{2})), \frac{1}{4-2\sqrt{2}}(i(1-\sqrt{2}), -1)\right).$$

в) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & i & 0 \\ 0 & 0 & -i \end{pmatrix}$, $\left(\frac{1}{3}(2,-2i,i), \frac{1}{3}(2,i,-2i), \frac{1}{3}(-i,2,2)\right)$.

г) $\begin{pmatrix} \frac{1+i\sqrt{3}}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1-i\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix}$,

$$\left(\frac{1}{\sqrt{23-4\sqrt{3}}}(4, (\sqrt{3}-2)i), \frac{1}{\sqrt{23-4\sqrt{3}}}((\sqrt{3}-2)i, 4)\right).$$

д) $\begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}$, $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}(1,-i), \frac{1}{\sqrt{2}}(-i,1)\right)$.

46.8. Такая матрица подобна диагональной $\begin{pmatrix} e^{i\alpha} & 0 \\ 0 & e^{-i\alpha} \end{pmatrix}$, которая в свою очередь подобна матрице $\begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$ по задаче 46.7, а).

46.11. б) Использовать диагональный вид матриц унитарного и эрмитова оператора.

46.12. Любой ортонормированный базис в V, одинаково ориентированный с (e_1, e_2, e_3), можно оператором вида $\mathcal{A}_\varphi \mathcal{B}_\theta \mathcal{A}_\psi$ перенести в (e_1, e_2, e_3).

46.13. а) Если e_1, e_2, e_3 — базис из V, то операторы поворота в плоскостях $\langle e_1, e_2 \rangle$ и $\langle e_2, e_3 \rangle$ имеют требуемое представление; воспользоваться задачей 46.7, а).

46.14. Поворот в двумерной плоскости является произведением двух отражений; для доказательства второго утверждения заметить, что если $\mathcal{A} = \mathcal{A}_1 \ldots \mathcal{A}_m$, то $\operatorname{Ker}(\mathcal{A} - \mathcal{E}) \supseteq \cap_{i=1}^m \operatorname{Ker}(\mathcal{A}_i - \mathcal{E})$.

46.15. Использовать собственный ортонормированный базис.

46.16. а) $\dfrac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \cdot \dfrac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

б) $\dfrac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 5 & -3 \\ -3 & 5 \end{pmatrix} \cdot \dfrac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

в) $\dfrac{1}{3}\begin{pmatrix} 14 & 2 & -4 \\ 2 & 17 & 2 \\ -4 & 2 & 14 \end{pmatrix} \cdot \dfrac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 2 & 2 & -1 \\ -1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$.

46.17. Доказать, что $\mathcal{B}^2 = \mathcal{A}\mathcal{A}^*$.

46.18. Пусть $e^{i\alpha_1}, \ldots, e^{i\alpha_n}$ — все различные собственные значения оператора $\mathcal{A}$, найти такой многочлен $f(t)$ степени n, чтобы $f(e^{i\alpha_j}) = e^{i\alpha_j/k}$ при всех $1 \leqslant j \leqslant n$. Проверить, что $f(\mathcal{A})^k = \mathcal{A}$.

46.19. Использовать диагонализируемость оператора.

46.20. Представить $\mathcal{A}$ в виде квадрата положительного самосопряжённого оператора C. Показать, что оператор $C^{-1}\mathcal{A}BC$ самосопряжён.

46.21. Использовать задачу 46.20 и представить $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$ в виде квадратов положительных (неотрицательных) самосопряжённых операторов.

46.23. Использовать задачу 46.22.

46.28. Использовать полярное разложение $\mathcal{A}$.

46.29. а) Использовать задачи 46.24–46.26.

б) Вытекает из а).

в) Использовать определитель Вандермонда $W(1, \varepsilon, \varepsilon^2, \ldots, \varepsilon^{n-1})$, где $\varepsilon = \cos\dfrac{2\pi}{n} + i\sin\dfrac{2\pi}{n}$.

46.30. Использовать задачи 46.4, 46.5.

46.31. Использовать задачу 46.30.

47.1. а), г).

47.2. 21.

47.3. а) $B(v_3, v_4, v_5) = 0,\quad -B \otimes A(e_1, e_1 + e_2, e_2 + e_3, e_2, e_2) = 1,$
$(A \otimes B - B \otimes A)(v_1, v_2, v_3, v_4, v_5) = 1.$

б) $A(e_1 + e_2, e_2 + e_3) = 2,\quad B(e_3 + e_1, e_2, e_2) = 2,\quad A(e_2, e_2) = 0,$
$B(e_1 + e_2, e_2 + e_3, e_2 + e_1) = 8,\quad (A \otimes B - B \otimes A)(v_1, v_2, v_3, v_4, v_5) = 4.$

47.4. 0.

47.5. 0.

47.6. $(A \otimes B)(e_1, e_2, e_3, e_3, e_3) = 0,\ (B \otimes A)(e_1, e_2, e_3, e_3, e_3) = 1.$

47.7. а) 4. б) -9. в) 3.

47.9. а) $T(v, f) = f(\mathcal{A}v)$, где

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = (\operatorname{Im} \mathcal{A})^\perp = \langle e^\perp \rangle;$$

поэтому $\{f \in V^* \mid T(v, f) = 0$ для любого $v \in V\}$.

б) $\langle e_4 \rangle$.

47.10. $p^2(4p - 3)$.

47.11. а) 2. б) 1. в) 2.

47.13. а) 5. б) 1. в) 3.

47.14. а) e_3. б) $5e_3 + 5e_4$.

47.15. а) $(2e^1 - e^3) \otimes (2e_1 + 2e_2)$. б) $2e^1 \otimes e_3$.

47.16. а) $(e_1 - e_2) \otimes e_3 - (e_1 - 2e_2) \otimes e_4,\ e^1 \otimes (e^3 + e^4) + e^3 \otimes (e^3 + 2e^4)$.

б) $e_2 \otimes (e_3 + e_4) - (e_1 - e_2 + 2e_3 - e_4) \otimes e_3,$
$(e^1 + e^2) \otimes (2e^3 + 3e^4) - (e^1 + e^3) \otimes (e^3 + e^4).$

в) $e_1 \otimes (e_2 + e_3) + \sum_j e_j \otimes (-e_3 + e_4),$
$\sum_i (e^1 + e^2) \otimes e^i + (3e^1 + 2e^2 + 2e^3 + 3e^4) \otimes e^4.$

г) $e_1 \otimes (e_1 - e_2) + 2e_2 \otimes (-e_1 + 2e_2) + 3e_3 \otimes (2e_3 - e_4) + 4e_4 \otimes (-e_3 + e_4),$
$(2e^1 + e^2) \otimes e^1 + 2(e^1 + e^2) \otimes e^2 + 3(e^3 + e^4) \otimes e^3 + 4(e^3 + 2e^4) \otimes e^4.$

47.17. Рассмотреть базис из собственных векторов.

47.18. б) $(\operatorname{tr} \mathcal{A})^k$. в) d^{2n}.

47.19. а) Три клетки размера 2 с 1,2,3 по главной диагонали.

б) Одна клетка размера 1 и одна клетка размера 3 с 2 по главной диагонали.

в) Две клетки размера 3 с 0 по главной диагонали.

48.2. $2n(n + 1)(n - 1)/3$, где $n = \dim V$.

48.5. Подсчитать размерности.

48.7. Доказать, что след оператора $\Lambda^q \mathcal{A}$ совпадает с точностью до знака с q-м коэффициентом характеристического многочлена.

48.8. а) Две жордановы клетки порядков 5 и 1 с 1 на диагонали.

б) Жорданова клетка порядка 3 с 6 на диагонали и три клетки порядка 1 с числами 4, 6 и 9.

в) Две жордановы клетки порядка 2 с 2 на диагонали, клетка порядка 2 с -2 на диагонали и четыре клетки порядка 1 с числами 1, 4, -4 и -4.

48.9. Использовать указания к задаче 48.7.

48.14. Использовать задачу 48.12.

48.15. Рассмотреть базис, содержащий элемент x.

49.9. ${}^t x = Bx' + {}^t a$, $x' = B^{-1}x - B^{-1t}a$.

49.10. а)
$$\begin{aligned} &x_1 - 2x_2 - x_3 + x_4 = -2,\\ &2x_1 + 7x_2 + 3x_3 + x_4 = 6,\\ &x_1 = t_1 + 3t_2,\\ &x_2 = -t_1 + t_2,\\ &x_3 = 2 + 2t_1 - 3t_2,\\ &x_4 = -t_1 - 4t_2. \end{aligned}$$

б)
$$\begin{aligned} &3x_1 - 2x_2 - x_3 - x_4 = 1,\\ &6x_3 + 5x_4 = 1,\\ &x_1 = t_1 + 2t_2,\\ &x_2 = t_1 + 3t_2,\\ &x_3 = 6 - 5t_1,\\ &x_4 = -7 + 6t_1. \end{aligned}$$

49.11. Равенство имеет место справа, если $\langle a_1, \ldots, a_s \rangle$ содержит начало координат, равенство слева — в противном случае.

49.14. Если $P_i = a_i + L_i$ $(i = 1, \ldots, s)$,

$$\langle P_1 \cup \ldots \cup P_s \rangle = a_1 + (L_1 + \ldots + L_s + \langle \overline{a_1 a_2}, \ldots, \overline{a_1 a_s} \rangle).$$

49.16. а) $\dim \langle P_1 \cup P_2 \rangle = 3$, $\dim P_1 \cap P_2 = 1$.

б) $\dim \langle P_1 \cup P_2 \rangle = 4$, $P_1 \cap P_2 = \varnothing$ степень параллельности равна 1.

в) $\dim \langle P_1 \cup P_2 \rangle = 4$, плоскости P_1 и P_2 скрещиваются.

49.18. Гиперплоскость, параллельная P_1 и P_2 и проходящая через одну из точек указанного вида.

49.20. а) $x_1 = 3t$, $x_2 = -1 + 3t$, $x_3 = 3 - t$, $x_4 = 1 - t$.

б) $x_1 = 1 + 2t$, $x_2 = -3 + 6t$, $x_3 = -2 + 2t$, $x_4 = 2 + 4t$, $x_5 = 5t$.

в) Не существует.

49.22. $1 - x_1 - \ldots - x_n$, $x_1, \ldots, x_n$.

49.23. При $|K| \geqslant 3$ прямая содержит не менее трех точек; при $|K| = 2$ утверждение неверно.

49.24. Для любой точки a существует такой вектор v, что $f(a+v) = a+v$.

49.28. Если $\operatorname{char} K \nmid n$, то неподвижной будет точка

$$\frac{1}{n}(a + f(a) + f^2(a) + \ldots + f^{n-1}(a)),$$

где a — произвольная точка.

49.29. См. решение задачи 49.28.

49.31. а) $a + \langle e_1, e_2 \rangle$, где $a = (-1, 0, -1)$, $e_1 = (1, 2, 3)$, $e_2 = (1, 1, 1)$.

б) $a + \lambda e_1$, $a + \langle e_1 \rangle$, $a = a + \lambda e_1 + \langle e_2 \rangle$, $a + \langle e_1, e_2 \rangle$, $a + \lambda e_1 + \langle e_2, e_3 \rangle$, где $a = (3, 3, 4)$, $e_1 = (1, 2, 2)$, $e_2 = (-1, -2, -1)$, $e_3 = (1, 1, 0)$, λ произвольно.

в) a, $a + \langle \lambda e_1 + \mu e_3 \rangle$, $a + \langle e_1, e_2 \rangle$, $a = a + \langle e_1, e_2 + \lambda e_3 \rangle$, где $a = (0, -1, -4)$, $e_1 = (1, 4, 3)$, $e_2 = (1, 0, 0)$, $e_3 = (3, 0, 1)$, λ, μ произвольны.

г) $a + \lambda e_1 + \langle e_1, e_2 \rangle$, $a + \langle e_1, e_2 \rangle$, $a + \lambda e_1 + \langle e_1 + e_2, e_3 \rangle$, где $a = (7/2, 15/2, 7)$, $e_1 = (2, 1, 0)$, $e_2 = (-1, 0, 1)$, $e_3 = (3, 5, 6)$, λ произвольно.

49.33. а) Да. б) Нет. в) Да.

49.34. а) Да. б) Нет.

49.35. P_1; P_2; $\Pi_i \setminus P_i$ $(i = 1, 2)$, где Π_i — гиперплоскость, содержащая P_i и параллельная P_j $(j \neq i)$; всевозможные гиперплоскости, параллельные одновременно P_1 и P_2.

49.36. Воспользоваться задачей 49.23.

49.37. б) Используя задачу 49.36, показать, что f сохраняет параллельность прямых; определить отображение $Df\colon V \to V$ по формуле $Df(\overline{ab}) = \overline{f(a)f(b)}$ и показать, что $f(x+y) = f(x) + f(y)$; из условия $Df(\alpha v) = \sigma(\alpha) Df(v)$, где v — некоторый вектор из V, определить отображение $\sigma : K \to K$, показать, что оно не зависит от v и является автоморфизмом поля K.

50.3. Если $M' \neq \varnothing$, то гиперплоскость $H = \{x \mid \sum_{i \in J} f_i(x) = 0\}$ является опорной гиперплоскостью многогранника M и $M \cap H = M^J$. Обратно, пусть $\varGamma$ — грань многогранника M, являющегося его пересечением с опорной гиперплоскостью H. Пусть a — внутренняя точка грани $\varGamma$ и $J = \{i \mid f_i(a) = 0\}$. Тогда M^J — грань многогранника M, содержащая $\varGamma$ и a — её внутренняя точка. Отсюда следует, что $M^J \subseteq H$, и, значит, $M^J = \varGamma$.

50.4. Рассмотреть систему барицентрических координат, связанных с точками $a_0, a_1, \ldots, a_n$.

50.7. Вершины $A = (1, 1, 1)$, $B = (1, 1, -2)$, $C = (1, -2, 1)$, $D = (-2, 1, 1)$ и $E = (-1/2, -1/2, -1/2)$. Многогранник представляет собой объединение треугольных пирамид с общим основанием BCD.

50.8. а) Тетраэдр с вершинами $(1,0,0,0)$, $(0,1,0,0)$, $(0,0,1,0)$, $(0,0,0,1)$. Октаэдр с вершинами $(1,1,0,0)$, $(1,0,0,1,0)$, $(1,0,0,1)$, $(0,1,1,0)$, $(0,1,0,0,1)$, $(0,0,1,1)$.

в) Треугольная призма, вершины одного основания которой — $(1,0,0,0)$, $(0,1,0,0)$, $(0,0,1,0)$, другого — $(1,0,0,1)$, $(0,1,0,1)$, $(0,0,0,1,1)$.

г) Параллелограмм с вершинами $(1,0,1,0)$, $(1,0,0,1)$, $(0,1,1,0)$, $(0,1,0,1)$.

50.15. С помощью задачи 50.14 свести доказательство к случаю, когда $S = M \cup \{a\}$, где M — n-мерный симплекс и $a \notin M$. В этом случае воспользоваться задачей 50.14 и заметить, что любой отрезок $\overline{ab}$, где $b \in M$, пересекает некоторую $(n-1)$-мерную грань Γ симплекса M, не содержащую точки b, и, следовательно, содержится в объединении симплексов M, и $\operatorname{conv}(\Gamma \cup \{a\})$.

50.16. Воспользоваться задачей 50.15.

50.17. Лучи с началом в точке a, пересекающие M^0, заметают угол, величина которого не превосходит π.

50.18. Провести доказательство индукцией по n. Рассмотреть произвольную гиперплоскость H, проходящую через a. Доказать, что если какая-либо окрестность точки a в H содержится в M, то M лежит по одну сторону от H. В противном случае в пространстве H по предположению индукции существует такая гиперплоскость $a+W$ (где W — $(n-2)$-мерное подпространство векторного пространства V, соответствующего A), что множество $M \cap H$ лежит по одну сторону от неё. Пусть U — двумерное подпространство пространства V, дополнительное к W. Рассмотреть проекцию N множества M на двумерную плоскость $P = a+U$ параллельно W, (задача 49.38). Доказать, что $a \notin N^0$, и воспользоваться задачами 50.17 и 50.12.

50.20. Выбрать любую точку $b \in M$ и для всякой точки $a \notin M$ провести опорную гиперплоскость через точку отрезка $\overline{ab}$, ближайшую к a.

50.21. Показать, что всякая опорная гиперплоскость замкнутого выпуклого конуса проходит через нуль.

50.22. Совокупность M всех неотрицательных линейных комбинаций функций $f_1, \ldots, f_m$ есть замкнутый выпуклый конус в векторном пространстве L всех аффинных линейных функций на A. Если M не содержит положительных констант, то из задачи 50.21 следует, что существует такая линейная функция φ на пространстве L, что $\varphi(1) = 1$ и $\varphi(f) \leqslant 0$ при $f \in M$. Показать, что всякая линейная функция φ на пространстве L, удовлетворяющая условию $\varphi(1) = 1$, имеет вид $\varphi(f) = f(a)$, где a — некоторая точка пространства A (не зависящая от f).

50.23. б) С помощью задачи 50.20 доказать, что для всякой точки $a \neq M$ найдется такая линейная функция $f \in M^*$, что $f(a) > 1$.

50.24. Применить индукцию по размерности пространства. Вначале доказать, что всякая не крайняя точка принадлежит отрезку, соединяющему граничные точки. Затем из предположения индукции вывести, что всякая граничная точка принадлежит выпуклой оболочке множества крайних точек, лежащих в опорной гиперплоскости, проходящей через эту точку.

50.27. Вытекает из задач 50.24 и 50.26.

50.28. Достаточно рассмотреть случай, когда аффинная оболочка данных точек совпадает со всем пространством. В этом случае отождествить аффинное пространство с векторным, приняв за нуль какую-либо внутреннюю точку выпуклой оболочки M данных точек, и доказать, что выпуклое множество M^*, определённое как в задаче 50.23, является выпуклым многогранником. Затем воспользоваться задачами 50.27 и 50.23, б).

50.29. а) $x_1 \geqslant 0$, $x_2 \geqslant 0$, $x_3 \geqslant 0$, $x_4 \geqslant 0$, $x_1+x_3 \leqslant 1$, $x_1+x_3 \leqslant 1$, $x_1+x_4 \leqslant 1$, $x_2+x_3 \leqslant 1$, $x_2+x_4 \leqslant 1$; трехмерными гранями являются четыре четырехугольные пирамиды $Oabcd$, $Odefa$, $Odefb$, $Oabce$ с вершинами d, e, a, b соответственно и четыре тетраэдра $acdf$, $acef$, $bcdf$, $bcef$.

б) $x_1 \geqslant 0$, $x_2 \geqslant 0$, $x_3 \geqslant 0$, $x_4 \geqslant 0$, $x_1+x_4 \leqslant 1$, $x_2+x_4 \leqslant 1$; $x_3+x_4 \leqslant 1$; трехмерными гранями являются параллелепипед $Oabcdefg$ и шесть четырехугольных пирамид с общей вершиной h, основаниями которых являются двумерные грани указанного параллелепипеда.

50.31. Рассмотреть выпуклое множество $N-M$ в пространстве V, состоящее из векторов, соединяющих точки из M с точками из N. Доказать, что оно замкнуто, и из задачи 50.20 вывести существование такой линейной функции φ на пространстве V, что $\varphi(\overline{xy}) \geqslant 1$ при всех $x \in M$, $y \in N$. В качестве f взять подходящую аффинную функцию, линейная часть которой совпадает с φ.

50.32. В пространстве L рассмотреть замкнутый выпуклый конус K, состоящий из всех аффинных линейных функций, неотрицательных на M. Предположить, что $K \cap N = \varnothing$, и из задачи 50.31 вывести существование линейной функции на пространстве L, неотрицательной на K, отрицательной на N и удовлетворяющей условию $\varphi(1) = 1$. Показать, что $\varphi(f) = f(a)$, где $a \in M$, и прийти к противоречию с условием задачи.

50.33. Очевидно, что

$$\max_{x\in M}\min_{y\in N} F(x,y) \leqslant \min_{y\in N}\max_{x\in M} F(x,y).$$

Пусть $\max_{x\in M}\min_{y\in N} F(x,y) = c$. Тогда для всякой точки $x \in M$ найдется такая точка $y \in N$, что $F(x,y) \leqslant c$. Используя задачу 50.32, доказать существование такой точки $y_0 \in N$, что $F(x,y_0) \leqslant c$ при всех $x \in M$. Вывести отсюда, что $\min_{y\in N}\max_{x\in M} F(x,y) = c$. Аналогично доказать существование такой точки $x_0 \in M$, что $F(x_0,y) \geqslant c$ при всех $y \in N$.

50.34. Доказывать все утверждения индукцией по $n+m$.

50.35. а) Да. б), в) Нет. г), д), е) Да.

50.36. а) $(0,0,3,0,2)$, $(0,1,3,0,0)$, $(0,0,19/5,2/5,0)$, $(3/2,0,0,0,5/2)$, $(17/8,0,0,5/8,0)$, $(3/2,5/4,0,0,0)$.

б) $(6,4,0)$, $(0,12,2)$.

в) $(0,0,9,20)$, $(0,3,0,14)$, $(4,0,13,0)$.

50.37. а) $z_{\max} = 12$, $z_{\min} = -2$.

б) $z_{\min} = -4$, $z_{\max} = 116/7$.

в) Нет максимума и нет минимума.

г) $z_{\max} = \dfrac{35}{4}$, $z_{\min} = -13\dfrac{4}{5}$.

51.1. Если $a_0, a_1, \ldots, a_n$ — искомые точки, то можно выразить скалярные произведения векторов $\overline{a_0a_1}, \ldots, \overline{a_0a_m}$ через расстояния между данными точками; составленная из них матрица Грама должна быть положительно определенной (в случае а)) или неотрицательно определенной (в случае б)) (см. задачу 43.11).

51.2. а) 4. б) 3. в) 2. г) Не существует.

51.6. а) $(5,-4,4,0) + \langle(3,-4,3,-1)\rangle$.

б) $(5,0,2,11) + \langle(3,-1,2,5)\rangle$.

51.7. а) 5. б) 6. в) 6. г) $\sqrt{581/27}$.

51.8. $\left|c - \sum_{i=1}^n a_ib_i\right| / \sqrt{\sum_{i=1}^n a_i^2}$.

51.9. $2^{n+1/2}/\sqrt{2n+1}\binom{2n}{n}$. Использовать ортогональный базис, составленный из многочленов Лежандра (см. задачу 43.44).

51.10. $\pi/2^n$; использовать представление $\cos^{n+1} x$ в виде тригонометрического многочлена.

51.11. $P \cap Q$ состоит из одной точки.

51.12. а) $-x_1 + 3x_2 + 2x_3 + x_4 = 6$, $x_1 + 2x_2 + 3x_3 - x_4 = 4$.

б) $(3,-2,1,4) + \langle(2,3,-1,-2),(3,2,-5,1)\rangle$.

51.14. а) 22/3. б) 5. в) 7. г) 6.

51.15. $d\sqrt{\dfrac{n+1}{2(k+1)(n-k)}}$.

51.17. Пары $\{P_1, P_2\}$ и $\{Q_1, Q_2\}$ метрически конгруэнтны между собой, но не конгруэнтны паре $\{R_1, R_2\}$. Все расстояния равны 36; косинусы углов для первых пар $-3/5$ и $4/5$, для третьей $-1/\sqrt{5}$ и $2/\sqrt{5}$.

51.18. а) $(2,-3,-4,1,0) + \langle(18,0,-13,-1,5)\rangle$.

б) $(5,2,2,-5,-6) + \langle(0,3,-2,-2,1),(1,0,1,-1,0)\rangle$. Использовать задачу 51.13, г).

51.20. Использовать задачу 46.4.

51.22. Доказать, что существует ортогональный оператор, переводящий единичные векторы, ортогональные граням первого тетраэдра, в единичные векторы, ортогональные соответствующим граням второго тетраэдра.

51.23. а) Поворот на $-\pi/2$ вокруг точки $(1, 3)$;

б) поворот на $\pi/4$ вокруг точки $(-1/\sqrt{2}, 1 + 1/\sqrt{2})$.

в) Поворот на $\pi/3$ вокруг оси с направляющим вектором $a = (-2, -2, 1)$, проходящей через точку $(1, 2, 0)$.

г) Композиция поворота на $\pi/2$ вокруг оси с направляющим вектором $a = (-2, -2, 1)$, проходящей через точку $(2, -1, 2)$ и параллельного переноса на вектор $2a$.

д) Композиция поворота на $\pi - \arcsin(5/14)$ вокруг оси с направляющим вектором $a = (1, 1, 1)$, проходящей через точку $(-1, 2, 1)$ и параллельного переноса на вектор a.

51.24. а) Композиция отражения относительно прямой с направляющим вектором $a = (1, 1)$, проходящей через точку (1/2,0) и параллельного переноса на вектор $a/2$.

б) Отражение относительно прямой с направляющим вектором $(\sqrt{3}, 1)$, проходящей через точку (2,0).

в) Композиция поворота на $\pi/2$ вокруг оси с направляющим вектором $(2, 2, -1)$, проходящей через точку $P = (0, 1, -1)$, и отражения относительно ортогональной плоскости, проходящей через точку P.

г) Композиция отражения относительно плоскости $x - 2y + z = 3$ и параллельного переноса на вектор (3,2,1).

д) Композиция поворота на $\arccos \dfrac{1}{3}$ вокруг оси с направляющим вектором $(1, 0, -1)$, проходящей через точку $P = (1, -1, 0)$, и отражения относительно ортогональной плоскости, проходящей через точку P.

е) Отражение относительно плоскости $3x - y - 2z + 7 = 0$.

52.2. Перенести начало координат в точку b, воспользовавшись формулой из задачи 52.1.

52.3. Использовать задачу 52.2.

52.4. Заметить, что если ввести расширенный столбец координат

$$\tilde{X} = {}^t(x_1, \ldots, x_n, 1),$$

то $Q(a_0 + x) = {}^t\tilde{X} A_Q \tilde{X}$ и $\tilde{X} = \tilde{T}\tilde{X}'$.

52.5. Воспользоваться разложением Тейлора многочлена $Q(x_1, \ldots, x_n)$ в точке $(x_1^0, \ldots, x_n^0)$:

$$Q(x_1, \ldots, x_n) = Q(x_1^0, \ldots, x_n^0) + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial Q}{\partial x_i}(x_1^0, \ldots, x_n^0)(x_i - x_i^0) + \\ + \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial^2 Q}{\partial x_i \partial x_j}(x_1^0, \ldots, x_n^0)(x_i - x_i^0)(x_j - x_j^0).$$

52.6. а) Точка $-1/(n-1), \ldots, -1/(n-1))$.

б) Гиперплоскость $x_1 + \ldots + x_n + 1 = 0$.

в) Если n чётно, то центр есть точка $(x_1^0, \ldots, x_n^0)$, где

$$x_i^0 = \begin{cases} (-1)^{i/2} & \text{при чётном } i, \\ (-1)^{(n+1-i)/2} & \text{при нечётном } i. \end{cases}$$

Если $n = 4k + 3$, то центр есть прямая

$$(0, -1, 0, 1, \ldots, -1, 0) + t(1, 0, -1, 0, \ldots, 0, -1);$$

если $n = 4k + 1$, то центр пуст.

г) Центр пуст.

52.7. а) 9. б) 17.

52.8. а) $3n - 1$. б) $n^2 + 3n - 1$.

52.9. Воспользоваться задачей 52.5.

52.10. Использовать задачи 52.5 и 52.1.

52.11. а) $x_1 + 2x_2 + 2x_3 + x_4 = 1$. б) $x_1 + 2\sum_{i=2}^{n-1} x_i + x_n + 2 = 0$.

52.12. Использовать задачи 52.3 и 52.10.

52.13. Использовать задачу 52.3.

52.14. Использовать задачу 52.13.

52.15. а) $(1, 2, 3)$ и $(2, -1, -4)$.

б) Прямая целиком лежит на квадрике;

в) Прямая касается квадрики в точке $(-3, 0.0)$.

52.16. $(x_1 + \sqrt{12})/2 = x_2 = -x_3$ и $(x_1 - \sqrt{12})/2 = x_2 = -x_3$. Искомую прямую можно представить уравнениями $(x - a)/2 = y - b = -z$ или $x = a - 2z$, $y = b - z$. Подставляя эти значения x и y в уравнение квадрики, мы должны получить тождество. Из условия, что все коэффициенты полученного равенства должны быть равны нулю, определяем неизвестные параметры a и b.

52.17. Две комплексно сопряжённые прямые:

$$t\left(1, i\sqrt{\frac{3}{2}}, -\frac{3}{2}\right) \quad \text{и} \quad t\left(1, -i\sqrt{\frac{3}{2}}, -\frac{3}{2}\right).$$

52.18. а) $x_1^2 + 5x_2^2 + 4x_3^2 + 4x_1x_2 - 2x_2x_3 - 4x_1x_3 = 1$.

б) $x_1^2 + 2x_2^2 + x_3^2 - 4x_1x_2 + 6x_2x_3 - 2x_1x_3 + 20x_2 + 12x_3 + 12 = 0$.

52.19. а) Эллипс. б) Гипербола. в) Пара пересекающихся прямых.

г) Пустое множество.

52.20. а) Аффинный тип квадрики дается каноническим уравнением $y_1^2 + y_2^2 + \ldots + y_n^2 + 2y_{n+1} = 0$, а метрический тип — уравнением $y_1^2 + y_2^2 + \ldots$ $\ldots + y_{n-1}^2 + (n+1)y_n^2 + 2y_{n+1} = 0$.

б) Аффинный тип квадрики дается уравнением $y_1^2-y_2^2-y_3^2-\ldots-y_n^2=-1$, а метрический тип — уравнением $(n-1)y_1^2-y_2^2-y_3^2-\ldots-y_n^2=1$.

52.21. а) $\left(-1, \dfrac{3}{2}, 0\right)$, однополостной гиперболоид.

б) Линия центров $\dfrac{x_1}{3}=\dfrac{x_2}{2}=\dfrac{x_3-2}{1}$, эллиптический цилиндр.

в) Центра нет, эллиптический параболоид.

г) $\left(\dfrac{14}{3}, 3, \dfrac{1}{3}\right)$, однополостной гиперболоид.

д) Пара пересекающихся плоскостей $(x_1+x_2+x_3-1)(x_1+x_2-x_3+1)=0$.

е) Сфера $(x_1-1)^2+\left(x_2+\dfrac{2}{3}\right)^2+x_3^2=\dfrac{16}{9}$.

ж) Круговой цилиндр $(x_1-1)^2+\left(x_2+\dfrac{2}{3}\right)^2=\dfrac{16}{9}$.

з) Круговой конус $(x_1-1)^2+\left(x_2+\dfrac{2}{3}\right)^2-\left(x_3-\dfrac{2}{3}\right)^2=0$.

и) Пара параллельных плоскостей $(2x_1-x_2+6)(2x_1-x_2-6)=0$.

к) Эллипсоид $\dfrac{y_1^2}{49}+\dfrac{4y_2^2}{49}+\dfrac{9y_3^2}{49}=1$, центр $(3,-1,2)$, большая, средняя и малая оси соответственно параллельны осям Ox_1, Ox_2 и Ox_3.

л) Однополостный гиперболоид вращения $\dfrac{y_1^2}{4}-\dfrac{y_2^2}{16}-\dfrac{y_3^2}{16}=-1$; центр $(-4,0,-6)$, ось вращения параллельна оси Ox_1.

м) Круговой конус $y_1^2-\dfrac{y_2^2}{3}+y_3^2=0$; вершина $(3,5,-2)$, ось вращения параллельна оси Ox_2.

н) Параболоид вращения, вершина $(10,-1/2,-5/2)$; ось вращения параллельна оси Ox_1.

52.22. а) Круговой конус $-y_1^2+y_2^2+y_3^2=0$, направляющий вектор оси конуса $\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}}, \dfrac{1}{\sqrt{2}}, 0\right)$.

б) Гиперболический параболоид $y_1^2-y_2^2=2y_3$; вершина (0,0,0), направляющие векторы канонической системы координат: $e_1'=\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}}, \dfrac{1}{\sqrt{2}}, 0\right)$, $e_2'=\left(-\dfrac{1}{\sqrt{2}}, \dfrac{1}{\sqrt{2}}, 0\right)$, $e_3'=(0,0,1)$.

в) Параболический цилиндр $x_3^2=5x_1$, направляющие векторы канонической системы координат $e_1'=\left(\dfrac{3}{5}, \dfrac{4}{5}, 0\right)$, $e_2'=\left(-\dfrac{4}{5}, \dfrac{3}{5}, 0\right)$, $e_3'=(0,0,1)$.

г) Круговой конус $-4y_1^2+y_2^2+y_3^2=0$; направляющий вектор оси конуса $-\left(\dfrac{2}{\sqrt{5}}, \dfrac{1}{\sqrt{5}}, 0\right)$.

д) Гиперболический цилиндр $y_3^2 - 2y_1^2 = 1$, направляющий вектор оси гиперболы — $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right)$; направляющий вектор образующих цилиндра — $\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right)$.

е) Круговой цилиндр $y_1^2 + y_3^2 = 4/25$; ось цилиндра проходит через точку $(0, 0, -215)$ и имеет направляющий вектор $\left(-\frac{2}{\sqrt{5}}, \frac{1}{\sqrt{5}}, 0\right)$.

ж) Параболический цилиндр $y_1^2 = 5y_2$; вершина параболы $O' = \left(-1, -\frac{12}{25}, -\frac{16}{25}\right)$, направляющие векторы канонической системы координат: $e_1' = \left(0, -\frac{3}{5}, -\frac{4}{5}\right)$ (направляющий вектор оси параболы в сторону вогнутости), $e_2' = (1, 0, 0)$, $e_3' = \left(0, \frac{4}{5}, -\frac{3}{5}\right)$ (направляющий вектор образующих цилиндра).

з) Параболический цилиндр $y_3 = 2y_1^2$; вершина параболы $O' = (0, 0, 1)$, направляющий вектор оси параболы в сторону вогнутости (0,0,1), направляющий вектор образующих цилиндра $\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right)$.

и) Однополостной гиперболоид вращения $\frac{3y_1^2}{2} + \frac{3y_2^2}{2} - 3y_3^2 = \frac{85}{4}$, центр $O' = \left(\frac{14}{9}, -\frac{7}{18}, -\frac{14}{9}\right)$, направляющий вектор оси вращения $\left(\frac{2}{3}, \frac{1}{3}, -\frac{2}{3}\right)$.

к) Параболоид вращения $y_1^2 + y_2^2 = \frac{2}{3}y_3$, вершина $O' = (1, 0, -1)$, направляющий вектор оси вращения $\left(\frac{2}{3}, \frac{1}{3}, -\frac{2}{3}\right)$.

л) Двуполостный гиперболоид вращения $2y_1^2 + 2y_2^2 - 4y_3^2 = -1$, центр $O' = \left(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right)$, направляющий вектор оси вращения $\left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$.

м) Эллипсоид вращения $y_1^2 + y_2^2 + \frac{y_3^2}{4} = 1$, центр $O' = (1, 1, 1)$, направляющий вектор оси вращения $\left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$.

н) Двуполостный гиперболоид вращения $6y_1^2 + 6y_2^2 - 2y_3^2 = -1$, центр $O' = \left(-\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{2}{3}\right)$, направляющий вектор оси вращения $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$.

о) Параболический цилиндр $y_2^2 = \frac{4}{3}y_1$, $O' = (2, 1, -1)$, $e_1' = \left(\frac{2}{3}, \frac{2}{3}, \frac{1}{3}\right)$, $e_2' = \left(\frac{2}{3}, -\frac{1}{3}, -\frac{2}{3}\right)$, $e_3' = \left(\frac{1}{3}, -\frac{2}{3}, \frac{2}{3}\right)$.

п) Эллиптический цилиндр $\frac{y_1^2}{2} + y_2^2 = 1$, $O' = (0, 1, 0)$, $e_1' = \left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$, $e_2' = \left(\frac{1}{\sqrt{6}}, -\frac{2}{\sqrt{6}}, -\frac{1}{\sqrt{6}}\right)$, $e_3' = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$.

р) Эллиптический параболоид $y_1^2 + \frac{3y_2^2}{2} = 2y_3$, $O' = (2, 2, 1)$, $e_1' = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right)$, $e_2' = \left(\frac{1}{3\sqrt{2}}, \frac{1}{3\sqrt{2}}, -\frac{4}{3\sqrt{2}}\right)$, $e_3' = \left(\frac{2}{3}, \frac{2}{3}, \frac{1}{3}\right)$.

с) Гиперболический параболоид $y_1^2 - y_2^2 = 2y_3$, $O' = (0, 0, 1)$, $e_1' = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right)$, $e_2' = \left(\frac{1}{3\sqrt{2}}, \frac{1}{3\sqrt{2}}, -\frac{4}{3\sqrt{2}}\right)$, $e_3' = \left(\frac{2}{3}, \frac{2}{3}, \frac{1}{3}\right)$.

т) Гиперболический параболоид $\frac{y_1^2}{2} + y_2^2 = 2y_3$, $O' = (1, 2, 3)$, $e_1' = \left(-\frac{2}{3}, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right)$, $e_2' = \left(\frac{1}{3}, -\frac{2}{3}, \frac{2}{3}\right)$, $e_3' = \left(-\frac{2}{3}, -\frac{2}{3}, -\frac{1}{3}\right)$.

у) $-\frac{y_1^2}{9} - \frac{y_2^2}{9} - \frac{y_3^2}{9} + \frac{y_4^2}{3} = 1$; $O' = (0, 1, 2, 3)$, $e_1' = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0, 0\right)$, $e_2' = \left(\frac{1}{\sqrt{6}}, -\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{2}{\sqrt{6}}, 0\right)$, $e_3' = \left(\frac{1}{2\sqrt{3}}, -\frac{1}{2\sqrt{3}}, -\frac{1}{2\sqrt{3}}, -\frac{3}{2\sqrt{3}}\right)$; $e_4' = \left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$.

ф) $y_1^2 + y_2^2 + y_3^2 = 9$; $O' = (0, 0, 0, 0)$, $e_1' = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right)$, $e_2' = \left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right)$, $e_3' = \left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$; $e_4' = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$.

52.23. При $-1/2 < a < 1$.

52.24. Все соответствующие коэффициенты их уравнений, кроме, может быть, свободных членов, пропорциональны.

52.25. Каноническое уравнение квадрики в пространстве

$$(a - b)y_1^2 + \ldots + (a - b)y_{n-1}^2 + (a + (n - 1)b)y_n^2 + 2cy_{n+1} = 0.$$

52.27. При $a = b$ (плоскость размерности $n - 1$).

52.28. а) Искомое квадратичное уравнение имеет вид $\omega \wedge \omega = 0$, где

$$\omega = x_0 e_1 \wedge e_2 + x_1 e_1 \wedge e_3 + x_2 e_1 \wedge e_4 + x_3 e_2 \wedge e_3 + x_4 e_2 \wedge e_4 + x_5 e_3 \wedge e_4.$$

б) Пусть $U \in \Lambda^r V$, $W \subset V$ — минимальное подпространство такое, что U содержится в образе вложения $\Lambda^r W \to \Lambda^r V$. Рассмотрим подпространство $W' = \{\omega \in W : \ \omega \wedge U = 0\}$. Легко видеть, что разложимость U эквивалентна равенству $W = W'$. Используя невырожденность спариваний

$$\Lambda^k V \otimes \Lambda^{n-k} V \to \Lambda^n V \cong K,$$

определим спаривание $\Lambda^{r-1}V^* \otimes \Lambda^r V \to V$. Пусть образ элемента $\Theta \otimes U$ в V будет обозначаться через $i(\Theta)U$. Тогда W может быть охарактеризован как образ отображения $\Lambda^{r-1}V^* \to V$, определённого формулой $\Theta \to i(\Theta)U$. Условие $W = W'$ теперь эквивалентно условию $(i(\Theta)U) \wedge U = 0$ для всех $\Theta \in \Lambda^{r-1}V^*$. Это и есть искомая система квадратичных уравнений. В частности, при $r = 2$ имеем

$$(i(v^*)U) \wedge U = \frac{1}{2} i(v^*)(U \wedge U)$$

для всех $v^* \in V^*$, так что разложимость U эквивалентна справедливости равенства $U \wedge U = 0$. При $n = 4$ условие $U \wedge U = 0$ даёт единственное квадратичное уравнение.

53.1. а) $(x, y) \to \left(\dfrac{x}{x-y}, \dfrac{1}{x-y}\right)$. б) $(x, y) \to \left(\dfrac{1-y}{x}, \dfrac{x+y}{x}\right)$.

53.2. а) $(x, y) \to \left(\dfrac{x}{1-y}, \dfrac{1+y}{1-y}\right)$. б) $(x, y) \to \left(\dfrac{1}{x}, \dfrac{y}{x}\right)$.

53.3. а) $(x, y) \to \left(\dfrac{2x+1}{x+2}, \dfrac{y\sqrt{3}}{x+2}\right)$. б) $(x, y) \to \left(\dfrac{2x-1}{x-2}, \dfrac{y\sqrt{3}}{x-2}\right)$.

53.4. а) $(x, y, z) \to \left(\dfrac{1+z}{y}, \dfrac{1-z}{y}, \dfrac{x}{y}\right)$.

б) $(x, y, z) \to \left(\dfrac{x+y}{z+1}, \dfrac{z-1}{z+1}, \dfrac{x-y}{z+1}\right)$.

в) $(x, y, z) \to \left(\dfrac{z}{x}, \dfrac{y}{x}, \dfrac{1}{x}\right)$.

53.5. а) $\min(k-1, n-k)$. б) $\min(k, n-k-1)$.

53.10. Рассмотреть дополнения к аффинным картам.

53.11. $q^n + q^{n+1} + \ldots + 1$.

53.12. $\dfrac{(q^{n+1}-1)(q^{n+1}-q)\ldots(q^{n+1}-q^k)}{(q^{k+1}-1)(q^{k+1}-q)\ldots(q^{k+1}-q^k)}$.

53.13. $\dfrac{(q^{n+1}-1)(q^{n+1}-q)\ldots(q^{n+1}-q^n)}{q-1}$.

53.17. Рассмотреть вместе с $P(V)$ ещё $P(V^*)$.

53.20. Использовать предыдущую задачу.

53.22. а) $a_3 = \dfrac{(a_1+a_2)a_2}{3a_1-a_2}$. б) $a_2 = \dfrac{a_1(l-a_1)}{l+a_1}$.

53.25. Выбрать аффинную карту, в которой прямая будет бесконечно удаленной.

53.26. Выбрать аффинную карту, в которой две пары противоположных сторон шестиугольника будут парами параллельных прямых.

53.34. Эта прямая получается применением корреляции, соответствующей данной окружности, к заданной точке.

54.1. а) Нет. б) Да. в) Нет. г) Нет. д) Да. е) Нет. ж) Да.

54.2. Все элементы вида $e_a = \begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ нейтральны слева; нейтральных справа и двусторонних нейтральных нет. Относительно e_a обратимы справа все элементы $\begin{pmatrix} x & y \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ при $x \neq 0$; обратимы слева лишь элементы вида $\begin{pmatrix} x & ax \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ при $x \neq 0$.

54.3. Любой элемент нейтрален справа; относительно любого нейтрального x каждый элемент обратим слева и лишь сам x обратим справа при $|M| = 1$.

54.4. Да; не существует, если $|M| > 1$.

54.5. а) 3. б) Нет.

54.6. Рассмотреть отображение $A \to \overline{A}$.

55.1. Все множества в а), кроме $\mathbb{N}$, все множества в в), кроме $\mathbb{N}_0$, г), д), е), ж), з), и) при $r = 1$ и при $r = 0$, л) при $\varphi_k = 2k\pi/n$ (считая, что $\varphi_1 < \varphi_2 < \ldots < \varphi_n$).

55.2. Группе и) при $r = 1$.

55.5. б), в), г), д), з), и), к), л).

55.6. а), г), д) при $d = 1$, е), з), л), м), н), о), п), р), с) при $\lambda < 0$, т).

55.13. а) и в).

55.16. Рассмотреть элемент $(xy)^2$.

55.17. а), в), д), е).

55.18. Для коммутативных групп.

55.19. Будет.

55.20. $\{\mathbb{Z}, n\mathbb{Z}, \mathbf{UT}_2(\mathbb{Z})\}$, $\{\mathbb{Q}, \mathbf{UT}_2(\mathbb{Q})\}$, $\{\mathbb{R}, \mathbf{UT}_2(\mathbb{R}), \mathbb{C}, \mathbf{UT}_2(\mathbb{C})\}$, $\{\mathbb{Q}^*\}$, $\{\mathbb{R}^*\}$, $\{\mathbb{C}^*\}$.

55.21. $[k] \to [2^k]$ и $[k] \to [3^k]$.

55.22. Если в группе тождественно $x^2 = e$, то см. задачу 55.16; в противном случае найти некоммутирующие элементы x и y, для которых $x^2 = y^3 = 1$.

55.23. Других автоморфизмов нет.

55.25. а) Равнобедренный, но не равносторонний треугольник или пара точек.

б) $[KB] \cap [LC] \cap [MA]$, где K, L, M — середины сторон правильного треугольника ABC.

в) Правильный треугольник.

г) Параллелограмм или прямоугольник.

55.26. $\mathbf{D}_4$ изоморфна группе из задачи 55.5, л); $\mathbf{Q}_8$ изоморфна группе из задачи 55.6, г).

55.31. а) $\mathbf{Z}_2$. б) $\mathbf{Z}_{p-1}$. в) $\mathbf{S}_3$. г) $\mathbf{S}_3$.

д) $\mathbf{D}_4$. е) $\mathbf{S}_4$.

55.33. а) $\{e, (123), (132)\}$. б), е) см. задачу 55.2.

55.35. Использовать задачу 55.34.

55.36. Использовать задачи 55.26 и 55.34.

55.38. Эти группы попарно не изоморфны. Рассмотреть центры групп.

56.1. б) Если $A \cup B$ — подгруппа, $x \in A \setminus B$, $y \in B \setminus A$, рассмотреть xy.

в) Рассмотреть $x \in (C \setminus A) \cap (C \setminus B)$.

56.2. Для любого элемента a подполугруппы найдутся различные k и l такие, что $a^k = a^l$, откуда $a \cdot a^{k-l-1} = a^{k-l} = e$, так что элемент a обратим в подполугруппе; утверждение неверно для $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z}$.

56.3. а) 6. б) 5. в) 12. г) 8. д) 4. е) 8. ж) 2.

56.4. Рассмотреть случай, когда порядок $E + pX$ является простым числом.

56.5. а) Доказать по индукции, что для любого натурального числа n найдутся такие целые числа m, k, что $(3 + 4i)^n = (3 + 5m) + (4 + 5k)i$.

б) вытекает из а).

56.6. а) 2. б) 4. в) 20. г) 0.

56.7. б) Использовать а).

в) Рассмотреть перестановки (123), (12) и (13).

56.8. а) Для взаимно простых чисел p и q существуют u и v такие, что $pu + qv = 1$.

б) Следует из а).

в) Рассмотреть (12) и (123).

56.9. Воспользоваться тем, что порядок цикла равен его длине.

56.11. $n/НОД(n, k)$.

56.13. $p^m - p^{m-1}$.

56.14. а) См. задачу 56.11. б) См. указание к задаче 56.8.

в) Рассмотреть наименьшее из натуральных чисел s, для которых $a^s \in H$.

г) Использовать в). Если d_1 и d_2 — различные делители n, то соответствующие подгруппы имеют различные порядки.

56.15. Если $x^k = e$ и $x = a^l$, то $a^{kl} = e$, откуда $kl \vdots n$ и $l \vdots НОД(n, k)$; элемент a^k имеет порядок $n/НОД(n, k)$, (см. задачу 56.10) и поэтому удовлетворяет условию при $НОД(n, l) = n/k$.

56.18. Пусть $n = |G|$, $d = d(G)$, m — наименьшее общее кратное порядков элементов G.

а) По теореме Лагранжа $d|n$, откуда $x^d = 1$, так что d делится на порядок любого элемента группы, т.е. $m|d$.

б) Пусть $d = p_1^{k_1} \dots p_s^{k_s}$ — разложение на простые множители; в силу а) в G существует элемент x, порядок которого равен $p_1^{k_1} l$, где l и p_1 взаимно просты; тогда x^l имеет порядок $p_1^{k_1}$; аналогично получаются элементы $x_2, \dots, x_s$, и произведение $x_1, \dots, x_s$ (см. задачу 56.8, а)) имеет порядок d.

Утверждения б) и в) неверны для $\mathbf{S}_3$.

56.19. $\mathbf{U}_{p^\infty}$.

56.20. б) Неверно: в группе G биекций плоскости на себя композиция симметрий относительно двух параллельных прямых является параллельным переносом.

в) Множество корней всех степеней из 1; множество диагональных матриц с корнями из 1 на главной диагонали.

56.21. Неверно: в $\mathbf{GL}_2(\mathbb{R})$ элементы порядка 2 не составляют подгруппу (см. ответ к задаче 56.20, б)).

55.24. $\mathbf{Z}_{p^k}$ (p — простое число).

56.24. а) Выписать явно все подгруппы (см. задачу 56.14, г)).

б) $\mathbf{Z}_{p^k}$ (p – простое число); заметить, что группа является объединением своих циклических подгрупп, и если они образуют цепь, то группа циклическая, далее использовать задачу 56.14, г).

в) $\mathbf{Z}_{p^n}$ $\mathbf{U}_{p^\infty}$; пусть p — наименьший из порядков элементов группы; p — простое число, так как из $p = kl$ следует, что в подгруппе $\langle x \rangle$ имеется элемент порядка k; $\langle x \rangle_p$ — наименьшая неединичная подгруппа, содержащаяся во всех других подгруппах, так что порядки всех элементов делятся на p и на самом деле являются степенями p.

56.25. $\bigcup\limits_{n \in N} \left\langle \dfrac{1}{n!} \right\rangle$.

56.26. $\cos \dfrac{2k\pi}{n} + i \sin \dfrac{2k\pi}{n} \to [k]$.

56.27. а) $\cong$ б). в) $\cong$ е). г) $\cong$ д) $\cong$ ж).

56.28. Если в группе G нет элементов порядка 2, то

$$G = \{(x, x^{-1})(x \neq e)\} \cup \{e\}$$

и $|G|$ нечётен.

56.29. Эта группа не является циклической, так как она имеет порядок 8, но порядок каждого элемент не превосходит 4.

56.30. См. задачу 56.24, в).

56.31. б) Показать, что если конечная абелева группа содержит не более одной подгруппы любого заданного порядка, то она циклическая, и воспользоваться а).

56.32. а) E, $\mathbf{S}_3$, $\langle (ij) \rangle$, $\langle (123) \rangle$.

б) E, $\mathbf{D}_4$, $\langle(13)\rangle$, $\langle(24)\rangle$, $\langle(12)(34)\rangle$, $\langle(13)(24)\rangle$, $\langle(14)(23)\rangle$, $\langle(1234)\rangle$, $\mathbf{V}_4$.

в) E, $\mathbf{Q}_8$, $\langle i\rangle$, $\langle j\rangle$, $\langle k\rangle$.

г) E, $\mathbf{A}_4$, $\langle(12)(34)\rangle$, $\langle(13)(24)\rangle$, $\langle(14)(24)\rangle$, $\mathbf{V}_4$, $\langle(123)\rangle$, $\langle(124)\rangle$, $\langle(134)\rangle$, $\langle(234)\rangle$.

56.33. а) $(ij) = (1i)(1j)(1i)$.

56.34. а) $\mathbf{D}_4$. б) $\mathbf{D}_2(\mathbb{R})$ при $a \neq b$; $\mathbf{SL}_2(\mathbb{R})$ при $a = b$. в) $\langle g\rangle$.

56.35. а) $\mathbf{D}_4$.

б) $\mathbf{S}_3$ как подгруппа $\mathbf{S}_4$, состоящая из перестановок с неподвижным элементом 4.

в) $\{e, (12), (34), (12)(34)\}$.

г) $\mathbf{S}_4$. д) $\mathbf{A}_4$.

56.40. Использовать задачу 56.39.

57.1. а) Две орбиты; одна состоит только из одного нулевого вектора, другая — из всех ненулевых векторов.

б) Каждая орбита состоит из всех векторов одинаковой длины.

в) Каждому подмножеству $I \subseteq \{1, 2, \ldots, n\}$ отвечает орбита O_I, состоящая из тех векторов x, у которых координата x_i равна 0 тогда и только тогда, когда $i \in I$. Всего 2^n различных орбит.

г) Всего $n+1$ различных орбит $O, O_1, \ldots, O_n$, где O состоит только из нулевого вектора, а O_i, $i \geqslant 1$, — из всех таких векторов $x = \sum_{t=1}^{n} x_t e_t$, для которых $x_i \neq 0$ и $x_j = 0$ для всех $j > i$.

57.2. а) G_a содержит только тождественный оператор.

б) G_a состоит из операторов с матрицами $A = (a_{ij})$ такими, что $\sum_{j=1}^{n} a_{ij} = 1$ для любого $i = 1, 2, \ldots, n$.

57.3. а) Группа ортогональных операторов в плоскости $\langle x\rangle^{\perp}$.

б) Группа поворотов в плоскости $\langle x\rangle^{\perp}$.

57.4. а) Орбита G равна X.

б) G_U состоит из всех матриц вида

$$\begin{pmatrix} A & B \\ 0 & C \end{pmatrix},$$

где A — обратимая матрица размера k, C — обратимая матрица размера $n-k$ и B — матрица размера $k \times (n-k)$.

57.5. в) G_f состоит из всех верхнетреугольных матриц в базисе $e_1, \ldots$ $\ldots, e_n$.

57.9. Орбиты: а) $\{1, 5, 4, 9\}$, $\{2, 8\}$, $\{3\}$, $\{6, 10, 7\}$;

б) $\{1, 7, 2, 4\}$, $\{3, 6\}$, $\{5, 8, 9\}$, $\{10\}$.

57.10. а) $\begin{pmatrix} \pm 1 & 0 \\ 0 & \pm 1 \end{pmatrix}$.

б) Рассмотреть, например, отображение

$$\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix} \mapsto e, \qquad \begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix} \mapsto (12)(34),$$

$$\begin{pmatrix}-1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix} \mapsto (13)(24), \qquad \begin{pmatrix}-1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix} \mapsto (14)(23)$$

или установить изоморфизм, занумеровав стороны ромба.

в) Две орбиты: $\{A, C\}$ и $\{B, D\}$,

$$G_A = G_C = \left\{\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}\right\};$$

$$G_B = G_D = \left\{\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}\right\}.$$

57.11. В группу входят n различных поворотов n-угольника вокруг центра и n осевых симметрий; $|\mathbf{D}_n| = 2n$.

57.12. а) 24. б) 12.

в) 60. Все вершины правильного многогранника образуют одну орбиту относительно действия группы вращения многогранника. При этом порядок стационарной подгруппы равен числу ребер, выходящих из вершины.

57.13. а) Каждому вращению куба сопоставить перестановку на множестве диагоналей куба.

б) Каждому вращению тетраэдра сопоставить перестановку на множестве его вершин.

в) Каждому движению тетраэдра сопоставить перестановку на множестве его вершин; полученное отображение в $\mathbf{S}_4$ инъективно, ибо каждое аффинное преобразование определяется однозначно образами четырёх точек общего положения; сюръективность вывести из того факта, что в образе, кроме подгруппы $\mathbf{A}_4$, есть нечётная подстановка.

57.14. а) 4. б) 5.

57.15. а) Орбита G равна Y. б) $G_a = 1$.

57.17. а) $\{az \mid |a| = 1\}$. б) Орбита нуля — весь круг. в) 1.

57.19. По условию задачи $m = hm_0$ для некоторого $h \in G$. Отсюда

$$gm = g(hm_0) = (gh)m_0 = (hg)m_0 = h(gm_0) = hm_0 = m.$$

57.20. а) Заметить, что $ag_1H = ag_2H \to g_1H = g_2H$; и для каждого $x \in G$ $xH = a(a^{-1}xH)$.

б) Проверить, что $\sigma_{ab} = \sigma_a\sigma_b$.

в) Доказать, что условия $gH = agH$ и $a \in gHg^{-1}$ равносильны.

57.21. а) Каждый смежный класс $\{e\}$, $\{x\}$, $\{x^2\}$, $\{x^3\}$ состоит из одного элемента, присвоим им соответственно номера 1, 2, 3, 4, тогда $\sigma_x = (1234)$, $\sigma_{x^2} = (13)(24)$, $\sigma_{x^3} = (1432)$, σ_e — тождественная перестановка.

б) Пусть x — данная симметрия, а y — поворот квадрата на 90°. Тогда $G = H \cup yH \cup y^2H \cup y^3H$, и, занумеровав смежные классы в указанном порядке, имеем: σ_e — тождественная перестановка, $\sigma_y = (1234)$, $\sigma_{y^2} = (13)(24)$, $\sigma_{y^3} = (14)(23)$, $\sigma_x = (24)$, $\sigma_{xy} = (12)(34)$, $\sigma_{y^2x} = (13)$, $\sigma_{y^3x} = (14)(23)$. (Для вычисления воспользоваться соотношением $xy = y^{-1}x$.)

57.23. а) Подгруппа, порождённая группой Клейна и циклом (12).

б) Множество всех степеней данной перестановки.

57.24. а) Подгруппа диагональных матриц. б) Вся группа.

в) Множества матриц вида $\begin{pmatrix} a+b & 2a \\ 3a & 4a+b \end{pmatrix}$, где $a, b \in \mathbb{R}$ и $b^2 + 5ab - -2a^2 \neq 0$.

г) Множество матриц вида $\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix}$, где $a, b \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$.

57.25. а) Подгруппа всех диагональных матриц.

б) Подгруппа всех матриц вида $\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix}$, где A и B — невырожденные матрицы порядка k и $n-k$ соответственно.

57.26. A_1 и A_3 сопряжены, так как имеют одинаковую жорданову форму, а A_1 и A_2 не сопряжены, так как имеют разные жордановы нормальные формы.

57.27. а) C_{ij} как группа порождается матрицами $E + \lambda E_{pq}$, где $j \neq p \neq \neq q \neq i$.

б) λE, $\lambda^n = 1$.

в) $E + {}^t ab$, где a, b — строки, причём $b\,{}^t a = 0$. Последнее утверждение вытекает из в).

57.28. а) $\mathbf{SO}_2(\mathbb{R})$. б) $\pm E$, симметрии относительно OX и OY.

57.30. а) $\mathbf{S}_3 = \{e\} \cup \{(12), (13), (23)\} \cup \{(123), (132)\}$.

б) $\mathbf{A}_4 = \{e\} \cup \{(12)(34), (13)(24), (14)(23)\} \cup$
$\cup \{(123), (134), (142), (243)\} \cup \{(132)(143), (124), (234)\}$.

в) Симметрия относительно средних линий квадрата, повороты квадрата на углы $\pm\pi/2$, центральная симметрия квадрата, тождественное отображение.

57.31. а) Единичная группа.

б) Группа порядка 2; поскольку все неединичные элементы группы сопряжены, порядок группы n должен делится на $n-1$.

в) Группа изоморфна группе подстановок $\mathbf{S}_3$ или имеет порядок 3. В любой группе есть класс, состоящий только из единицы. Пусть n — порядок группы G, а k, l — числа сопряжённых элементов в каждом из классов, $k \leqslant l$. Тогда n делится на k и l и $1 + k + l = n$. Возможные решения: 1) $n = 3$, $k = l = 1$; 2) $n = 4$, $k = 1$, $l = 2$, это решение нужно отбросить, поскольку группы порядка 4 абелевы (т.е. имеют 4 класса); 3) $n = 6$, $k = 2$, $l = 3$;

чтобы установить изоморфизм $G \cong \mathbf{S}_3$, использовать действие группы G сопряжениями (см. задачу 57.22 на классе, состоящем из трёх элементов).

57.32. а) $\{(12)(34), (13)(24), (14)(23)\}$.

б) $\{(123), (132), (124), (142), (134), (143), (234), (243)\}$.

57.34. Пусть $a = (i_1 \dots i_k)(i_{k+1} \dots i_l) \dots$ — разложение перестановки a на независимые циклы. Для вычисления перестановки $c = bab^{-1}$ записать b в виде

$$\begin{pmatrix} i_1 & \dots & i_k & i_{k+1} & \dots & i_l & \dots \\ j_1 & \dots & j_k & j_{k+1} & \dots & j_l & \dots \end{pmatrix}.$$

Тогда $c = (j_1 \dots j_k)(j_{k+1} \dots j_l) \dots$

57.35. а) 5. б) 7. в) 11.

г) $\dfrac{n+6}{2}$, если n чётно, и $\dfrac{n+3}{2}$, если n нечётно; для нахождения числа элементов, сопряжённых с данным, достаточно найти порядок его централизатора; обратить внимание на то, что поворот вокруг центра на угол π совмещает n-угольник с собой, если n чётно.

57.36. Необходимость следует из равенства следов сопряжённых матриц. Для доказательства достаточности равенства $\varphi_1 + \varphi_2 = 2\pi k$ в качестве сопрягающей матрицы для канонических форм рассмотреть матрицу $\operatorname{diag}(-1, -1, 1)$.

57.37. а) Сопряжённые подгруппы имеют одинаковый порядок.

б) $K = gHg^{-1}$, где $g = \operatorname{diag}(2, 1)$.

57.38. а) $N(H) = \langle H, \left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right)\rangle$.

б) $N(H)$ состоит из всех невырожденных матриц второго порядка, в которых $a_{21} = 0$.

в) $N(H)$ состоит из 8 перестановок, выписанных в ответе к задаче 57.21, б).

57.39. а) $\operatorname{Aut} G$ — циклическая группа порядка 4, состоящая из автоморфизмов возведения в степень $k = 1, 2, 3, 4$.

б) $\operatorname{Aut} G$ — группа второго порядка, в которую кроме тождественного автоморфизма входит автоморфизм возведения в пятую степень.

57.40. а) Каждый автоморфизм группы $\mathbf{S}_3$ определяется своим действием на трёх элементах второго порядка.

б) Любая перестановка неединичных элементов группы $\mathbf{V}_4$ определяет её автоморфизм.

57.41. а) Да, $\operatorname{Aut} \mathbf{Z}_9$ — циклическая группа порядка 6, порождаемая автоморфизмом возведения в квадрат.

б) Нет, $|\operatorname{Aut} \mathbf{Z}_8| = 4$, но квадрат каждого автоморфизма — тождественное отображение.

57.42. $|\operatorname{Aut} \operatorname{Aut} \operatorname{Aut} \mathbf{Z}_9| = 1$. Использовать задачи 57.41 и 57.39.

57.43, 57.44. *Каргаполов М.И., Мерзляков Ю.И.* Основы теории групп. — М.: Наука, 1982. — Гл. 2, § 5.3.

57.45. Пусть $\mathbf{D}_4 = \langle a, b \mid a^4 = b^2 = (ab)^2 = 1\}$. Тогда $\operatorname{Aut}\mathbf{D}_4 = \langle \varphi, \psi \rangle$, где $\varphi(a) = a$, $\varphi(b) = ba$, $\psi(a) = a^{-1}$, $\varphi(b) = b$. При этом $\varphi^4 = \psi^2 = (\varphi\psi) = 1$, т.е. $\operatorname{Aut}\mathbf{D}_4 \simeq \mathbf{D}_4$, $\operatorname{Int}\mathbf{D}_4 = \langle \varphi^2, \psi \rangle$.

57.46. Пусть $\mathbf{D}_n = \langle a, b \mid a^n = b^2 = (ab)^2 = 1\}$. Тогда $\operatorname{Aut}\mathbf{D}_n = \langle \varphi, \psi_k, (k,n) = 1 \rangle$, где $\varphi(a) = a$, $\varphi(b) = ba$, $\varphi(a) = a^k$, $\psi(b) = b$, где $(k,n) = 1$, $1 \leqslant k \leqslant n-1$.

58.1. б) Использовать теорему об определителе произведения матриц.

в) Использовать теорему о чётности произведения перестановок.

58.4. а) $\mathbf{A}_3$. б) $\mathbf{V}_4$.

в) $\mathbf{V}_4$ и $\mathbf{A}_4$. Воспользоваться тем, что порядок подгруппы делит порядок группы, что нормальная подгруппа вместе с любым элементом содержит все сопряжённые, а также задачами 57.27 и 57.30.

58.5. Например, $K = \{(12)(34)\}$, $H = \mathbf{V}_4$.

58.6. $aba^{-1}b^{-1} = a(ba^{-1}b^{-1}) = (aba^{-1})b^{-1} \in A \cap B$.

58.7. Пусть $c \in C$ и $G = H \cup Hx$ разложение группы G на два смежных класса. Тогда любой элемент из C может быть записан в виде hch^{-1} или в виде $hxcx^{-1}h^{-1}$, где $h \in H$.

58.9. Пять классов сопряжённости, состоящих из 1, 15, 20, 12 и 12 элементов. Воспользоваться задачами 57.34 и 58.7. Группа $\mathbf{A}_5$ состоит из четырех классов элементов, сопряжённых в $\mathbf{S}_5$, представителями которых являются e, (12)(34), (124) и (12345). Первый и второй состоят из нечётного числа элементов (1 и 15), поэтому являются классами сопряжённости и в $\mathbf{A}_5$. Третий также не распадается в $\mathbf{A}_5$ на два класса, ибо в качестве x (см. указание к задаче 58.7) можно выбрать перестановку (45), но тогда $(45)(123)(45)^{-1} = (123)$. Наконец, четвёртый распадается в $\mathbf{A}_5$ на два класса, ибо число его элементов 24 не делит порядок группы $\mathbf{A}_5$.

58.10. В соответствии с задачей 58.9 порядок нормальной подгруппы, делящей число 60, можно составить из слагаемых 1, 15, 20, 12, 12, причём в качестве одного из слагаемых непременно нужно взять 1, ибо e входит в любую подгруппу.

58.11. Сначала доказать в). Центр состоит из $\pm E$. Других подгрупп порядка 2 нет, поэтому все они нормальны, (см. задачу 58.3). Классы сопряженности $\{E\}$, $\{-E\}$, $\{\pm I\}$, $\{\pm J\}$, $\{\pm K\}$.

58.12. Подгруппы $\mathbf{D}_k$ в $\mathbf{D}_n$, где k делит n, и подгруппа вращений в $\mathbf{D}_n$.

58.14. λE.

58.16. в) Вытекает из задачи 56.4.

г) По в) при естественном гомоморфизме $\mathbf{SL}_n(2)$ в $\mathbf{SL}_n(\mathbf{Z}_3)$ группа G отображается инъективно.

58.17. Если α_g — автоморфизм $x \to gxg^{-1}$, то α_e — тождественный автоморфизм, $(\alpha_g)^{-1} = \alpha_{g^{-1}}$, $\alpha_g\alpha_h = \alpha_{gh}$ и

$$(\varphi\alpha_g\varphi^{-1})(x) = \varphi(g\varphi^{-1}(x)g^{-1}) = \varphi(g)x\varphi(g^{-1}) = \alpha_{\varphi(g)}(x)$$

для любого $\varphi \in \operatorname{Aut} G$.

58.19. а) $\mathbf{S}_2$ при $n = 2$ и $\{e\}$ при $n \neq 2$.

б) $\mathbf{A}_3$ при $n = 3$ и $\{e\}$ при $n \neq 3$.

в) Центр является единичным при нечётных n, а при чётных включает ещё поворот на угол π.

58.21. Элемент лежит в центре тогда и только тогда, когда он совпадает со всеми сопряжёнными ему элементами. Поэтому, если в центре лежит лишь одна единица, то $p^n = 1 + p^{k_1} + \ldots + p^{k_i}$ $(k_i \geqslant 1)$ (число элементов любого класса сопряжённости делит порядок группы). Но тогда 1 делится на p.

58.22. б) Центр состоит из матриц вида $E + bE_{13}$.

в) Класс сопряжённости нецентрального элемента $E + aE_{12} + bE_{13} + cE_{23}$ состоит из матриц вида $E + aE_{12} + xE_{13} + cE_{23}$ $(x \in \mathbf{Z}_p)$.

58.23. а) $\{\lambda E\}$. б) $\{\pm E\}$. в) Вся группа. г) $\{E\}$.

д) $\{\pm E\}$. е) $\{\alpha E \mid \alpha^n = 1\}$. ж) $\{E + \lambda E_{1n}\}$.

58.26. Группа H изоморфна факторгруппе группы G.

58.27. Гомоморфизм определяется образом порождающего элемента a. Ниже указаны возможные образы этого элемента.

а) Любой элемент группы; число гомоморфизмов равно n.

б) $e, b^3, b^6, b^9, b^{12}, b^{15}$. в) e, b, b^2, b^3, b^4, b^5. г) e, b^5, b^{10}. д) e.

58.28. Найти образ $a/2$, если $a \mapsto 1$.

58.29. а) $\mathbf{Z}_n$. б) $\mathbf{Z}_4$. в) $\mathbf{Z}_3$. г) $\mathbf{Z}_2$.

58.30. Построить линейное отображение F^n на F^{n-k} с ядром H.

58.31. Рассмотреть отображения:

а) $x \to \cos 2\pi x + i \sin 2\pi x$; б) $z \to \dfrac{z}{|z|}$;

в) $z \to |z|$; г) $z \to z^n$; д) $z \to z^n$.

е) $z \to \left(\dfrac{z}{|z|}\right)^n$; ж) $z \to \dfrac{z}{|z|}$; з) $z \to |z|$.

58.32. Для доказательства изоморфизма вида $X/Y \cong \mathbb{Z}$ найти гомоморфизм X на $\mathbb{Z}$ с ядром Y.

58.33. Воспользоваться тем, что каждый элемент $g \in G$ однозначно представим в виде kh, где $k \in K$, $h \in H$. Доказать, что отображение $g \to k$ является при этом гомоморфизмом $G \to K$.

58.34. В силу задачи 57.13 группа $\mathbf{S}_4$ действует на кубе. Отсюда, если занумеровать три пары противоположных граней куба числами 1, 2, 3, мы

получим действие группы на множестве $\{1, 2, 3\}$. Проверить, что ядром этого действия является подгруппа $\mathbf{V}_4$.

58.35. Проверить, что пересечение N всех подгрупп группы G, сопряжённых в G с H, является нормальной в G подгруппой. С помощью задачи 57.20 установить, что факторгруппа G/N изоморфна некоторой подгруппе группы $\mathbf{S}_k$.

58.36. Пусть N — нормальная в G подгруппа, построенная в решении задачи 58.35. Тогда $p!$ делится на $|G/N|$ и $|G/N| \geqslant p$, ибо $N \subseteq H$. Но по условию p — минимальный простой делитель числа $|G|$, а значит, и у числа $|G/N|$ не может быть простых делителей, меньших, чем p, так как $|G|$ делится на $|G/N|$. С другой стороны, в разложении числа $p!$ все простые делители, кроме одного, меньше p. Поэтому $|G/N| = p$, т.е. индексы, а следовательно, и порядки подгрупп N и H совпадают. Из включения $N \subseteq H$ следует тогда равенство $N = H$ (и нормальность подгруппы H).

58.37. Любой линейный оператор действует на одномерных подпространствах, переставляя их. Проверить, что в двумерном пространстве над $\mathbf{Z}_3$ имеется четыре одномерных подпространства, которые можно произвольным образом переставить с помощью подходящего линейного оператора. Проверить, наконец, что ядром действия является центр группы $\mathbf{GL}_2(\mathbf{Z}_3)$.

58.38. В собственную подгруппу порядка n попадают все смежные классы вида $k/n + \mathbb{Z}$, где k — любое целое число.

58.39. Рассмотреть отображение, сопоставляющее каждому $g \in G$ автоморфизм $x \to gxg^{-1}$.

58.40. Если $G/\mathbb{Z} = \langle a\mathbb{Z} \rangle$, то любые элементы $x, y \in G$ имеют вид $x = a^k z_1$, $y = a^l z_2$, а тогда $xy = yx$.

58.41. Использовать задачи 58.21 и 58.40.

58.42. Использовать задачи 58.39 и 58.40.

58.43. p^2+p-1, причём p классов состоят из одного элемента, а остальные — из p элементов. Вывести из задач 58.21 и 58.40, что центр $\mathbb{Z}$ имеет порядок p. Централизатор любого элемента $a \notin \mathbb{Z}$ имеет порядок p^2, так как он содержит $\mathbb{Z} \cup \{a\}$ и не совпадает со всей группой. Число сопряжённых с a элементов равно $p^3 : p^2 = p$.

58.44. а) Проверить, что произведения $a_0 b_1 \ldots a_{n-1} b_{n-1} a_n$ элементов максимальных подгрупп A и B составляют подгруппу C, строго содержащую A и B (а значит, совпадающую с G). Элементы из $A \cap B$ перестановочны с элементами из C, так как A и B коммутативны.

б) Пусть H — некоторая максимальная подгруппа в G: $H \neq \{e\}$, так как G не является циклической группой. Обозначим $|H| = m$ и $|G| = n = lm$. Из максимальности подгруппы H и простоты группы G следует, что нормализатор N подгруппы H в группе G совпадает с H, т.е. существует l различных сопряжённых с H максимальных подгрупп. Если допустить, что

их попарные пересечения содержат только e, то в их объединение входит $1+l(m-1)$ элементов из G. Поскольку $lm-l+1<n$, то найдется элемент, не лежащий ни в одной из них, а значит, найдется содержащая этот элемент максимальная подгруппа K, не сопряжённая с H. Пусть опять $|K|=m_1$ и $n=l_1m_1$. Тогда, допустив, как и выше, что $l+l_1$ максимальных подгрупп попарно пересекаются по $\{e\}$, получим

$$1+l(m-1)+l_1(m_2-1) \geqslant 1+\frac{n}{2}+\frac{n}{2} > n$$

элементов в G.

в) Одна из максимальных подгрупп некоммутативна, иначе, как видно из пп. а), б), в группе G был бы нетривиальный центр вопреки её простоте.

58.45. См.: *Gorenstein D.* Finite groups. — Harper and Row, 1968. — Гл. 2, § 8.

58.46. Пусть G — конечная подгруппа в $\mathbf{SL}_2(\mathbb{Q})$. Ввести в пространстве $\mathbb{R}^2$ новое скалярное произведение

$$(x,y)_G = \sum_{g\in G}(gx,gy),$$

где $(x,y)=x_1y_1+x_2y_2$ для строк $x=(x_1,x_2)$ и $y=(y_1,y_2)$. Показать, что относительно этого скалярного произведения каждый оператор g становится ортогональным. Поэтому G состоит из поворотов и отражений. Вывести, что $G\subseteq \mathbf{D}_n$ для некоторого n. Так как $\operatorname{tr} g\in\mathbb{Q}$, то, используя задачу 4.13, показать, что n равно $3, 4$ или 6.

58.47, 58.51. См.: *Супруненко Д.А.* Группы матриц. — М.: Наука, 1972. — Гл. III.

58.52. См.: Изоморфизмы классических групп над целостными кольцами. — М.: Мир, 1980. — С. 252–258.

59.1. а) $(q^n-1)(q^n-q)\ldots(q^n-q^{n-1})$. При подсчете числа невырожденных матриц заметить, что если уже выбраны i первых строк, то для выбора $(i+1)$-й строки имеется q^n-q^i возможностей: действительно, всего существует q^n различных строк длины n над полем из q элементов, но в качестве $(i+1)$-й подходят лишь те из них, которые не являются линейными комбинациями i строк, выбранных раньше. Число таких линейных комбинаций — это число упорядоченных наборов, составленных из i коэффициентов, т.е. q^i.

б) $\dfrac{1}{1-q}(q^n-1)(q^n-q)\ldots(q^n-q^{n-1})$; подгруппа $\mathbf{SL}_n(\mathbb{F}_q)$ есть ядро гомоморфизма $A\to\det A$ группы $\mathbf{GL}_n(\mathbb{F}_q)$ на мультипликативную группу поля $\mathbf{Z}_q$ (состоящую из $q-1$ элементов). Отсюда по теореме о гомоморфизме $|\mathbf{GL}_n(\mathbb{F}_q)/\mathbf{SL}(\mathbb{F}_q)|=q-1$; остается применить а) и теорему Лагранжа.

59.2. а) Нет; найти число элементов второго порядка в этих группах.

б) Нет; заметить, что матрица $2E$ лежит в центре группы $\mathbf{SL}_2(\mathbf{Z}_3)$ и воспользоваться задачей 58.13, а).

59.3. а) 2-подгруппы $\langle(12)\rangle$, $\langle(13)\rangle$, $\langle(23)\rangle$; 3-подгруппа $\langle(123)\rangle$.

б) 2-подгруппа $\mathbf{V}_4$; 3-подгруппы $\langle(123)\rangle$, $\langle(124)\rangle$, $\langle(134)\rangle$, $\langle(234)\rangle$.

59.4. а) Первая и вторая (см. ответ к задаче 59.3, а)) из силовских 2-подгрупп сопряжены с помощью перестановки (23), первая и третья — с помощью (13).

б) Первая и вторая из силовских 3-подгрупп сопряжены с помощью перестановки (12)(34), первая и третья — с помощью (13)(24), первая и четвертая — с помощью (23)(14).

59.5. Занумеровав вершины квадрата, получить изоморфное представление группы $\mathbf{D}_4$ перестановками: $\mathbf{D}_4 \simeq P \subset \mathbf{S}_4$. Поскольку $|\mathbf{D}_4| = 8$ и $|\mathbf{S}_4| = 24 = 8 \cdot 3$, P — силовская 2-подгруппа в $\mathbf{S}_4$. Другие силовские 2-подгруппы группы $\mathbf{S}_4$ изоморфны P в силу сопряженности.

59.6. а) В подгруппе $\{e, (1324), (1423), (12)(34), (13)(24), (14)(23), (12), (34)\}$.

б) В подгруппе $\{e, (1234), (1432), (13)(24), (12)(34), (14)(23), (13), (24)\}$.

в) В каждой из трех силовских 2-подгрупп.

59.7. Эти группы неизоморфны по задаче 59.2. Если в некоторой неабелевой группе G порядка 8 есть подгруппа второго порядка, не лежащая в центре, то $G \cong \mathbf{D}_4$; это следует из задач 57.20 и 59.5. В противном случае обозначаем e и $-e$ — элементы центра группы G (по задачам 58.21 и 58.22 центр группы G состоит из двух элементов). Пусть $i, j \in G$ и $ij \neq ji$. Обозначим $k = ij$, $i^{-1} = -i$, $j^{-1} = -j$, $k^{-1} = -k$. Проверить, что естественное отображение группы G на группу кватернионов является изоморфизмом.

59.8. Решая в группе $\mathbf{SL}_2(\mathbf{Z}_3)$ уравнение $X^2 = E$, получаем лишь два решения: $X = \pm E$. Аналогично находим шесть элементов порядка 4, решая уравнение $X^2 = -E$. Из них уже не извлекаются квадратные корни, т.е. в $\mathbf{SL}_2(\mathbf{Z}_3)$ нет элементов порядка 8. Поскольку получилось восемь элементов, порядки которых — степени двойки, в $\mathbf{SL}_2(\mathbf{Z}_3)$ есть лишь одна силовская 2-подгруппа, так как $|\mathbf{SL}_2(\mathbf{Z}_3)| = 24 = 8 \cdot 3$ по задаче 59.2. Следовательно, это подгруппа нормальна. Она неабелева, так как, например, элементы $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ и $\begin{pmatrix} -1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ имеют порядок 4 и не коммутируют. Далее использовать задачу 59.7.

59.9. а) 5. б) 10. в) 6.

59.10. p^m, где $m = \left[\dfrac{n}{p}\right] + \left[\dfrac{n}{p^2}\right] + \left[\dfrac{n}{p^3}\right] + \ldots$

59.11. $(p-2)!$. Число $p!$ делится на p, но не делится на p^2. Значит, каждая силовская p-подгруппа состоит из степеней одного цикла $(i_1 i_2 \ldots i_p)$. Число таких циклов равно $(p-1)!$, а число различных порождающих в циклической подгруппе порядка p равно $p-1$.

59.12. Воспользоваться теоремой о сопряжённости силовских подгрупп.

59.13. а) $|\mathbf{SL}_2(\mathbf{Z}_p)| = p(p-1)(p+1)$ (см. задачу 59.1). Значит, силовская p-подгруппа имеет порядок p.

б) Нормализатор состоит из всех матриц вида $\begin{pmatrix} x & y \\ 0 & x^{-1} \end{pmatrix}$, где $x \neq 0$.

в) Поскольку порядок нормализатора равен $p(p-1)$, его индекс, а значит, и число различных силовских p-подгрупп, равно $p+1$.

г) Использовать задачу 59.1.

д) Множество всех матриц вида $\begin{pmatrix} x & y \\ 0 & z \end{pmatrix}$, где $x, z \neq 0$.

е) $p+1$.

59.14. Доказать, что порядок подгруппы и максимальная степень числа p, делящая $|\mathbf{GL}_n(\mathbb{Z}_p)|$, равны $p^{n(n-1)/2}$ (см. задачу 59.1).

59.15. а) Если p нечётно, то силовская p-подгруппа единственна и состоит из поворотов правильного n-угольника на углы $2\pi k/p^l$, $0 \leqslant k < p^l$, где p^l — наибольшая степень числа d, делящая n. Пусть $n = 2^l \cdot m$, где m нечётно. Тогда в $\mathbf{D}_n$ содержится m различных силовских 2-подгрупп. Каждую такую подгруппу можно получить, если выбрать правильный 2^l-угольник, вершины которого содержатся среди вершин данного n-угольника (а центр тот же), и рассмотреть все движения, совмещающие его с собой.

б) При $p = 2$ в качестве сопрягающих элементов можно взять повороты на углы $2\pi k/m$, $0 \leqslant k < m-1$.

59.16. Пусть $|G| = p^l \cdot m$, где m не делится на p, и $|\operatorname{Ker}\varphi| = p^s \cdot t$, где t не делится на p. Тогда $H \simeq G/\operatorname{Ker}\varphi$, и по теореме Лагранжа порядок силовской p-подгруппы P в H равен p^{l-s}. С другой стороны, $|P \cap \operatorname{Ker}\varphi| \leqslant p^s$, ибо $|\operatorname{Ker}\varphi|$ делится на $|P \cap \operatorname{Ker}\varphi|$. Значит, $|\varphi(P)| = |P/P \cap \operatorname{Ker}\varphi| \geqslant p^{l-s}$, что и требовалось.

59.17. Очевидно, что $P \subseteq \varphi_A(P) \times \varphi_B(P)$, где φ_A и φ_B — гомоморфизмы проецирования на A и B соответственно. Это включение на самом деле является равенством, как видно из сравнения порядков $|P|$, $|\varphi_A(P)|$ и $|\varphi_B(P)|$.

59.18. а) Пусть $|G| = p^l \cdot m$ и $|H| = p^s \cdot t$, где m, t не делятся на p. Тогда порядок p-подгруппы PH/H в G/H не больше p^{t-s}. Значит, порядок ядра $P \cap H$ естественного гомоморфизма $P \to PH/H$ не меньше p^s, что и требуется доказать.

б) В качестве P и H взять, например, различные силовские 2-подгруппы в $\mathbf{S}_3$ (см. задачу 59.3).

59.19. См. задачу 58.35.

59.20. Использовать теорему о том, что число различных силовских p-подгрупп делит порядок группы и сравнимо с 1 по модулю p, а также

59.12 и 58.6.

59.21. Пять силовских 2-подгрупп и одна силовская 5-подгруппа (см. указание к задаче 59.20).

59.22. а) К силовской 3-подгруппе H применить задачу 58.35.

б) Если силовская 5-подгруппа не является нормальной, то, как следует из теоремы из числе силовских подгрупп, в группе должно быть 16 различных 5-подгрупп. Поскольку их попарные пересечения тривиальны, в группе не больше, чем $80 - 16 \cdot 4 = 16$ элементов, порядки которых суть степени двойки, они могут образовывать лишь одну силовскую 2-подгруппу, которая, следовательно, нормальна.

в) Решение аналогично б).

59.23. а) См. указание к задаче 59.20.

б) Рассмотреть все матрицы вида $\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, где $b \in \mathbf{Z}_q$, и a принадлежат подгруппе порядка p в мультипликативной группе поля $\mathbf{Z}_q$ (эта подгруппа существует, так как $|q-1|$ делится на p).

59.24. 48.

59.25. Индукция по порядку группы.

59.26. Индукция по порядку группы. Выбрать в G нормальную подгруппу индекса p.

60.1. Если $\mathbb{Z} = A \oplus B$, где $A \neq 0$, $B \neq 0$, и $m \in A$, $n \in B$, то $mn \in A \cap B = \{0\}$. Аналогичное соображение применимо и к группе $\mathbb{Q}$.

60.2. В группах $\mathbf{S}_3$, $\mathbf{A}_4$, $\mathbf{S}_4$ нет нормальных подгрупп, пересекающихся по единице, а в $\mathbf{Q}_8$ любая нетривиальная подгруппа содержит -1; поэтому перечисленные группы неразложимы в прямое произведение.

60.3. Если $\langle a \rangle$ — аддитивная циклическая группа порядка $n = n_1 \cdot n_2$, где $(n_1, n_2) = 1$, то $\langle a \rangle = \langle a^{n_1} \rangle + \langle a^{n_2} \rangle$ (указанные слагаемые имеют соответственно порядки n_2 и n_1, и поэтому их пересечение тривиально).

60.5. а) $\langle a \rangle_6 = \langle a^3 \rangle \times \langle a^2 \rangle$.

б) $\mathbf{Z}_{12} \simeq \mathbf{Z}_3 \oplus \mathbf{Z}_4$.

в) $\mathbf{Z}_{60} \simeq \mathbf{Z}_3 \oplus \mathbf{Z}_4 \oplus \mathbf{Z}_5$ (укажите порождающие элементы слагаемых).

60.6. Следует из представления комплексных чисел в тригонометрической форме.

60.7. Элемент из $\mathbf{Z}_{2^n}$ обратим тогда и только тогда, когда его класс содержит нечётное число, поэтому порядок мультипликативной группы кольца $\mathbf{Z}_{2^n}$ равен 2^{n-1}. Элемент $3 = 1+2 \pmod{2^n}$ имеет порядок 2^{n-2} и его циклическая подгруппа тривиально пересекается с подгруппой $\{\pm 1\}$; поэтому их произведение имеет порядок 2^{n-1}, т.е. совпадает с группой $\mathbf{Z}^*_{2^n}$.

60.8. а) Произведению порядков сомножителей.

б) Наименьшему общему кратному порядков компонент.

60.9. Используя предыдущую задачу, показать, что $(A_1 + A_2 + \ldots$ $\ldots + A_{i-1}) \cap A_i = \{0\}$ при любом i.

60.11. Если $m = p_1^{k_1} \ldots p_r^{k_r}$, то в группе существуют элементы порядков $p_1^{k_1}, \ldots, p_r^{k_r}$ (см., например, задачу 60.3). Пользуясь задачами 60.8, 60.7, показать, что их сумма имеет порядок m. В группе $\mathbf{S}_3$ есть элементы порядка 2 и 3, но нет элемента порядка 6. Использовать 56.8, б).

60.12. $\{\pm 1\} \times \langle 2 \rangle = \{\pm 1\} \times \langle -2 \rangle$.

60.13. Одно из слагаемых совпадает с A, другое порождается суммой порождающего элемента группы $\mathbb{Z}$ с любым элементом группы A. Таким образом, будет $|A|$ прямых разложений.

60.14. Каждый класс группы $A \times B$ является произведением класса из A на класс из B.

60.16. В качестве C взять подгруппу, порожденную прообразами базисных элементов A/B.

60.17. $G = A \oplus \operatorname{Ker} \pi$.

60.18. Абелевость группы B существенна, так как образы групп A_1 и A_2 коммутируют при любом гомоморфизме $\varphi : A_1 \times A_2 \to B$.

60.20. а), б), в) $\mathbf{Z}_6$.

г) $\operatorname{Hom}(A_1, B) \oplus \operatorname{Hom}(A_2, B)$.

д) $\operatorname{Hom}(A, B_1) \oplus \operatorname{Hom}(A, B_2)$.

е) $\mathbf{Z}_d$, где $d = (m, n)$.

ж) $\mathbf{Z}_n$. з) $\{0\}$. и) $\mathbb{Z}$.

60.21. Гомоморфизму $\varphi : \mathbb{Z} \to A$ сопоставить $\varphi(1)$.

60.24. а) $\mathbb{Z}$. б) $\mathbf{Z}_n$.

в) $\mathbb{Q}$; показать, что если $\varphi : \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}$ эндоморфизм, то $\varphi(r) = r\varphi(1)$.

60.25. а) Отображение $x \to nx$ имеет тривиальное ядро тогда и только тогда, когда в группе нет элементов, порядок которых делит n, и если $n = p_1^{k_1} \ldots p_r^{k_r}$ — каноническое разложение на простые множители, это означает, что примарные компоненты групп относительно простых чисел $p_1, \ldots, p_r$ равны 0.

б) Сюръективность отображения означает, что в группе уравнение $nx = g$ разрешимо для любого g.

60.26. Эндоморфизму φ поставить в соответствие матрицу так же, как это делается для линейных операторов.

60.27. а) $\mathbf{Z}_2$. б) $\mathbb{Q}^*$.

в) Единичная при $n = 1$, циклическая порядка 2 при $n = 2$, $\mathbf{Z}_2 \times \mathbf{Z}_{2^{n-2}}$ при $n > 2$, 60.6.

г) Группа целочисленных матриц с определителем ± 1. Во всех случаях использовать задачи 60.23 и 60.24.

60.28. а) $\langle a\rangle_{30} = \langle a_1\rangle_2 \oplus \langle a_2\rangle_{15}$, где $a_1 = 15a$, $a_2 = 2a$. При любом автоморфизме $\varphi(\langle a_1\rangle) = \langle a_1\rangle$, $\varphi(\langle a_2\rangle) = \langle a_2\rangle$, так как a_1 и a_2 имеют взаимно простые порядки. Остается заметить, что у $\langle a_1\rangle$ имеется лишь тождественный автоморфизм.

б) Пусть $\mathbb{Z} = \langle a\rangle$, $\mathbf{Z}_2 = \langle b\rangle$; при любом автоморфизме $\varphi(\mathbf{Z}_2) = \mathbf{Z}_2$ и $\varphi(b) = b$. Кроме того, $\varphi(a)$ может быть равен $a, -a, a+b, -a+b$. Нетрудно проверить, что каждый из этих автоморфизмов в квадрате даёт тождественный автоморфизм.

60.29. В обозначениях ответа к предыдущей задаче $\varphi(a) = na + \varepsilon b$, $\varphi(b) = \delta b$, где $n \in \mathbb{Z}$, $\varepsilon, \delta = 0, 1$. Не коммутируют эндоморфизмы φ_1, φ_2, где $\varphi_1(a) = a$, $\varphi_1(b) = 0$, $\varphi_2(b) = 0$, $\varphi_2(a) = b$.

60.30. Всякая примарная компонента инвариантна относительно любого эндоморфизма данной группы; воспользоваться задачей 60.20.

60.31. Индукция по числу порождающих элементов группы. Если группа циклическая и равна $\langle a\rangle$ (операция — сложение), U — её ненулевая подгруппа, k — наименьшее положительное число такое, что $ka \in U$, то U порождается элементом ka. Действительно, если $ma \in U$, разделим m с остатком на k: $m = qk + r$. Тогда $ra = ma - q(ka) \in U$, следовательно, $r = 0$ и $ma = q(ka)$. Предположим, что утверждение доказано для группы с $n-1$ порождающим, $G = \langle a_1, \ldots, a_{n-1}\rangle$ и $U \subseteq G$ — подгруппа. Рассмотрим элементы $u = m_1a_1 + \ldots + m_na_n \in U$. Если $m_n = 0$ для всех $u \in U$, то $U \subseteq \langle a_1, \ldots, a_{n-1}\rangle$, и можно воспользоваться индуктивным предположением. В противном случае пусть m_n^0 — наименьшее положительное число для всех элементов $u \in U$, т.е. существует $u^0 \in U$ такой, что $u^0 = m_1^0a_1 + \ldots$ $\ldots + m_n^0a_n$. Очевидно, любое число m_n, входящее в разложение любого $u \in U$, делится на m_n^0 нацело, скажем, $m_n = qm_n^0$. Тогда $u - qu^0 \in U \cap \langle a_1, \ldots, a_{n-1}\rangle$. Эта подгруппа, по предположению индукции порождается $n-1$ элементом. Тогда U порождается теми же элементами и u^0.

60.32. а) Если φ — гомоморфизм группы G на себя, не являющийся автоморфизмом, то $\operatorname{Ker}\varphi \subset \operatorname{Ker}\varphi^2 \subset \ldots$ — строго возрастающая цепочка подгрупп, и её объединение не может порождаться конечным множеством элементов: каждый из них лежал бы в члене цепочки с конечным номером. Остается воспользоваться предыдущей задачей.

б) Рассмотреть дифференцирование.

60.33. Если бы свободные абелевы группы рангов m и n $(m \neq m)$ были изоморфны, то ранг не был бы инвариантом свободной абелевой группы, однако его инвариантность может быть доказана так же, как основная лемма о линейной зависимости. Можно использовать и такое соображение: если G — свободная абелева группа ранга n, то $|G/2G| = 2^n$.

60.34. Воспользоваться единственностью разложения конечнопорожденных абелевых групп.

60.35. Индукция по порядку группы и числу m.

60.36. Использовать доказательство теоремы единственности конечных абелевых групп.

60.37. Использовать теорему единственности для разложений.

60.40. а) Есть. б) Нет. в) Нет.

60.41. (3,27); показать, что $\langle a\rangle_9 \oplus \langle b\rangle_{27} = \langle a \oplus 3b\rangle \oplus \langle b\rangle$.

60.42. а) Нет: вторая группа циклическая, а первая нет.

б) Изоморфны. в) Не изоморфны.

60.43. а) 3. б) 4.

60.46. Доказать, что конечная абелева группа не является циклической, то в ней найдется подгруппа типа (p,p) (см. задачу 60.40). Учесть, что уравнение $x^p = 1$ имеет в поле не более p решений.

60.47. Пусть $a_1, \ldots, a_n$ — максимальная независимая система элементов. Рассмотреть элемент $1 + a_1 \ldots a_n$ и вывести отсюда, что группа F^* конечна.

60.48. Использовать задачу 60.46.

60.50. Если y_i $(j = 1, \ldots, n)$ составляют базис, то через них можно выразить x_i $(i = 1, \ldots, n)$ с целочисленной матрицей B коэффициентов. Тогда $AB = E$ и $\det A = \pm 1$, где $A = (a_{ij})$.

60.51. Использовать доказательство основной теоремы о конечно порождённых абелевых группах, основанное на приведении матрицы к диагональному виду элементарными преобразованиями строк и столбцов.

60.52. а) $\mathbf{Z}_2 \oplus \mathbf{Z}_2 \oplus \mathbf{Z}_3$. б) $\mathbf{Z}_{31}$. в) $\mathbf{Z}_2 \oplus \mathbf{Z}_3 \oplus \mathbf{Z}_3$. г) $\mathbf{Z}_2 \oplus \mathbf{Z}_4$. д) $\mathbf{Z}_4 \oplus \mathbb{Z}$. е) $\mathbf{Z}_2 \oplus \mathbf{Z}_2 + \mathbb{Z}$. ж) $\mathbf{Z}_3$. з) $\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$. и) $\mathbb{Z}$. к) $\{0\}$.

60.53. 3.

60.55. Учитывая задачи 60.30 и 60.24, остается показать, что кольцо эндоморфизмов конечной примарной нециклической группы некоммутативно. Не уменьшая общности, можно рассмотреть группу $\langle a\rangle_{p^k} \oplus \langle b\rangle_{p^l}$, $k \geqslant l$. В силу задачи 60.20 любой эндоморфизм такой группы имеет вид

$$\varphi(a) = s_1 a + t_1 b, \qquad \varphi(b) = s_2 a + t_2 b,$$

где s_2 делится на p^{k-l}. Не коммутируют, например, автоморфизмы φ, ψ такие, что $\varphi(a) = a$, $\varphi(b) = 0$, $\psi(a) = b$, $\psi(b) = 0$.

60.56. Доказать конечную порождённость H. Для этого выбрать максимальную независимую над $\mathbb{R}$ систему элементов $e_1, \ldots, e_k$ в H. Доказать, что H порождается $e_1, \ldots, e_k$ и конечным множеством $H \cap D$, где $D = \{\sum x_i e_i \mid 0 \leqslant x_i \leqslant 1\}$.

60.59. Использовать задачу 60.56.

60.60. Отображение $x - nx$ есть автоморфизм циклической группы $\langle a\rangle$ (имеет тривиальное ядро), поэтому при подходящем x будет $nx = a$.

60.63. Делимость группы $\mathbb{Q}$ очевидна. Если $\varepsilon^{p^k} = 1$, то существует δ такое, что $\delta^p = \varepsilon$. Если $q \neq p$ — простое число, то $(q, p^k) = 1$, и можно воспользоваться задачами 60.60 и 60.61.

60.65. То, что сумма подгрупп A и B прямая, следует из условия; надо показать, что она равна G. Пусть существует элемент $g \notin A \oplus B$. Подгруппа $\langle g \rangle$ имеет ненулевое пересечение с $A \oplus B$ — иначе сумма $A \oplus B \oplus \langle g \rangle$ прямая и вместо B можно было бы взять $B \oplus \langle g \rangle$, что невозможно в силу максимальности B. Пусть $ng \in A \oplus B$. Можно считать n простым числом (если бы было не так, вместо g мы взяли бы $\dfrac{n}{p} g$ при некотором $p|n$). Итак, $ng = a + b$, $a \in A$, $b \in B$. Ввиду делимости A в ней есть элемент a_1 такой, что $na_1 = a$. Получаем, что $ng_1 = b$, где $g_1 = g - a$ также не лежит в $A \oplus B$. По выбору подгруппы B будет $A \cap \langle g_1, B \rangle \neq 0$. Значит, некоторый элемент $a' \in A$ можно выразить в виде $a' = kg_1 + b'$, $b' \in B$, $0 < k < n$. Так как $(k, n) = 1$, существуют u, v такие, что $ku + nv = 1$, значит, $g_1 = kug_1 + nvg_1$. Так как $ng_1 \in A \oplus B$, $kg_1 = a' - b' \in A \oplus B$, то $g_1 \in A \oplus B$. Получили противоречие.

60.66. Пусть D — сумма всех делимых подгрупп. Нетрудно проверить, что D делима. Пусть $a \in D$, тогда $a = a_1 + \ldots + a_k$, где a_i принадлежит A_i $(i = 1, \ldots, k)$ — делимому слагаемому группы D. Если $na_i' = a_i$, $i = 1, \ldots, k$, то $n \left(\sum_{i=1}^{k} a_i' \right) = a$. Согласно предыдущей задаче вся группа разлагается в прямую сумму $D \oplus B$. Если бы в B нашлась делимая подгруппа, то она содержалась бы в D, что невозможно. Итак, в B нет делимых подгрупп. Факторгруппа всей группы по D изоморфна B.

60.67. Использовать задачу 60.16.

60.68. Использовать задачу 60.67.

60.69. Воспользоваться задачей 60.67.

61.1. а) Рассмотреть элементы, сопряжённые с транспозицией (12) при помощи степеней данного цикла.

б) Элементы из $\mathbf{A}_n$ — произведения чётного числа транспозиций, и $(ij)(jk) = (ijk)$, $(ij)(kl) = (ikj)(ikl)$. (См. задачи 3.15 и 3.16).

61.2. Использовать приведение матриц элементарными преобразованиями строк к ступенчатому виду.

61.3. Невырожденная матрица приводится к диагональному виду элементарными преобразованиями над строками, т.е. умножением слева на соответствующую элементарную матрицу.

61.5. См.: *Gorenstein D.* Finite groups. — Harper and Row, 1968. — P. 44.

61.7. а) $\{1, a\}$, $\{5, a\}$, $\{2, 3\}$, $\{4, 3\}$, где a — любой элемент из $\mathbf{Z}_6$.

б) Две различные транспозиции или транспозиция и тройной цикл.

в) Любые два не взаимно обратные элементы порядка 4.

г) Поворот σ квадрата на угол $\pm\pi/2$ и любая осевая симметрия τ, а также τ и $\tau\sigma$.

д) $\{a, b\}$, $\{a, a+b\}$, $\{b, a+b\}$.

61.10. Если $g_1, \ldots, g_n$ — конечная система порождающих, $f_1, f_2, \ldots$ $\ldots, f_k, \ldots$ — другая система порождающих, то элементы $g_1, \ldots, g_n$ выражаются через вторую систему. В каждом таком выражении участвует лишь конечное число элементов второй системы, скажем, $f_1, \ldots, f_m$. Тогда $f_1, \ldots, f_m$ порождают всю группу.

61.11. Нормальное замыкание элемента A порождается как подгруппа элементами $B^iAB^{-i} = \begin{pmatrix} 1 & 2^i \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ $(i \in \mathbb{Z})$, и поэтому изоморфно группе рациональных чисел вида $m/2^k$ относительно сложения. Эта подгруппа не конечно порождена.

61.12. а) Использовать индукцию по числу возможных сокращений.

б) Операция определена корректно в силу а). Ассоциативность очевидна. Единицей служит пустое слово. Словом, обратным к $u = x_{i_1}^{\varepsilon_1} \ldots x_{i_n}^{\varepsilon_n}$, служит $x_{i_n}^{-\varepsilon_n} \ldots x_{i_1}^{-\varepsilon_1}$.

61.13. Гомоморфизм φ определяется так: если $u = x_{i_1}^{\varepsilon_1} \ldots x_{i_n}^{\varepsilon_n}$, то $\varphi(u) = g_{i_1}^{\varepsilon_1} \ldots g_{i_n}^{\varepsilon_n}$. Это единственно возможное определение.

61.14. Всякое несократимое слово можно записать в виде $u = vwu^{-1}$, где w имеет в начале и в конце не взаимно простые буквы. Тогда $u^n = vw^nv^{-1}$, где длина w^n в n раз больше длины w и вообще $d(u^n) = d(u) + (n-1)d(w)$, поэтому $u^n \neq 1$ (пустому слову).

61.15. Будем считать, что коммутирующие элементы u, v несократимы. Пусть $d(u) \leqslant d(v)$.

1) Если в uv сокращается больше половины слова u, то переходим к словам u, uv (второе более короткое, чем v, и эти слова коммутируют, как и u с v).

2) Если в vu сокращаются больше половины слова u, то, аналогично, переходим к рассмотрению u^{-1}, vu.

3) Если в слове vu^{-1} сокращается больше половины второго сомножителя, переходим к рассмотрению u^{-1}, $u^{-1}v$.

4) Если в vu^{-1} сокращается больше половины первого сомножителя, переходим к uvu^{-1}.

5) В оставшемся случае будет $u = u_1u_2$, где $d(u_1) = d(u_2)$, $v = u_2^{-1}v'$, где между сомножителями нет сокращений. Из равенства $uv = vu$ получаем $u, v' = u_2^{-1}v'u_1u_2$. Так как в $v'u_1u_2$ сокращается не более, чем u_1, получаем $u_1 = u_2^{-1}$ и $u = 1$.

6) Делая каждый раз замены типа (1)–(4), мы в конце концов придем к случаю (5). Рассматривая предыдущий шаг, найдем порождающий элемент, через который выражаются u и v.

61.16. В любом коммутаторе и в произведении коммутаторов сумма показателей по каждому вхождению x_i равна 0 при любом i. Пусть в слове

u сумма показателей при некотором x_i равна $k \neq 0$. Согласно задаче 61.13 построим гомоморфизм свободной группы в $\mathbb{Z}$ такой, что $x_i \to 1$, $x_j \to 0$ $(j \neq i)$. Тогда u перейдет в $k \neq 0$, и следовательно, не лежит в коммутанте.

61.17. Слова, имеющие несократимую запись uw_1u^{-1}, где w_1 — циклическая перестановка w.

61.18. Пусть F — свободная группа со свободными порождающими $x_1, \ldots, x_n$, A — свободная абелева с базисом $a_1, \ldots, a_n$. Если гомоморфизм $F \to A$ продолжает отображения $x_i \to a_1, \ldots, x_n \to a_n$ (см. задачу 61.13), то его ядром является коммутант.

61.19. Воспользоваться задачей 61.16.

61.20. Подгруппа индекса 2 нормальна в любой группе. Задача сводится к описанию различных сюръективных гомоморфизмов свободной группы на группу $\langle a \rangle_2$. Если x_1, x_2 — свободные порождающие свободной группы, то согласно 61.13 нужно по-разному выбрать образы x_1, x_2. Ответ: $\varphi_1(x_1) = a$, $\varphi_1(x_2) = 1$, $\varphi_2(x_1) = a$, $\varphi_2(x_2) = a$, $\varphi_3(x_1) = 1$, $\varphi_3(x_2) = a$, т.е. имеются три подгруппы индекса 2.

61.22. Очевидно, при любом гомоморфизме группы $F = (x_1, x_2)$ в $\mathbf{Z}_n \times \mathbf{Z}_n$ переходят в единицу коммутант, а также x_1^n, x_2^n. Факторгруппа по подгруппе N, порождённой коммутантом и элементами x_1^n, x_2^n, изоморфна $\mathbf{Z}_n \times \mathbf{Z}_n$. Поэтому N будет ядром любого сюръективного гомоморфизма $F \to \mathbf{Z}_n \times \mathbf{Z}_n$.

61.23. а) 16. б) 36; воспользоваться задачей 61.13.

61.25. Согласно задаче 61.13 построим гомоморфизм φ свободной группы F со свободными порождающими $x_1, \ldots, x_n$ в H такой, что $\varphi(x_i) = h_i$, $i = 1, 2, \ldots, n$. При этом гомоморфизме наименьшая нормальная подгруппа R, содержащая слова $R_i(x_1, \ldots, x_n)$, $i \in I$, перейдет в единицу. Если $N = \operatorname{Ker} \varphi$, то $\operatorname{Im} \varphi \simeq F/N \simeq (F/R)/(N/R)$.

61.27. Доказать, что каждый элемент выражается в виде $a^i b^j$, $0 \leqslant i < 2$, $0 \leqslant j < 7$.

61.28. Вывести из определяющих соотношений, что порядок группы $\leqslant 8$, затем воспользоваться задачей 61.25.

61.29. Вывести из определяющих соотношений, что порядок группы $\leqslant 2n$, затем воспользоваться задачей 61.25.

61.30. Вывести из определяющих соотношений, что порядок группы $\leqslant 8$, затем воспользоваться задачей 61.25.

61.31. Согласно задаче 61.25 рассмотреть гомоморфизм этой группы на группу указанных матриц, при котором

$$x_1 \to \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad x_2 \to \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(квадрат второй матрицы равен E); воспользоваться тем, что подгруппа, порождённая x_1x_2, нормальна.

61.32. См. указание к задаче 61.31.

61.34. См.: *Милнор Дж.* Введение в алгебраическую K-теорию. — М.: Мир, 1974. — § 5.

61.35. Каждый смежный класс по H имеет вид g^iH, $i \in \mathbb{Z}$, поэтому любой элемент группы имеет вид g^ih, $h \in H$.

61.36. Пусть $\langle h \rangle$ — бесконечная циклическая подгруппа, порождённая h; факторгруппа G/H бесконечная циклическая, порождённая gH. По предыдущей задаче $G = \langle g \rangle \langle h \rangle$. Так как H нормальна, $ghg^{-1} \in H$ и отображение $x \to gxg^{-1}$ $(x \in H)$ – автоморфизм группы H. Поэтому ghg^{-1}, как и h, — порождающий элемент группы H. Значит, ghg^{-1} равен h или h^{-1}. Поэтому в группе выполнено одно из двух соотношений: $ghg^{-1} = h$, $ghg^{-1} = h^{-1}$. В первом случае группа свободная абелева, так как она порождается элементами x_1, x_2 и задаётся определяющим соотношением $x_1x_2x_1^{-1} = x_2$. Рассмотрим группу с порождающими x_1, x_2 и определяющим соотношением $x_1x_2x_1 = x_2^{-1}$. В этой группе циклическая подгруппа, порождённая x_2, нормальна (видно из определяющего соотношения), факторгруппа по ней бесконечная циклическая (рассмотреть гомоморфизм в $\mathbb{Z}$ такой, что $x_1 \to 1$, $x_2 \to 0$). Элемент x_2 также имеет бесконечный порядок, для этого рассмотрим гомоморфизм нашей группы в группу матриц вида $\begin{pmatrix} \pm 1 & n \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $x_2 \to \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ (см. задачу 61.25).

61.37. Наименьшая нормальная подгруппа, порождённая x, изоморфна аддитивной группе чисел вида $m/2^k$, $m, k \in \mathbb{Z}$. Рассмотреть гомоморфизм в группу матриц второго порядка, при котором $x_1 \to \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $x_2 \to \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ (сравнить с задачей 61.11).

62.1. а) $\begin{pmatrix} \dfrac{1}{a} & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix}$. б) $\begin{pmatrix} 1 & \dfrac{b}{c} + \dfrac{ay - bx}{cz} - \dfrac{y}{z} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. в) $\begin{pmatrix} 1 & \lambda(\beta^2 - 1) \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

62.2. а) $g[a,b]g^{-1} = [gag^{-1}, gbg^{-1}]$. б) $[aG', bG'] = [a,b]G' = G'$.

в) Если $[aN, bN] = N$, то $[a,b]N = N$ и $[a,b] \in N$.

62.3. $\varphi([a,b]) = [\varphi(a), \varphi(b)]$.

62.4. Если $\varepsilon : G \to G/G'$ — естественный гомоморфизм, $\varphi : G/G' \to A$ — гомоморфизм в абелеву группу A, то $\varphi\varepsilon : G \to A$ — также гомоморфизм. Биективность этого соответствия следствия следует из задачи 62.2, в) и того, что ε сюръективен.

62.5. По теореме об определителе произведения $ABA^{-1}B^{-1} = 1$.

62.6. Вытекает из того, что $[(a_1, b_1), (a_2, b_2)] = ([a_1, a_2], [b_1, b_2])$.

62.7. а) $\mathbf{A}_3$, 2. б) $\{e, (12)(34), (13)(24), (14)(23)\}$, 3.

в) $\mathbf{A}_4$, 2. г) $\{\pm 1\}$, 4.

62.8. а) $\mathbf{A}_n$; коммутатор — чётная перестановка и согласно задаче 62.1 в коммутант содержит все тройные циклы; $\mathbf{A}_n$ порождается тройными циклами (см. задачу 61.1).

б) Если элемент $a \in \mathbf{D}_n$ есть поворот на угол $2\pi/n$, то $\mathbf{D}'_n = \langle a \rangle$, если n нечётно, и $\mathbf{D}'_n = \langle a^2 \rangle$, если n чётно.

62.10. а) Индукция с применением предыдущей задачи.

б) Индукция с применением задачи 62.2.

62.11. а) Следует из того, что коммутант подгруппы содержится в коммутанте группы.

б) Следует из задачи 62.3.

в) Индукция с применением задачи 62.6.

г) Так как $B^{(k)} = \langle e \rangle$, то $G^{(k)} \subseteq A$ и $G^{(k+l)} = \langle e \rangle$, где $A^{(l)} = \langle e \rangle$.

62.12. См. задачи 62.7 и 62.8.

62.14. Следует из задачи 62.13, в), так как коммутант этой группы содержится в $\mathbf{UT}_n(K)$.

62.15. Если ряд, указанный в задаче, имеется, то $G^{(l)} = \langle e \rangle$ в силу задачи 62.2, в). Если группа разрешима, то факторы её ряда коммутантов $G^{(i)}/G^{(i+1)}$ абелевы, поэтому между $G^{(i)}$ и $G^{(i+1)}$ можно вставить несколько подгрупп так, что получается ряд с нужными свойствами.

62.16. Согласно задаче 58.21 центр конечной p-группы G нетривиален. Пусть A — подгруппа порядка p, лежащая в центре. Тогда A нормальна в G. Завершается доказательство индукцией с переходом к G/A (тоже p-группа) и использованием задачи 62.12.

62.17. Если $q > p$, то силовская q-подгруппа нормальна в группе (см. указание к задаче 59.20).

62.18. а) Силовская 5-подгруппа нормальна, так как индекс её нормализатора — делитель числа 4 и сравним с 1 по модулю 5.

б) Если в группе порядка 12 силовская 3-подгруппа не нормальна, то таких подгрупп по крайней мере 8. Но по теореме Силова существует подгруппа порядка 4, и тогда она в силу сказанного единственна.

в) Если $p > q$, то число m подгрупп порядка p^2 сравнимо с 1 по модулю p только при $m = 1$. Если $p < q$, то число q-подгрупп сравнимо с 1 по модулю q и делит p или p^2. Так как p оно делить не может, оно равно p^2. Значит, элементов порядка q будет $p^2(q-1)$. Однако подгруппа p^2 существует, поэтому она единственна ($p^2q = p^2(q-1) + p^2$).

г) Силовская 7-подгруппа нормальна.

д) Силовская 5-подгруппа нормальна.

е) Комбинируются соображения задач 62.16, 62.18, в), а также то, что если некоторая силовская подгруппа имеет индекс нормализатора k, то группа представляется подстановками на множестве силовских подгрупп, т.е. на k символах.

62.20. Использовать задачу 62.19.

62.21. Использовать задачу 62.1, в).

62.23. Воспользоваться теоремой и следствием 14.3.1 из книги: *Холл М.* Теория групп. — М.: ИЛ, 1962.

62.26. См.: *Хамфри Дж.* Линейные алгебраические группы. — М.: Мир, 1980. — С. 184–186.

62.27. а) Так как порядок $q-1$ мультипликативной группы $\mathbf{Z}_q$ делится на p, то таких чисел r существует $p-1$ (см. задачу 60.46).

б) Группа, состоящая из матриц $\begin{pmatrix} r^i & x \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, где r — число из а), рассматриваемое по подмодулю q, $x \in \mathbf{Z}_q$ $(0 \leqslant i < p)$, некоммутативна — достаточно рассмотреть матрицы $\begin{pmatrix} r & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ и $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Эта группа имеет порядок pq. Пусть G — неабелева группа порядка pq, $A = \langle a \rangle$ — её силовская подгруппа порядка q, $B = \langle b \rangle$ — силовская подгруппа порядка p. Тогда по теореме Силова (см. также задачу 62.17) A нормальна в G. Поэтому $bab^{-1} = a^{s^i}$, в частности, $b^p a b^{-p} = a = a^{s^p}$; поэтому $s^p \equiv 1 \pmod q$, так как G неабелева. Меняя, если нужно, элемент b на его k-ю степень $(1 < k < p)$, мы можем s заменить на любое число, обладающее аналогичными свойствами. Поэтому если G_1 и G_2 — две неабелевы группы порядка pq, в них можно выбрать элементы a_i, b_i $(i = 1, 2)$, аналогичные a и b, обладающие свойствами: $a_i^q = e$, $b_i^q = e$, $b_i a_i b_i^{-1} = a_i^r$, где $r^p \equiv 1 \pmod q$. Изоморфизм между такими группами устанавливается соответствием $\varphi(a_1^s b_1^t) = a_2^s b_2^t$, где $0 \leqslant s < q$, $0 \leqslant t < p$.

62.28. б) Произведение этих перестановок в указанном порядке есть цикл длины 7. Согласно а) факторгруппа этой группы по коммутанту тривиальна, поэтому группа совпадает со своим коммутантом.

в) Данная группа гомоморфно отображается на группу из б) и согласно задаче 61.25 и поэтому неразрешима.

62.29. Неразрешима, если система свободных порождающих состоит более, чем из одного элемента, так как в этом случае нет нетривиальных абелевых нормальных подгрупп. См. также задачу 62.11, б).

63.1. а), б), г), е), ж), з), к), л), м), н), о) при $D \equiv 1 \pmod 4$.

63.2. в), г), д), е), ж) при $D \equiv 1 \pmod 4$.

з), и) Использовать, что $\sqrt[3]{2}$ не является корнем квадратного трехчлена над $\mathbb{Q}$.

63.3. Все, кроме з).

63.4. Нет.

63.5. См. задачу 1.2.

63.7. 63.2, в); 63.4, г) при $n > 2$; 63.2, д) при $D = c^2$ $(c \in \mathbb{Z})$; 63.2, е) при $D = c^2$ $(c \in K)$; 63.3, а); 63.3, б); 63.3, д) при $|R \setminus D| > 1$; 63.3, и); 63.5.

63.10. Заметить, что $(xy)^{-1} = y^{-1}x^{-1}$.

63.11. а) $\mathbf{Z}_n^*$ состоит из всех таких классов $[k]$, что числа k и n взаимно просты; делителями нуля являются все такие классы $[k]$, что k и n имеют нетривиальный общий делитель; нильпотентными элементами являются все такие классы $[k]$, что k делится на все простые делители n.

б) $\mathbf{Z}_{p^n}^*$ состоит из всех таких классов $[k]$, что k не делится на p; делителями нуля являются все классы вида $[pm]$; каждый делитель нуля нильпотентен.

в) Аналогично а), где вместо n берётся многочлен f.

г) Множества матриц (α_{ij}), у которых соответственно $\alpha_{ii} \neq 0$ $(i = 1, \ldots$ $\ldots, n)$; $\alpha_{ii} = 0$ хотя бы при одном i; все $\alpha_{ii} = 0$.

д) Множества матриц A соответственн о с $\det A \neq 0$, $\det A = \operatorname{tr} A = 0$.

е) Множество функций, не принимающих значение 0; множество функций, принимающих значение 0; нулевая функция.

ж) Обратимыми элементами являются ряды с ненулевым свободным членом; делителей нуля и нетривиальных нильпотентных элементов нет.

63.13. а) Отображение $x \to ax$ $(a \in R,\ a \neq 0)$ — биекция, поэтому $ax = a$ при некотором $x \in R$; любой $b \in R$ представим в виде $b = ya$, и тогда $bx = b$, т.е. x — левая единица.

б) Элемент, обратимый справа, не является правым делителем нуля, и поэтому $x \to xa$ — биекция.

в) Если $ab = 0$ и a не является правым делителем 0, то элементы $x_1 a, \ldots$ $\ldots, x_n a$ попарно различны и один из них равен 1. Утверждение в) неверно в алгебре над $\mathbf{Z}_2$ с базисом (x, y) и таблицей умножения $xy = y^2 = 0$, $yx = y$, $x^2 = x$.

б) Неверно в бесконечномерной алгебре над $\mathbb{Z}$ с базисом $(y^k x^l \mid k, l \in \mathbb{N})$ (элементы x и y не коммутируют) и умножением

$$y^k x^l \cdot y^r x^s = \begin{cases} y^k x^{l-r+s} & \text{при} \quad l > r, \\ y^k x^s & \text{при} \quad l = r, \\ y^{k+r-l} x^s & \text{при} \quad l < r. \end{cases}$$

63.14. Если $ab = 1$, то $(ba - 1)b = 0$.

63.15. б) См. ответ к задаче 63.14.

в) См. ответ к задаче 63.13.

63.16. а) R коммутативно (имеет единицу) тогда и только тогда, когда каждое прямое слагаемое R_i коммутативно (имеет единицу); в R нет делителей нуля тогда и только тогда, когда $k = 1$.

б) Элемент $a \in R$, $a = (a_1, \ldots, a_k)$, $a_i \in R_i$, обратим (нильпотентен) тогда и только тогда, когда каждое a_i обратимо (нильпотентно) в R_i, $i = 1, \ldots, k$.

63.17. а) Отображение $[x]_k \to ([x]_k, [x]_l)$ — изоморфизм.

в) Пара $([x],[y])$ обратима в $\mathbf{Z}_k \times \mathbf{Z}_l$ тогда и только тогда, когда $[x]$ обратим в $\mathbf{Z}_k$, $[y]$ обратим в $\mathbf{Z}_l$; $\varphi(n)$ — число порождающих элементов $\mathbf{Z}_n$.

63.19. б), в) Рассмотреть линейное отображение $\varphi_a : A \to A$, задаваемое формулой $\varphi_a(x) = ax$.

63.20. Использовать существование аннулирующего многочлена у каждого элемента алгебры.

63.21. а) $\mathbb{C} \oplus \mathbb{C}$, $\mathbb{C}[x]/\langle x^2 \rangle$.

б) Кроме алгебр в а), ещё три алгебры: $\mathbb{C}e \oplus \mathbb{C}e$, где $e^2 = 0$; $\mathbb{C}e \oplus \mathbb{C}f$, где $e^2 = ef = fe = 0$, $f^2 = e$; $\mathbb{C}e \oplus \mathbb{C}f$, где $e^2 = 0$, $f^2 = f$.

63.22. а) $\mathbb{R} \oplus \mathbb{R}$, $\mathbb{C}$, $\mathbb{R}[x]/\langle x^2 \rangle$.

б) Кроме алгебр в а), $\mathbb{R}e \oplus \mathbb{R}e$, где $e^2 = 0$; $\mathbb{R}e \oplus \mathbb{R}f$, где $e^2 = 0$, $f^2 = f$, и векторное пространство $\mathbb{R}e \oplus \mathbb{R}f$, где $e^2 = ef = fe = 0$, $f^2 = e$.

63.23. а) Нет.

г) Все кватернионы $x_1 i + x_2 j + x_3 k$ с условием $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1$.

63.24. Использовать базис $T(V)$, построенный с помощью базиса V.

63.25. б) Использовать базис $\Lambda^k(V)$, построенный по базису V.

в) Если x — нильпотентный элемент кольца, то $\alpha + x$ обратим при $\alpha \neq 0$.

63.28. Применить операторы $p_1^{l_1} \ldots p_n^{l_n} q_1^{t_1} \ldots q_n^{t_n}$ к одночленам $x_1^{m_1} \ldots$ $\ldots x_n^{m_n}$.

63.31. б) Нули непрерывной функции образуют замкнутое подмножество. Если $fg = 0$, то нули f и g в объединении дают $[0, 1]$.

64.1. Использовать деление с остатком. а) $n\mathbb{Z}$. б) $f(x)K[x]$.

64.2. а) Рассмотреть идеал $(2, x)$. б) Рассмотреть идеал (x, y).

64.3. Если ненулевая матрица X принадлежит идеалу I, то матрица AXB вида $E_{11} + \ldots + E_{rr} \in I$, откуда $AXBE_{11} = E_{11} \in I$; поэтому $E = E_{11} + \ldots + E_{nn} \in I$.

64.5. Каждый идеал состоит из всех матриц вида $\begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ 0 & a_3 \end{pmatrix}$, где элементы a_k составляют в $\mathbb{Z}$ идеал I_k $(k = 1, 2, 3)$, причём $I_1 \subseteq I_2$ и $I_3 \subseteq I_2$.

64.7. 0; вся алгебра; все матрицы с нулевым первым (вторым) столбцом; все матрицы с одинаковыми столбцами.

64.8. а) 0, L и подалгебра $\langle e \rangle$.

б) 0, L, $\langle 1 + e \rangle$ и $\langle 1 - e \rangle$. Всякий идеал, отличный от 0 и L, является одномерным подпространством в L.

64.12. а) $\langle p \rangle$, где p — простое число.

б) $\langle p(x) \rangle$, где $p(x)$ — многочлен первой степени.

в) $\langle p(x) \rangle$, где $p(x)$ — многочлен первой степени или многочлен второй степени, не имеющий действительных корней.

64.13. Неверно.

64.14. б) Если нет точки, где все функции обращаются в 0, то для каждой точки $a \in [0, 1]$ найдётся такая функция f_a, что $f_a(a) \neq 0$. В силу непрерывности функция $f_a^2(x)$ строго положительна в некоторой окрестности $(a - \varepsilon_a, a + \varepsilon_a)$ точки a (и неотрицательна в остальных точках). Поскольку из каждого покрытия отрезка интервалами можно выбрать конечное покрытие, найдётся конечное число функций $f_1, \ldots, f_k$ из идеала таких, что $f_1^2(x) + \ldots + f_k^2(x) > 0$ для любого x.

64.15. Рассмотреть идеал, порождённый элементом $a \neq 0$. Кольцо с нулевым умножением, аддитивная группа которого циклическая простого порядка, не имеет нетривиальных идеалов, но полем не является.

64.16. Доказать, что полные правые делители нуля (т.е. элементы $a \in R$, для которых $Ra = 0$) образуют левый идеал и поэтому не могут быть отличными от нуля. Если же $ba \neq 0$, то $Ra = R$. Вывести отсюда, что в R вообще нет делителей нуля и что отличные от нуля элементы кольца образуют группу по умножению.

64.17. Пусть $R \ni a \neq 0$. Имеем $Ra \supseteq Ra^2 \supseteq \ldots$, откуда $Ra^k = Ra^{k+1}$ при некотором k. Отсюда $a^k = ba^{k+1}$, $1 = ba$.

64.18. Положить $\delta_1(a) = \min_{x \in K \setminus \{0\}} \delta_1(ax)$.

64.19. а) Рассмотреть норму $\delta(x + iy) = x^2 + y^2$.

б) В этом кольце элементы 2 и $1 \pm \sqrt{3}$ простые, и $4 = 2 \cdot 2 = (1 + i\sqrt{3}) \times$ $\times (1 - i\sqrt{3})$ — два неассоциированных разложения на простые множители.

в) Рассмотреть норму $\delta(x + iy) = x^2 + y^2$.

64.22. См. задачу 8.19.

64.24. Пусть $R \subseteq A \subseteq Q$ и I — идеал в A. Доказать, что $I = \langle r_0 \rangle$, где r_0 порождает идеал кольца, состоящий из числителей всех элементов из I.

64.25. Пусть $R[x]$ — кольцо главных идеалов. Для $0 \neq a \in R$ рассматриваем идеал $I = \langle x, a \rangle$ кольца $R[x]$. Так как $a \in R$, то $I = \langle f_0 \rangle$, где f_0 — константа, т.е. $I = R[x]$. Отсюда $1 = u(x)x + v(x)a$, а $v(0) = 1$, так что R — поле; заметить, что $F[x, y] \cong F[x][y]$.

64.26. (x^n), $n \geqslant 0$.

64.28. а) Представит единицу в виде $1 = a_1 + a_2$, где $a_1 \in I_1$, $a_2 \in I_2$.

б) По индукции свести к случаю $n = 2$. Для каждого $i \geqslant 2$ можно найти элементы $a_i \in I_i$ и $b_i \in I_i$ такие, что $1 = a_i + b_i$. Тогда

$$1 = \prod_{i=1}^{n} (a_i + b_i) \in I_1 + \prod_{i=2}^{n} I_k.$$

Следовательно, $I_1 + \prod_{i=2}^n I_i = A$ и согласно задаче а) можно найти $y_1 \equiv 1 \pmod{I_1}$ и $y_1 \equiv 0 \pmod{\prod_{i=2}^n I_i}$. Аналогично найдутся $y_2, \ldots, y_n \in A$ такие, что $y_j \equiv 1 \pmod{I_j}$ и $y_j \equiv 0 \pmod{I_i}$ при $i \neq j$. Тогда элемент $x = x_1 y_1 + \ldots$ $\ldots + x_n y_n$ удовлетворяет требованиям задачи.

64.29. а) Нет. б) Да.

64.31. а) Использовать задачу 63.11, в).

64.37. а) $n \to 0$. б) $n \to n$; $n \to 0$. в) $n \to 0$.

г) Любой гомоморфизм имеет вид $n \to ne_i$, где e_i — идемпотент кольца матриц; всего восемь гомоморфизмов, соответствующих идемпотентам O, E, E_{11}, E_{22}, $E_{11}+E_{12}$, $E_{21}+E_{22}$, $E_{11}+E_{21}$, $E_{12}+E_{22}$.

64.38. а) $n \to na$, где a — произвольный фиксированный элемент из $\mathbb{Q}$.

б) $n \to 0$, $n \to n$.

64.39. Доказать, что ядро гомоморфизма или равно нулю или совпадает с полем.

64.41. Рассмотреть гомоморфизмы:

а) $f(x) \to f(\alpha)$; б) $f(x) \to f(i)$; в) $f(x) \to f\left(\dfrac{-1+i\sqrt{3}}{2}\right)$.

64.42. Поле получается при $f_1(x) = x^2+x+1$, изоморфные факторкольца — при $f_1(x) = x^2$ и $f_2(x) = x^2+1$. Рассмотреть таблицы умножения для указанных факторколец.

64.43. Нет: в первом факторкольце есть ненулевой элемент, куб которого равен нулю, а во втором факторкольце элемента с таким свойством нет.

64.44. Нет.

64.45. При умножении на элемент $x-a \in F[x]$ любой элемент первого модуля обращается в 0, а во втором модуле это не так; оба факторкольца изоморфны F.

64.46. Пусть $\langle (x-a)(x-b) \rangle = I_1$, $\langle (x-c)(x-d) \rangle = I_2$. Записать произвольный элемент из $F[x]/I_1$ в виде $\alpha(x-a)+\beta(x-b)+I_1$ и поставить ему в соответствие элемент $k\alpha(x-c)+k\beta(x-d)+I_2 \in F[x]/I_2$, где $k = \dfrac{a-b}{c-d}$.

64.47. $\mathbf{A}_1$ и $\mathbf{A}_3$, $\mathbf{A}_2$ и $\mathbf{A}_5$.

64.48. а) Да. б) Нет.

64.49. а) Да. б) Нет.

64.50. Искать обратный элемент к f методом неопределённых коэффициентов.

64.52. Аналогично задаче 63.17.

64.53. См. задачу 64.15.

64.54. Использовать вложение колец без делителей нуля в поле.

64.55. а) Найти делители нуля.

б) Доказать, что каждый ненулевой элемент имеет обратный.

в) Доказать, что данное кольцо не содержит делителей нуля, если n — простое число, не равное сумме двух квадратов, и что конечное ненулевое коммутативное кольцо без делителей нуля является полем.

64.57. Рассмотреть отображение $a_0x^k + \ldots + a_k \to \overline{a}_0x^k + \ldots + \overline{a}_k$, где $\overline{a}_i = a_i + \langle n \rangle$ $(i = 0, \ldots, k)$.

64.58. p^n.

64.59. а) Ввести структуру кольца на прямой сумме $S = R \oplus \mathbb{Z}$.

б) Если R — алгебра над полем K, то превратить в алгебру над K прямую сумму $S = R \oplus K$.

в) Сопоставить каждому элементу a в данной алгебры A линейный оператор φ_a на векторном пространстве A над K, при котором $\varphi_a(x) = ax$.

г) Использовать б).

64.60. Доказать, что $I_k + \cap_{i \neq k} I_i = A$ для всякого $k = 1, \ldots, s$; вывести отсюда сюръективность отображения f.

64.61. Использовать гомоморфизм $f(x) \to (f(1), f(-1))$.

64.63. Показать, что $I \cap \mathbb{Z} \neq 0$ и I содержит нетривиальный по модулю $I \cap \mathbb{Z}$ многочлен.

64.64 – 64.66. Воспользоваться теоремой о гомоморфизмах.

64.67. в) Условие $\det(a_{ij}) \neq 0$ вытекает из сюръективности композиции $\Lambda(V) \xrightarrow{\varphi} \Lambda(V) \longrightarrow \Lambda(V)/I_2$, где I_2 — идеал, порождённый $\Lambda^2(V)$. Для доказательства того, что φ — автоморфизм, необходимо показать, что $\varphi(e_i) \wedge \varphi(e_j) + \varphi(e_j) \wedge \varphi(e_i) = 0$ для всех i, j, а также сюръективность φ. Последнее достаточно показать для отображения φ с единичной матрицей (a_{ij}). Доказательство проводится убывающей индукцией по k, начиная с включения $\Lambda^n V \subset \operatorname{Im} \varphi$.

64.68. б) Аннулятор порождается идемпотентом $1 - e$, где e — порождающий элемент данного идеала.

64.69. Если идеалы $I_1, \ldots, I_n$ порождаются попарно ортогональными идемпотентами $e_1, \ldots, e_n$, то $I_1 + \ldots + I_n$ порождается идемпотентом $e_1 + \ldots + e_n$.

64.70. г) Например, $L_2 = \left\{ \begin{pmatrix} a & a \\ b & b \end{pmatrix} \right\} \oplus \left\{ \begin{pmatrix} a & 2a \\ b & 2b \end{pmatrix} \right\}$, где a, b — любые элементы поля.

д) $\varphi\left(\begin{pmatrix} a & 0 \\ c & 0 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} a & a \\ c & c \end{pmatrix}$, $\varphi\left(\begin{pmatrix} 0 & b \\ 0 & d \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} b & 2b \\ d & 2d \end{pmatrix}$.

64.73. $\mathbf{M}_2(K) = I \oplus J$.

64.75. Рассмотреть ядро гомоморфизма $\mathbf{Z}_{mn} \to \mathbf{Z}_m \oplus \mathbf{Z}_n$, при котором $l + mn\mathbb{Z} \to (l + m\mathbb{Z}, l + n\mathbb{Z})$.

64.76. При n, не делящихся на квадрат простого числа; использовать задачу 64.75.

64.77. Доказать, что идеал, состоящий из всех матриц вида aE_{1n}, лежит в ненулевом идеале этой алгебры.

64.78. Если $R = I_1 \oplus \ldots \oplus I_n$ — разложение кольца R в прямую сумму простых колец и e — идемпотент в R, то $e = e_1 + \ldots + e_n$, где $e_i \in I_i$ —

идемпотенты. Доказать, что в I_i число идемпотентов конечно (использовать задачу 64.16). Затем использовать задачу 64.15.

64.79. Если $A = I_1 \oplus \ldots \oplus I_n$ — вполне приводимая алгебра (I_k — простые алгебры), то $I_1 \oplus \ldots \oplus I_{k-1} \oplus I_{k+1} \oplus \ldots \oplus I_n$ — её максимальный идеал ($k = 1, 2, \ldots, n$).

64.80. Использовать задачу 64.15.

64.81. Конечные циклические группы, порядки которых не делятся на квадрат. Циклическая группа не содержит собственных подгрупп тогда и только тогда, когда её порядок — простое число; использовать разложение циклической группы в прямую сумму примарных циклических групп.

64.82. Пусть $R = I_1 \oplus \ldots \oplus I_n$ — разложение кольца R в прямую сумму минимальных левых идеалов. Если $I \subset R$, то существует $I_{k_1} \nsubseteq I$, и тогда $I_{k_1} \cap I = 0$. Если $I_{k_1} \oplus I \neq R$, то существует $I_{k_2} \nsubseteq I_{k_1} \oplus I$, и $I_{k_2} \cap (I_{k_1} \oplus I) = 0$. В конце концов получаем $I_{k_1} \oplus \ldots \oplus I_{k_s} \oplus I = R$ (при некотором $s < n$).

64.83. а) Если $R = I_1 \oplus \ldots \oplus I_n$ — разложение кольца в прямую сумму минимальных левых идеалов и I — левый идеал в R, то $R = I_1 \oplus \ldots \oplus I_k \oplus I$ при соответствующей нумерации слагаемых (см. указание к задаче 64.82) и $I \simeq R/(I_1 \oplus \ldots \oplus) \simeq I_{k+1} \oplus \ldots \oplus I_n$.

б) $R = I \oplus J$ (см. задачу 64.82), $1 = e_1 + e_2$, где $e_1 \in I$, $e_2 \in J$; доказать, что e_1, e_2 — идемпотенты и что $I = Re_1$.

64.84. Рассмотреть циклическую группу простого порядка с нулевым умножением. См. указание к задачам 64.82, б) и 64.16.

64.85. См. задачу 64.82.

64.88. См. задачу 64.75.

64.89. Линейные оболочки наборов векторов $e_{i_1}, \ldots, e_{i_s}$, где $1 \leqslant i_1 < \ldots$ $\ldots < i_s \leqslant n$. Доказать, что если подмодуль A содержит вектор $\alpha_{i_1} e_{i_1} + \ldots$ $\ldots + \alpha_{i_s} e_{i_s}$, где $\alpha_{i_1} \ldots \alpha_{i_s} \neq 0$, то $e_{i_1}, \ldots, e_{i_s} \in A$.

64.90. $k \to kk_0$, где k_0 — фиксированный, k — произвольный элемент из R, даёт изоморфизм R-модуля R с левым идеалом $I = Rk_0$. Обратно: наличие изоморфизма R-модуля R с левым идеалом $I \subseteq R$ означает, что $I = Rk_0$, где k_0 — образ 1 при этом изоморфизме.

64.91. $F[x] = F[x] \circ 1 \oplus F[x] \circ x \oplus \ldots \oplus F[x] \circ x^{k_1}$, причём $F[x] \circ x^i \simeq F[x]$ (изоморфизм $F[x]$-модулей).

65.1. Пусть I — идеал в $A[x]$. Легко видеть, что множество коэффициентов a_i многочленов $a_0 + a_1 x + \ldots + a_i x^i$ из J является идеалом I в A. Последовательность идеалов $I_0 \subseteq I_1 \subseteq I_2 \subseteq \ldots$ стабилизируется, скажем, на I_r; пусть a_{ij} $(i = 0, \ldots, r,\ j = 1, \ldots, n)$ — образующие для I_i, и пусть для каждого из указанных i, j выбран многочлен f_{ij} из J степени i со старшим коэффициентом a_{ij}. Тогда $\{f_{ij}\}$ — множество образующих J. Для каждого $f \in J$ индукцией по степени можно показать, что f лежит в идеале, порождённом f_{ij}.

65.2. Воспользоваться предыдущей задачей.

65.3. г) Написать формулу для обратного элемента.

д) Рассмотрим три случая.

Случай 1. Среди элементов $-\alpha, -\beta, -\alpha\beta$ есть элемент, равный γ^2 для некоторого $\gamma \in F$. Пусть для определенности $-\alpha = \gamma^2$, $\gamma \in K$. Тогда в A есть, очевидно, делители нуля, и изоморфизм $A \cong \mathbf{M}_2(F)$ можно задать явными формулами, например,

$$1 \to \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad i \to \begin{pmatrix} \gamma & 0 \\ 0 & -\gamma \end{pmatrix}, \quad j \to \begin{pmatrix} 0 & \beta \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad k \to \begin{pmatrix} 0 & \gamma\beta \\ \gamma & 0 \end{pmatrix}.$$

Случай 2. В A есть делитель нуля вида $u+p$, где $u=\gamma\cdot 1$, $\gamma \in K$, $\gamma \neq 0$, $p = x_1 i + x_2 j + x_3 k$ — чистый кватернион. Тогда (см. г)) $N(u+p) = \gamma^2 - p^2 = 0$. Положим $i' = p$ и дополним i' до базиса i', j', k' пространства чистых кватернионов так, чтобы выполнялись соотношения $i'^2 = \gamma^2$, $j'^2 = -\beta$, $i'j' = -j'i' = k'$. Это сводит случай 2 к случаю 1.

Случай 3. В A есть чисто мнимый делитель нуля $p = x_1 i + x_2 j + x_3 k$. Если $x_1 \neq 0$, то, рассматривая кватернион

$$u + x_1\left(1 + \frac{u^2}{4\alpha x_1^2}\right) i + x_2 \left(1 - \frac{u^2}{4\alpha x_1^2}\right) j + x_3 \left(1 + \frac{u^2}{4\alpha x_1^2}\right) k,$$

мы сводим случай 3 к случаю 2. Если $x_1 = 0$, то имеет место случай 1.

е) В матричном представлении д) чистые кватернионы выделяются условием $\operatorname{tr} P = 0$. Таким образом, все нильпотентные матрицы (и только они) представляют чисто мнимые делители нуля в A.

ж) Воспользоваться г), е).

з) Умножением на ненулевой элемент $\lambda \in F$ можно добиться того, что определитель матрицы Q станет квадратом поля F; тогда Q в некоторой системе координат имеет вид $\alpha x_1^2 + \beta x_2^2 + \alpha\beta x_3^2$. Следует обратить внимание на то, что векторное произведение зависит от выбора ориентации. Проверить, что замена ориентации W приводит к замене алгебры A на двойственную алгебру A°, умножение $*$ в которой связано с умножением $\cdot$ в A по правилу $a \cdot b = b * a$ (как векторные пространства A и $A^\cdot$ совпадают). Далее, если A — алгебра кватернионов, то $A \simeq A^\circ$.

65.4. в) Рассмотреть F -линейное отображение $x \to ax$.

д) Свести утверждение к случаю простой алгебры с единицей. Минимальные идеалы имеют вид Ae, где $e^2 = e$.

65.5. в) Подпространство A_0 чистых кватернионов алгебры $A = C_Q^+(F)$ выделяется условием $x = -\overline{x}$, где черта обозначает естественную инволюцию алгебры Клиффорда: $\overline{1} = 1$, $\overline{e_i} = e_i$, $\overline{e_i e_j} = e_j e_i$. В качестве базиса A_0 можно выбрать элементы $e_1 e_2 - \frac{1}{2} Q(e_1, e_2)$, $e_2 e_3 - \frac{1}{2} Q(e_2, e_3)$, $e_1 e_3 - \frac{1}{2} Q(e_1, e_3)$.

65.7. а) Достаточно рассмотреть случай неприводимого многочлена f над $\mathbb{Q}$. Тогда $K = \mathbb{Q}[X]/(f(X))$ — конечное расширение степени n над $\mathbb{Q}$; пусть x — класс $X \pmod{f(X)}$. Тогда отображение $K \to K$, определённое формулой $a \to xa$, является линейным отображением n-мерного векторного пространства K над $\mathbb{Q}$ в себя, причём его минимальный многочлен совпадает с минимальным многочленом элемента x.

65.8. Нет.

65.9. Пусть $I = \langle f_1, \ldots, f_n \rangle$. Для любой точки $z \in \mathbb{C}$ определим неотрицательное целое число $n(z) = \min_i \gamma_z(f_i)$, где $\gamma_z(f_i)$ обозначает порядок нуля функции f_i в точке z (если $f_i(z) \neq 0$, то $\gamma_z(f_i) = 0$. Пусть (z_k) — последовательность всех точек в $\mathbb{C}$, для которых $n(z_k) \neq 0$. Построить целую функцию f, имеющую последовательность (z_k), последовательностью нулей с кратностями $n(z_k)$ и показать, что $I = \langle f \rangle$.

65.10. а) $D = 0$; рассмотреть $x = y = 1$.

б) $f(x)D$, где $f(x) \in \mathbb{Z}[x]$, D — обычное дифференцирование.

в) $\sum f_i D_i$, где $f_i \in \mathbb{Z}[x_1, \ldots, x_n]$, D_i — частные дифференцирования по переменным.

65.12. См.: *Херстейн.* Некоммутативные кольца. — М.: Мир, 1972. — С. 99.

65.13. См.: *Диксмье.* Универсальные обертывающие алгебры. — М.: Мир, 1978. — С. 170, 171.

65.15, 65.16. См.: *Боревич З.И., Шафаревич И.Р.* Теория чисел. — М.: Наука, 1985.

66.2. а) Если $\sqrt{n} \notin \mathbb{Q}$. б) Если $n < 0$.

в) $n = 2$ при $p = 3$; $n = 2, 3$ при $p = 5$; $n = 3, 5, 6$ при $p = 7$.

66.5. Мультипликативная группа поля из четырех элементов имеет порядок 3, и для построения такого поля достаточно иметь матрицу порядка 2 над полем $\mathbf{Z}_2$, для чего достаточно, чтобы она удовлетворяла уравнению $A^2 + A + E = 0$, т.е. $\operatorname{tr} A = \det A = 1$. Такая матрица $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, и поле состоит из элементов $O, E, A, A + E$; при $n = 6$ рассмотреть порядки элементов в аддитивной группе.

66.6. $\{ke \mid k \in \mathbb{Z}\}$; аддитивная группа собственного подполя имеет порядок p и содержит указанное подполе.

66.7. Для поля $\mathbb{Q}$ доказать сначала неподвижность целых чисел при любом автоморфизме; для поля $\mathbb{R}$ заметить, что неотрицательные числа являются квадратами, и поэтому их образы неотрицательны; из $x > y$ следует, что $\varphi(x) = \varphi(x-y) + \varphi(y) > \varphi(y)$; далее воспользоваться рациональными приближениями.

66.8. $z \to z$ и $z \to \overline{z}$; рассмотреть образ i.

66.9. $x + y\sqrt{2} \to x - y\sqrt{2}$ — единственный такой автоморфизм; рассмотреть образ $\sqrt{2}$.

66.10. При $m = 1$ заметить, что биномиальные коэффициенты $\binom{p}{n}$ делятся на p; далее применить индукцию.

б) Ненулевой гомоморфизм поля в себя является автоморфизмом.

66.12. При $m/n = r^2$ $(r \in \mathbb{Q} \setminus \{0\})$.

66.14. Аддитивная группа поля K из четырёх элементов не может быть циклической, и поэтому все её отличные от 0 элементы имеют порядок 2, $K = \{0, 1, a, a+1\}$; при этом умножение определяется однозначно, в частности, $a(a+1) = 1$.

66.15. Например, поле рациональных функций, с комплексными коэффициентами.

66.17. Существует, например, $F_p(X)$.

66.18. а) $\{-1, -3+2\sqrt{2}\}$.

б) $\varnothing$; 13 не является квадратом в $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$.

в) $\varnothing$. г) $\varnothing$.

66.19. а) $\varnothing$. б) (2, 3, 2).

66.23. Все.

66.25. Мультипликативная группа поля из n элементов имеет порядок $n - 1$.

66.26. $x = a$.

66.28. а) 3 и 5. б) 2, 3, 8 и 9.

66.29. Показать, что если $a \neq 0$, то $(ba^{-1})^3 = 1$ и 3 делит $2^n - 1$, что неверно.

66.30. Пусть $F^* = \langle x \rangle$. Доказать, что x алгебраично над простым подполем. Простое подполе отлично от $\mathbb{Q}$, так как $\mathbb{Q}^*$ не является циклической группой.

66.31. а) $\{\pm 1\}$. б) $\varnothing$.

66.32. а) Так как при $p > 2$ в $\mathbf{Z}_p$ нет элементов порядка 2, то $k \to k^{-1}$ — биекция и $\sum_{k=1}^{p-1} k^{-1} = \sum_{k=1}^{p-1} k$.

б) Аналогично а); $8 | (p^2 - 1)$.

66.35, 66.36. См.: *Платонов В.П., Рапинчук А.С.* Алгебраические группы и теория чисел. — М: Наука, 1991. — Гл. I, § 1.1.

66.37, 66.38. Решение аналогично решениям задач 66.35 и 66.36.

66.42 – 66.45. См.: *Боревич З.И., Шафаревич И.Р.* Теория чисел — М.: Мир, 1985.

66.46. Использовать задачу 66.45.

66.47. Использовать нормирование полей p-адических чисел.

67.1. Индукцией по s свести к случаю $s = 1$; в этом случае построить базис A над K, исходя из базисов A над K_1 и K_1 над K.

67.6. Применить задачу 67.4.

67.7. Индукцией по s свести к случаю $s = 2$; в этом случае применить задачи 67.1, 67.4, 67.5.

67.8. Если многочлен $p(x)$ неприводим, то он имеет корень в $K[x]/\langle p(x)\rangle$.

67.9. а) Применить индукцию по степени $f(x)$, используя задачу 67.8.

б) Применить а) к многочлену $f_1(x)\dots f_l(x)$.

67.10. Рассмотреть степени расширений в башне полей $K \subset K(\alpha) \subset \subset K(\theta, \eta)$, где η — корень многочлена $h(x) - \alpha$ в некотором расширении поля L, и воспользоваться задачами 67.1, 67.2.

67.11. а), б) Сравнить разложение многочлена $x^n - a$ на линейные множители в его поле разложения с возможным разложением этого многочлена над полем K.

в) Например, многочлен $x^4 + 1$ над полем вещественных чисел.

67.12. $f(x) = \prod_{i \in \mathbf{F}_p}(x - x_0 - i)$, где $\mathbb{F}_p$ — поле из p элементов, содержащиеся в K. Доказать, что если в некотором расширении L поля K многочлен $f(x)$ имеет корень, то $f(x)$ разлагается над L в произведение линейных множителей, и вывести отсюда, что над K все неприводимые множители многочлена $f(x)$ имеют одинаковую степень.

67.13. а) 1. б) 2. в) 2. г) 6. д) 8.

е) $p - 1$. ж) $\phi(n)$. з) $p(p-1)$.

и) 2^r, где r — ранг матрицы $(\overline{k}_{ij})$, $i = 1, \dots, s$, $j = 0, \dots, t$, над полем вычетов по модулю 2 и $\overline{k}_{ij}$ — класс вычетов по модулю 2 показателя k_{ij} в разложении $a_i = (-1)^{k_{i0}} \cdot \prod_{j=1}^{t} p_j^{k_{ij}}$ числа a_i в произведение степеней различных простых чисел $p_1, \dots, p_t$ (допускается, что некоторые $k_{ij} = 0$).

ж) Показать, что если ζ — первообразный корень n-й степени из 1 и $\mu_\zeta(x)$ — его минимальный многочлен над $\mathbb{Q}$, то для всякого простого $p|n$, ζ_p также является корнем $\mu_\zeta(x)$; в противном случае, если $x^n - 1 = \mu_\zeta(x)h(x)$, ζ является корнем многочлена $h(x^p)$; привести последнее в противоречие с тем, что $x^n - 1$ не имеет кратных множителей над полем вычетов по модулю p.

з) Воспользоваться задачей 67.11.

и) Если K — искомое поле, рассмотреть $(K^*)^2 \cap \mathbb{Q}^*$ и применить индукцию по n.

67.14. $F(X,Y)/F(X^p,Y^p)$, где F — поле характеристики p. Если поле K конечно, воспользоваться задачей 56.35. Пусть K бесконечно и $L = = K(a_1, \dots, a_s)$. Индукцией по s вопрос о существовании примитивного элемента сводится к случаю $s = 2$; в этом случае показать, что при некотором $\lambda \in K$ элемент $a_1 + \lambda a_2$ не содержится в собственном промежуточном поле. Обратно: если $L = K(a)$, то показать, что всякое промежуточное поле порождается над K коэффициентами некоторого делителя из $L[x]$ минимального многочлена $\mu_a(x)$ элемента a над K.

67.15. Выбрать базис $L(x)$ над $K(x)$, состоящий из элементов L.

67.17. Индукцией по $i(0 \leqslant i \leqslant m)$ доказать, что при надлежащей нумерации элементов $b_1, \ldots, b_n$ система $a_1, \ldots, a_i, b_{i+1}, \ldots, b_n$ является максимальной системой алгебраически независимых над K элементов в L.

67.18. а) Показать, что число максимальных идеалов не превосходит $(A : K)$. Далее показать, что если элемент $a \in A$ не является нильпотентным, то идеал, максимальный во множестве идеалов, не пересекающихся с $\{a, a^2, \ldots, \}$, является максимальным идеалом в A.

б) Использовать а). Для получения единственности в д) показать, что во всяком представлении $A^{\text{red}} = \prod_{j=1}^{t} L_j$ поля L_j изоморфны факторалгебрам по всевозможным максимальным идеалам в A.

67.20. Применить индукцию по n. Записав соотношение линейной зависимости для f_i, получить противоречие, исходя из того, что f_i — гомоморфизм алгебры.

67.23. а) Всякий K-гомоморфизм $A \to B$ единственным образом продолжается до L-гомоморфизма $A_L \to B$.

б) Использовать а).

67.24. Взять в качестве E любую компоненту алгебры F_L.

67.25. Для доказательства б)$\to$ а) заметить, что если L_i — любая компонента A_L и $\overline{a}_1, \ldots, \overline{a}_s$ — образы $a_1, \ldots, a_s$ в L_i, то $L_i = L(\overline{a}_1, \ldots, \overline{a}_s)$; для получения импликации а)$\to$ в) применить к подалгебре $K[a]$ задачи 67.22, а), 67.19 и 67.18, е).

67.26. Применить задачу 67.25.

67.27. б) Заметить, что каждое из полей L_1, L_2 является расщепляющим для другого; получить отсюда K-вложения $L_1 \to L_2$ и $L_2 \to L_1$.

67.28. Использовать задачи 67.27, в) и 67.22.

67.29. а) Выбрать расщепляющее поле для A, содержащее поле L, и применить задачу 67.22.

б) Применить а) и задачу 67.23, б).

67.30. Воспользоваться задачами 67.25 и 67.29, б).

67.31. б) Необязательно: например, $\mathbb{Q} \subset \mathbb{Q}(\sqrt{2}) \subset \mathbb{Q}(\sqrt[4]{2})$.

67.32. Для получения двух последних соотношений общий случай свести к двум частным, когда $a \in K$ и $L = K(a)$. В первом случае использовать любой базис в L/F, связанный с башней полей, а во втором в L/K использовать базис из степеней a. Для получения первого соотношения заметить, что $\chi_{L/K}(a, x) = \mathbf{N}_{L(x)/K(x)}(a - x)$.

67.33. Использовать задачу 67.32.

67.34. Если $\operatorname{tr}_{L/K}(a) \neq 0$ для некоторого $a \in L$, то

$$(x, ax^{-1}) \to \operatorname{tr}_{L/K}(a) \neq 0$$

для всякого $x \neq 0$ из L.

67.35. Каждое из условий а)–в) равносильно тому, что $A_L \simeq \prod L$ для расщепляющего поля L. Невырожденность формы следа на A и A_L означает одно и то же. Нильпотентные элементы всегда содержатся в ядре формы следа.

67.37. Использовать задачи 67.22 и 67.12.

67.38. Воспользоваться тем, что $\mathrm{tr}_{A/K}(a) = \mathrm{tr}_{A_L/L}(a)$, и аналогично в других случаях.

67.39. а) Воспользоваться задачами 67.14, 67.22.

б) b — примитивный элемент, a примитивным элементом не является.

67.40. Использовать задачу 67.22, в).

67.41. Воспользоваться задачами 67.34 и 67.35, г).

67.42. Многочлен $x^p - t$ над полем рациональных функций $K(t)$, где K — произвольное поле характеристики $p \neq 0$.

67.43. Использовать задачу 67.19.

67.44. Для доказательства обратного утверждения воспользоваться задачей 67.41.

67.45. Пусть L — расщепляющее поле для многочлена $f(x)$. Показать, что $B_L \simeq \prod_{i=1}^{n} A_i$, где $A_i \simeq A_L$, $n = \deg f$.

67.46. Для доказательства импликации в) $\to$ а) представить A как факторалгебру алгебры $K[x_1, \ldots, x_s]/\left(\mu_{a_1}(x_1), \ldots, \mu_{a_s}(x_s)\right)$ и воспользоваться задачей 67.45.

67.47. а) Использовать задачи 67.46, 67.45, 67.42, 67.11.

67.48. Рассмотреть $\mu_a(x)$ для всякого элемента $a \in L$.

67.50. Воспользоваться задачами 67.48 и 67.49.

67.51. б) Используя задачу 67.26, доказать, что для всякого расщепляющего поля E расширения L/K число различных K-вложений $L \to L$ равно $(K_s : K)$.

67.52. а) Подсчитать число различных K-вложений поля F в какое-либо расщепляющее поле расширения F/K.

67.53. Рассмотреть башню полей $K \subset K_s \subset L$ и применить задачи 67.31, 67.38.

67.54. а) Применить задачи 67.30 и 67.35.

б) Применить задачу 67.27.

67.55. а) Группа $G(\mathbb{C}/\mathbb{R})$ состоит из тождественного автоморфизма и комплексного сопряжения.

б), в) $\mathbf{Z}_2$. г) $\mathbf{Z}_2 \oplus \mathbf{Z}_2$.

67.56. а) $\{e\}$. б) $\mathbf{S}_2$. в) $\mathbf{S}_2$. г) $\mathbf{S}_3$.

д) $\mathbf{D}_4$. е) $\mathbf{Z}_{p-1}$. ж) $\mathbf{Z}_n^*$.

з) *Полупрямое* произведение группы $\mathbf{Z}_p$ и её группы автоморфизмов.

и) Прямое произведение r экземпляров группы $\mathbf{Z}_2$ (см. ответ к задаче 67.13).

67.57. Всякий элемент $a \in L$ является корнем сепарабельного многочлена над K степени $\leqslant |G|$, а именно $f(x) = \prod_{\sigma \in G}(x - \sigma(a))$. Используя существование примитивного элемента у всякого (конечного) сепарабельного расширения, доказать, что $(L : K) = |G|$.

67.58. Рассмотреть действие $\mathbf{S}_n$ на поле рациональных функций $K(a_1, \ldots, a_n)$ и применить задачу 67.57.

67.59. Вложить группу G в симметрическую группу и применить задачу 67.57.

67.60. Применить задачу 67.57.

67.61. Сначала доказать, что всякое отличное от $\mathbb{R}$ расширение Галуа $L/\mathbb{R}$ имеет степень, равную степени числа 2. Затем, используя разрешимость конечной 2-группы и несуществование расширений $L'/\mathbb{R}$ степени $\geqslant 2$, показать, что $L = \mathbb{C}$.

67.63. Рассмотреть действие элементов группы G на $\sqrt{D}$.

67.64. Используя линейную независимость автоморфизмов (задача 67.21), доказать, что L является циклическим модулем над $K[\varphi]$.

67.66. Группа $\mathbf{S}_n$, действующая посредством перестановок на компонентах алгебры $A = \prod K_i (K_i \simeq K)$. Использовать, что K_i являются единственными минимальными идеалами в A.

67.67. Принять во внимание, что $\tau(x) = \sum_\sigma \sigma(\tau x) e_\sigma = \sum_\sigma \sigma(x)\tau(e_\sigma)$ для $x \in L$.

67.68. Использовать задачу 67.20 или интерпретировать $(\varphi_i(y_j))$ как матрицу перехода к новому базису, вложив A в A_L.

67.69. Если поле K конечно, см. задачу 67.64. Пусть K бесконечно, $\omega_1, \ldots, \omega_n$ — некоторый базис L над K и $\omega = a_1\omega_1 + \ldots + a_n\omega_n$ — произвольный элемент из L (если $a_i \in K$) или из L_L (если $a_i \in L$). Условие из задачи 67.68, обеспечивающее, что элементы $\{\sigma(\omega), \sigma \in G\}$ образуют базис в L (соответственно в L_L), означает, что для некоторого многочлена $f(x_1, \ldots, x_n) \in L[x_1, \ldots, x_n]$ его значение $f(a_1, \ldots, a_n) \neq 0$. Далее использовать существование нормального базиса в L_L (задача 67.67).

67.70. Если характеристика поля $K \neq 2$, то

$$K(x_1, \ldots, x_n)^{A_n} = K(\sigma_1, \ldots, \sigma_n, \Delta),$$

где $\sigma_1, \ldots, \sigma_n$ — элементарные симметрические многочлены от $x_1, \ldots, x_n$, $\Delta = \prod_{j>i}(x_j - x_i)$. В случае произвольной характеристики имеет место равенство

$$K(x_1, \ldots, x_n)^{A_n} = K(\sigma_1, \ldots, \sigma_n, y),$$

где $y = \sum_{\sigma \in A_n} \sigma\left(\prod_{i=1}^n x_i^{i-1}\right)$.

67.71. $\mathbb{C}(x_1^n, x_1^{n-2}x_2, \ldots, x_1x_{n-1}, x_n)$. Использовать задачу 67.60.

67.72. $\mathbb{C}(y_1^n, y_1^{n-2}y_2, \ldots, y_1y_{n-1}, y_n)$, где $y_i = \sum_{k=1}^n \varepsilon^{-ik}x_k$, ε — первообразный корень степени n из единицы. В пространстве линейных форм от $x_1, \ldots, x_n$ выбрать базис, состоящий из собственных векторов оператора σ; затем использовать задачу 67.71.

67.73. Группа $\mathbf{Z}_n$. Поле разложения L многочлена $x^n - a$ над K имеет вид $L = K(\theta)$, где θ — некоторый корень многочлена $x^n - a$ в L. Группа $G(L/K)$ порождается автоморфизмом σ, при котором $\sigma(\theta) = \varepsilon\theta$, где ε — некоторый порождающий элемент (циклической) группы корней степени n из 1. Использовать задачу 67.11.

67.74. Пусть ε — порождающий элемент группы корней степени n из 1 в K; $y \in L$ — такой элемент из L, что $\sum_{i=1}^n \varepsilon^{-i}\sigma^i y \neq 0$ (почему такой элемент существует?); тогда $a = \left(\sum_{i=1}^n \varepsilon^{-i}\sigma^i y\right)^n$. Рассмотреть собственные векторы оператора σ на L.

67.75. Если $L = K(\theta_1, \ldots, \theta_s)$, то для всякого $\sigma \in G(L/K)$ $\sigma(\theta_i) = \varepsilon_i(\sigma)\theta_i$, где $\varepsilon_i(\sigma)^n = 1$. Обратно, если группа $G(L/K)$ абелева периода n, то использовать следующий факт: если во множестве попарно коммутирующих линейных операторов, каждый из которых диагонализируем, то существует базис из векторов, собственных для всех этих операторов. (Этот факт следует из задачи 40.7.)

67.76. Рассмотреть билинейное отображение $G(L/K) \times A \to \mathbf{U}_n$ для $\sigma \in G(L/K)$, $\overline{a} \in A$ $(a \in \langle K^{*n}, a_1, \ldots, a_s\rangle)$, $(\sigma, \overline{a}) \to (\sigma\theta)\cdot\theta^{-1}$, где $\theta \in L$ и $\theta^n = a$.

67.77. $L \to (L^{*n} \cap K^*)/K^{*n}$; если $A = B/K^{*n}$, $B = \langle K^{*n}, a_1, \ldots, a_s\rangle$ — подгруппа в K^*, то $A \to L = K(\theta, \ldots, \theta_s)$, где $\theta_i^n = a_i$. Воспользоваться задачей 67.76.

67.78. Если $G(L/K) = \langle\sigma\rangle$, то для отыскания θ использовать корневой вектор высоты 2 линейного оператора σ. Для доказательства обратного утверждения воспользоваться задачей 67.12.

67.79. Если $L = K(\theta_1, \ldots, \theta_s)$, то для всякого $\sigma \in G(L/K)$ $\sigma(\theta_i) = \theta_i + \gamma_i$, $\gamma_i \in \mathbf{F}_p$ (см. задачу 67.12). Обратно: если $G = G(L/K)$ есть прямое произведение s циклических групп порядка p, то выберем в G подгруппы H_i $(i = 1, \ldots, s)$ индекса p, для которых $\cap_{i=1}^s H_i = \{e\}$; тогда $L^{H_i} = K(\theta_i)$ (см. задачу 67.78) и $L = K(\theta_1, \ldots, \theta_s)$.

67.80. Рассмотреть билинейное отображение $G(L/K) \times A \to \mathbb{F}_p$, где для $\sigma \in G(L/K)$, $\overline{u} \in A$ $(a \in \langle\rho(k), a_1, \ldots, a_s\rangle)$, $(\sigma, a) \to \sigma(\theta) - \theta$, где $\theta \in L$ и $\rho(\theta) = a$.

67.81. $L \to (\rho(L) \cap K)/\rho(K)$; если $A = B/\rho(K)$, $B = \langle\rho(K), a_1, \ldots, a_s\rangle$, то $A \to K(\theta_1, \ldots, \theta_s)$, где $\rho(\theta_i) = a_i$. Воспользоваться задачами 67.79 и 67.80.

68.1. Воспользоваться задачей 56.35.

68.2. а) Если $|L| = q$, то L является полем разложения многочлена $x^q - x$.

б) Использовать указание к а) и задачу 67.27, б).

68.3. См. указание к задаче 28.2; в пункте а) использовать также, что многочлен $x^q - x$ не имеет кратных корней.

68.4. Использовать задачу 56.35.

68.6. б) Разложить σ в произведение независимых циклов.

68.7. Если $b = \prod_{j=1}^{k} p_j^{n_j}$, где p_j — различные простые числа, то разложить кольцо $\mathbf{Z}_8$ в прямое произведение колец вычетов по модулю $p_j^{n_j}$. Если $b = p^n$, p простое, то представить множество классов вычетов в виде объединения подмножеств, каждое из которых содержит все элементы, имеющие одинаковый порядок в аддитивной группе кольца вычетов. Далее использовать строение группы обратимых элементов кольца вычетов по модулю p^n.

68.8. Подсчитать число инверсий перестановки σ, упорядочив элементы из G следующим образом: $0, x_1, \ldots, x_n, -x_n, \ldots, -x_1$, где $\{x_1, \ldots$ $\ldots, x_n\} = S$.

68.9. а) Использовать задачу 68.8, взяв произвольным образом множества S_1 и S_2 в G_1 и G_2 и положив $S = S_1 \cup \varphi^{-1}(S_2)$, где $\varphi\colon\ G \to G_2$ — канонический гомоморфизм.

68.10. Использовать задачу 68.8.

68.11. Использовать задачу 68.10.

68.12. Множество R пар чисел (x, y), где $1 \leqslant x \leqslant (a-1)/2$, $1 \leqslant y \leqslant$ $\leqslant (b-1)/2$, разбивается в объединение четырех подмножеств:

$$R_1 = \{(x,y) \in R \mid ay - bx < -b/2\},$$
$$R_2 = \{(x,y) \in R \mid -b/2 < ay - bx < 0\},$$
$$R_3 = \{(x,y) \in R \mid 0 < ay - bx < a/2\},$$
$$R_4 = \{(x,y) \in R \mid a/2 < ay - bx\}.$$

Используя биекцию

$$(x,y) \to \left(\frac{a+1}{2} - x, \frac{b+1}{2} - y\right),$$

показать, что $|R_1| = |R_4|$. Используя задачу 68.10, показать, что

$$\left(\frac{a}{b}\right) = (-1)^{|R_2|}, \quad \left(\frac{b}{a}\right) = (-1)^{|R_3|}.$$

68.13. Представить матрицу оператора $\mathcal{A}$ в виде произведения элементарных.

68.14 – 68.16. См.: *Лидл З., Нидеррайтер Г.* Конечные поля. Т. 1 — М.: Мир, 1988. — Гл. 2, § 3.

69.4. а) Да. б) Нет. в) Да. г) Да. д) Нет. е) Да.

69.5. Все указанные подпространства, за исключением г), д) и з).

69.7. $\begin{pmatrix} 1 & -t & t^2 \\ 0 & 1 & -2t \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ (в базисе $1, x, x^2$).

69.8. $\begin{pmatrix} \cos t & \sin t \\ -\sin t & \cos t \end{pmatrix}$ (в базисе $\sin x, \cos x$).

69.10. Представить пространство $\mathbf{M}_n(K)$ в виде суммы подпространств, состоящих из матриц, все столбцы которых, кроме одного, нулевые.

69.11. Доказать предварительно, что подпространства в $\mathbf{M}_n(K)$ инвариантное относительно всех операторов $\mathrm{Ad}(A)$, где матрица A диагональна, является линейной оболочкой некоторого множества матричных единиц E_{ij} $(i \neq j)$ и некоторого подпространства диагональных матриц.

69.12. Доказать предварительно, что всякое подпространство в $\mathbf{M}_n(K)$, инвариантное относительно всех операторов вида $\Phi(A)$, где матрица A диагональна, является линейной оболочкой некоторого множества матриц вида $aE_{ij} + bE_{ji}$ $(i \neq j)$ и некоторого подпространства диагональных матриц.

69.13. Найти общий вид матриц X таких, что

$$X\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} X,$$

$$X\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} X,$$

и показать, что всегда $\det X = 0$.

69.16. в) Пусть $H \subseteq W$ — инвариантное подпространство и $x \in H$. Рассмотреть вектор $\pi x - x$ для $\pi = \{ij\}$.

69.17. Определить сначала подпространства, инвариантные относительно ограничения представления Θ на подгруппу диагональных матриц.

69.25. Использовать задачу 69.24, в) и разложение группы G на левые смежные классы по H.

69.26. а) m. б) 2. в) 1. г) $m+1$.

69.27. Если A и B — коммутирующие операторы, то каждое собственное подпространство оператора A инвариантно относительно B.

70.2. Использовать задачу 69.28.

70.5. В обоих случаях каждое неприводимое представление группы H встречается с кратностью 2.

70.6. Только тривиальное для группы нечётного порядка; для группы чётного порядка — ещё гомоморфизм на подгруппу $\{-1, 1\}$ в $\mathbf{GL}_1(\mathbb{R}) \simeq \mathbb{R}^*$.

70.7. Воспользоваться теоремой о существовании у вещественного оператора двумерного инвариантного подпространства.

70.9. а) $[n/2]+1$. Использовать задачу 70.8.

70.15. Для $\mathbf{S}_3$: тривиальное и сопоставляющее подстановке её знак; использовать теорему о коммутанте и задачу 62.7, а). Для $\mathbf{A}_4$: использовать теорему о коммутанте и задачу 62.7, б).

70.16. Использовать теорему о коммутанте и задачу 62.8.

70.17. Можно взять представление задачи 69.13.

70.31. Рассмотреть разложение регулярного представления в сумму неприводимых подпредставлений.

70.32. Доказать, что подгруппа, порожденная $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$ в $\mathbf{GL}(V)$, изоморфна $\mathbf{S}_3$.

70.34. а) 1, 1, 2. б) 1, 1, 1, 3.

в) 1, 1, 2, 3, 3. г) 1, 1, 1, 1, 2.

д) если $n=2k$, то четыре одномерных и $k-1$ двумерных, если $n = 2k+1$, то два одномерных и k двумерных.

е) 1, 3, 3, 4, 5. Использовать основные теоремы и задачу 69.16.

70.37. а), б), в) Нет.

70.38. Существование подгруппы приводит к существованию двумерного представления группы $\mathbf{S}_4$.

70.42. Только для абелевых.

70.43. Провести индукцию по порядку группы.

70.45. Использовать задачу 69.25.

70.46. Воспользоваться конечностью числа неизоморфных групп фиксированного порядка и конечностью числа неизоморфных представлений данной размерности фиксированной конечной группы.

70.48. Заметить, что группы порядков p и p^2 абелевы.

70.49. p^2 одномерных представлений и $p-1$ p-мерных. Заметить, что центр данной группы имеет порядок p и число классов сопряжённых элементов равно p^2+p-1. Так как факторгруппа по центру коммутативна, то коммутант данной группы имеет порядок p. Этим определяется число одномерных представлений. Заметить ещё, что в данной группе есть нормальная подгруппа индекса p и доказать, что размерность неприводимого представления не может быть больше p.

71.2. Базис состоит из одного вектора

$$\sum_{\sigma\in S_3} (\operatorname{sgn}\sigma)\sigma.$$

Размерность равна 5.

71.3. $\{\varepsilon-a, \varepsilon^2-a^2, \ldots, \varepsilon^{n-1}-a^{n-1}\}$.

71.9. а) Пусть

$$e_1 = \frac{1}{6}\sum_{\sigma\in\mathbf{S}_3}\sigma, \qquad e_2 = \frac{1}{6}\sum_{\sigma\in\mathbf{S}_3}(\operatorname{sgn}\sigma)\sigma.$$

Коммутативные идеалы: 0, $\mathbb{C}e_1$, $\mathbb{C}e_2$, $\mathbb{C}e_1 \oplus \mathbb{C}e_2$.

б) Пусть $Q_8 = \{E, \overline{E}, I, \overline{I}, J, \overline{J}, K, \overline{K}\}$,

$$e_1 = (E+\overline{E})(E+I+J+K), \quad e_2 = (E+\overline{E})(E+I-J-K),$$
$$e_3 = (E+\overline{E})(E-I-J-K), \quad e_4 = (E+\overline{E})(E+I-J+K).$$

Коммутативные идеалы — линейные оболочки любого подмножества векторов множества $\{e_1, e_2, e_3, e_4\}$.

в) Пусть

$$e_1 = \frac{1}{10}\sum_{A\in\mathbf{D}_5}A, \qquad e_2 = \frac{1}{10}\sum_{A\in\mathbf{D}_5}(\det A)A.$$

Коммутативные идеалы: 0, $\mathbb{C}e_1$, $\mathbb{C}e_2$, $\mathbb{C}e_1 \oplus \mathbb{C}e_2$.

71.10. Если G бесконечна, то $x = 0$, если конечна, то

$$x = \alpha\sum_{g\in G} g, \qquad \alpha \in F.$$

71.11. Базис центра $F[G]$ образуют элементы вида $\sum_{g\in C} g$, если в качестве C взять последовательно все классы сопряжённых элементов в G.

71.16. Использовать лемму Шура.

71.19. Только для $G = \{e\}$.

71.22. а) 2. б) 1. в) 2. г) 4.

71.24. Пусть ε — первообразный корень степени 3 из единицы в $\mathbb{C}$,

$$r_0 = \frac{1}{3}(e+a+a^2) \in \mathbb{R}[\langle a\rangle_3] \subset \mathbb{C}[\langle a\rangle_3],$$
$$r_1 = \frac{1}{3}(e+\varepsilon a+\varepsilon^2 a^2) \in \mathbb{C}[\langle a\rangle_3],$$
$$r_2 = \frac{1}{3}(e+\varepsilon^2 a+\varepsilon a^2) \in \mathbb{C}[\langle a\rangle_3].$$

$\mathbb{R}[\langle a\rangle_3] = F_0 \oplus F_1$, где поле $F_0 = \mathbb{R}r_0 \simeq \mathbb{R}$ и

$$F_1 = \left\{\alpha_0 e + \alpha_1 a + \alpha_2 a^2 \,\Big|\, \sum_{i=0}^{2}\alpha_i = 0,\ \alpha_i \in \mathbb{R}\right\} \simeq \mathbb{C}.$$

При изоморфизме $\mathbb{C} \to F_1$ имеем $1 \to e - r_0$, $\varepsilon \to a(e - r_0)$. $\mathbb{C}[\langle a\rangle_3] = F_0' \oplus F_1' \oplus F_2'$. Поля $F_i' = \mathbb{C}r_i$ изоморфны $\mathbb{C}$.

71.25. Использовать неприводимость многочлена $x^{p-1} + x^{p-2} + \ldots$ $\ldots + x + 1$ над полем $\mathbb{Q}$.

71.27. а) Идемпотенты $e_1 = 2 + 2a$, $e_2 = 2 + a$; идеалы $\mathbf{F}_3 e_1, \mathbf{F}_3 e_2$.

б) Идемпотент — единица групповой алгебры; идеал $\mathbf{F}_2(1 + a)$.

в) Идемпотенты $\frac{1}{2}(1 + a)$, $\frac{1}{2}(1 - a)$; идеалы $\mathbb{C}e_1$, $\mathbb{C}e_2$.

г) Идемпотенты $\frac{1}{3}(1 + a + a^2)$, $\frac{1}{3}(2 - a - a^2)$; идеалы $\mathbb{R}e_1$, $\mathbb{R}[\langle a\rangle_3]e_2$.

71.28. Проверить аналогичное утверждение для групповой алгебры $\mathbf{M}_n(\mathbb{C})$ и использовать теорему о структуре групповой алгебры конечной группы.

71.29. а) 8. б) 32.

71.30. а) $\{e\}$. б) $G \simeq \mathbf{Z}_2$.

в) $G \simeq \mathbf{Z}_3$ или $\mathbf{S}_3$. Воспользоваться тем, что n равно числу классов сопряжённых элементов в G.

71.34. При $p = 2$

$$U = F[G](a - e)^2.$$

71.36. а) Рассмотреть случай $G = H$. Провести индукцию по порядку группы H.

б) $n = 2$.

71.39. а) $P/H \simeq a/(g - ge)A \oplus A/(g - \varepsilon^2 e)A$, где ε — первообразный корень степени три из единицы в $\mathbb{C}$.

б) $P/H = 0$. в) $P/H \simeq A$.

71.40. $\operatorname{Ker}\varphi = 0$.

71.41. Рассмотреть аналогичный вопрос для $A = F[t]$ — кольца многочленов.

71.44. а) Элемент прост. б) $(g_1 - g_2)^2(-g_1^{-1}g_2^{-1} - g_1^{-2})$.

71.45. а) 0. б) $F[\langle g_1\rangle]$. в) F.

72.1. Использовать задачу 69.21.

72.2. Используя задачу 69.11, найти возможный диагональный вид матрицы оператора $\Phi(g)$.

72.3, 72.4. Использовать задачу 72.1.

72.5. Заметить, что сумма n корней из 1 равна n только когда все слагаемые равны 1.

72.6. Использовать задачу 72.5 и доказать, что любая подгруппа индекса p в A есть подгруппа элементов некоторого $(n-1)$-мерного подпространства.

72.7. Пусть χ — характер представления Φ. Используя задачу 72.5, доказать, что $\Phi(g) = E$ для $g \in H$. Аналогично, показать, что $g \in K$ тогда и только тогда, когда матрица $\Phi(g)$ скалярная.

72.8. Использовать теорему Машке и свойства коммутанта.

72.9. Использовать теорему Машке и свойства коммутанта.

72.20.

	1	−1	i	j	k
χ	2	−2	0	0	0

. Использовать задачу 70.24.

72.21. $\chi_\Phi(\sigma)$ есть число элементов множества $\{1, 2, 3, \ldots, n\}$, неподвижных относительно σ.

72.22. Пусть

$$\mathbf{D}_n = \langle a, b \mid a^2 = b^n = e,\ aba = b^{-1} \rangle.$$

Тогда

$$\chi(b^k) = 2\cos\frac{2\pi k}{n}, \quad \chi(ab^k) = 0.$$

72.23.

	e	(12)	(123)	(12)(34)	(1234)
χ	3	1	1	−1	−1

. Использовать задачу 70.19.

72.24.

	e	(12)	(123)	(12)(34)	(1234)
χ	3	−1	0	−1	1

. Использовать задачу 70.19.

72.25. Использовать задачу 72.4.

72.26. а) Два характера: тривиальный и $\sigma \to \operatorname{sgn}\sigma$.

б)

	e	(123)	(132)	(12)(34)
φ_0	1	1	1	1
φ_1	1	ε	ε^2	1
φ_2	1	ε^2	ε	1

, где ε — первообразный корень степени 3 из 1 в $\mathbb{C}$.

в)

	e	−1	i	j	k
φ_0	1	1	1	1	1
φ_1	1	1	−1	−1	1
φ_2	1	1	−1	1	−1
φ_3	1	1	1	−1	−1

г) См. а).

д) Пусть

$$\mathbf{D}_n = \langle a, b \mid a^2 = b^n = e,\ aba = b^{-1} \rangle.$$

Если n нечётно, то одномерных характеров два: тривиальный и $a^i b^j \to (-1)^i$. Если n чётно, то четыре: тривиальный и $a^i b^j \to (-1)^i$, $a^i b^j \to (-1)^j$, $a^i b^j \to (-1)^{i+j}$.

72.27. $n^{n/2}$. Использовать соотношения ортогональности для характеров для вычисления произведения матрицы на её сопряжённую.

72.28. а)

	e	(12)	(123)
φ_0	1	1	1
φ_1	1	-1	1
φ_0	2	0	-1

. Использовать задачи 72.26 и 70.19.

б)

	e	(12)	(123)	(12)(34)	(1234)
φ_0	1	1	1	1	1
φ_1	-1	1	1	1	-1
φ_2	3	1	0	-1	-1
φ_3	3	-1	0	-1	1
φ_4	2	0	-1	2	0

. Использовать задачи 72.26, 72.23, 72.24, 72.20.

в)

	1	-1	i	j	k
φ_0	1	1	1	1	1
φ_1	1	1	1	-1	-1
φ_2	1	1	-1	1	-1
φ_3	1	1	-1	-1	1
φ_4	2	-2	0	0	0

. Использовать задачи 72.26 и 72.20.

г)

	e	b	b^2	a	ab
φ_0	1	1	1	1	1
φ_1	1	-1	1	-1	1
φ_2	1	-1	1	1	-1
φ_3	1	1	1	-1	-1
φ_4	2	0	-2	0	0

. Использовать задачи 72.26 и 72.22.

д)

	e	b	b^2	a
φ_0	1	1	1	1
φ_1	2	$2\cos\dfrac{2\pi}{5}$	$2\cos\dfrac{4\pi}{5}$	0
φ_2	2	$2\cos\dfrac{4\pi}{5}$	$2\cos\dfrac{2\pi}{5}$	0

. Использовать задачи 72.26 и 72.22.

е)

	e	(12)(34)	(123)	(132)
φ_0	1	1	1	1
φ_1	1	1	ε	ε^2
φ_2	1	1	ε^2	ε
φ_3	3	-1	0	0

, где ε — корень третьей степени из 1 в $\mathbb{C}$. Использовать задачу 72.26.

72.29. Нет, так как скалярный квадрат указанной функции не является целым числом.

72.30. В обозначениях к задаче 72.28, а) $F = 2\varphi_4 + 0,5\varphi_1 + 0,5\varphi_3$.

72.31. В обозначениях ответа к задаче 72.28, а) запишем $f_1 = -\varphi_0 + 3\varphi_1 + 2\varphi_2$, $f_2 = 4\varphi_1 + \varphi_2$. Отсюда следует, что f_1 не является характером представления. f_2 — характер прямой суммы неприводимого двумерного представления группы $\mathbf{S}_3$ и четырёх экземпляров нетривиального одномерного представления этой группы.

72.32. а) Доказать, что отображение A в $\mathbb{C}$, переводящее χ в $\chi(a)$, при некотором $a \in A$ есть характер группы A и доказать, что возникающее таким образом отображение $A \to \widehat{\widehat{A}}$ есть изоморфизм.

72.33. в) Вывести с помощью а) равенство

$$f(a) = \sum_{\chi \in \widehat{A}} f(\chi) \cdot \chi(a)$$

и доказать, что $\widehat{\widehat{f}}$ переходит в $(|A|)^{-1} f$ при изоморфизме задачи 72.32, в).

72.34. Использовать равенство $(f, f)_A = \sum_{\chi \in \hat{A}} (f, \chi)_A^2$.

72.37. Приведем разложение характера представления Ψ на неприводимые характеры.

а) $\chi_\Psi = \Psi_0 + \Psi_1 + \Psi_2$.

б) $\chi_\Psi = \Psi_0 + \Psi_1 + \Psi_2 + \Psi_4$.

в) $\chi_\Phi = \Psi_0 + \Psi_1 + \Psi_2 + \Psi_3$.

72.38. $\chi_\Psi = n \cdot \chi_\Phi$.

72.39. n^{m-1}. Доказать, что все неприводимые представления группы G входят в $\rho^{\otimes m}$ с одинаковой кратностью.

72.40. а) $\chi_{\rho^2} = \Psi_0 + \Psi_1 + \Psi_2$.

б) $\chi_{\rho^3} = \Psi_0 + \Psi_1 + 3\Psi_2$.

72.41. Если

$$\overline{n} = \left[\frac{n+1}{2}\right], \qquad \overline{m} = \left[\frac{m}{2}\right],$$

то кратность равна $\binom{\overline{n}-1}{\overline{m}}$.

72.42. Рассмотреть представление на пространстве кососимметрических дважды контравариантных тензоров.

72.43. В обозначениях ответа к задаче 72.28, а):

а) φ_1; б) $\varphi_0 + \varphi_2$; в) $\varphi_0 + \varphi_1$; г) $\varphi_1 + \varphi_2$.

73.2. а) $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. б) $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

в) $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. г) $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$.

д) $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. е) $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

73.3. б) и г). в) и е).

73.4. В том случае, когда для любых k, λ в жордановой форме матрицы A число жордановых клеток порядка k с собственным значением λ равно числу жордановых клеток порядка k с собственным значением $-\lambda$.

73.5. а) Всякое представление имеет вид $R_A(t) = e^{(\ln t)A}$, $A \in \mathbf{M}_n(\mathbb{C})$.

б) Всякое представление эквивалентно представлению вида

$$R_{A,B}(t) = \begin{pmatrix} e^{\ln|t|\cdot|A|} & 0 \\ 0 & (\operatorname{sgn} t)e^{\ln|t|\cdot B} \end{pmatrix}, \quad A \in \mathbf{M}_p(\mathbb{C}), \quad B \in \mathbf{M}_q(\mathbb{C}).$$

Рассмотреть образ элемента $-1 \in \mathbb{R}^*$ при данном представлении, доказать, что его собственные подпространства инвариантны, и воспользоваться а).

в) Всякое представление эквивалентно представлению вида

$$z \to \begin{pmatrix} z^{k_1} & & & 0 \\ & z^{k_2} & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & z^{k_n} \end{pmatrix}, \quad k_1, \ldots, k_n \in \mathbb{Z}.$$

Доказать, что представление аддитивной группы $\mathbb{C}$, получаемое как композиция гомоморфизма $\mathbb{C} \to \mathbb{C}^*$ $(t \to e^t)$ и представления группы $\mathbb{C}^*$, имеет вид P_A (см. задачу 73.1) и $e^{2\pi i A} = E$. Затем доказать, что матрица A подобна целочисленной диагональной матрице.

г) Всякое представление эквивалентно представлению вида

$$z \to \begin{pmatrix} z^{k_1} & & & 0 \\ & z^{k_2} & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & z^{k_n} \end{pmatrix}, \quad k_1, \ldots, k_n \in \mathbb{Z}.$$

Рассмотреть представление аддитивной группы поля $\mathbb{R}$, получаемое как композиция гомоморфизма $\mathbb{R} \to \mathbf{U}$ $(t \to e^{it})$, и представления группы $\mathbf{U}$, затем воспользоваться задачей 73.1.

73.6. Да; доказать, что всякую невырожденную комплексную квадратную матрицу можно представит в виде e^A, и воспользоваться задачей 73.1.

73.7. Линейные оболочки наборов собственных векторов для A.

73.9. Рассмотреть ограничение представления Φ_n на подгруппу диагональных матриц.

73.10. д) Доказать, что равенство имеет место на подмножестве диагонализируемых матриц.

73.11. Заметить, что

$$\mathbf{SU}_2(\mathbb{C}) = \{A \in \mathbb{H} \mid (A, A) = 1\}.$$

Доказать, что если $A \in \mathbf{SU}_2(\mathbb{C})$ имеет собственные значения $e^{\pm i\varphi}$, то оператор $P(A)$ есть поворот пространства $\mathbb{H}_0$ на угол 2φ вокруг оси, проходящей через $A - \frac{1}{2}(\operatorname{tr} A)E \in \mathbb{H}_0$.

б) Доказать, что группа $R(\mathbf{SU}_2(\mathbb{C}) \times \mathbf{SU}_2(\mathbb{C}))$ транзитивно действует на единичной сфере в $\mathbb{H}$, и воспользоваться а).

в) Комплексификация пространства $\mathbb{H}_0$ есть подпространство матриц вида $\begin{pmatrix} a & b \\ c & -a \end{pmatrix}$ в $\mathbf{M}_2(\mathbb{C})$. Искомый изоморфизм осуществляется отображением, сопоставляющим такой матрице многочлен $f(x,y) = -bx^2 + 2axy + cy^2$.

73.12, 73.13. См.: *Супруненко Д.А.* Группы матриц. — М.: Наука, 1972. — Гл. V.

П р и л о ж е н и е

ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ СВЕДЕНИЯ

§ I. Аффинная и евклидова геометрия

Аффинным пространством над полем K называется пара (A, V), состоящая из векторного пространства V над полем K и множества A, элементы которого называются *точками*. Предполагается, что пара (A, V) снабжена операцией сложения точек и векторов

$$(a, v) \to a + v \in V,$$

удовлетворяющей следующим условиям:

1) $(a + v_1) + v_2 = a + (v_1 + v_2)$ для любого $a \in A$, $v_1, v_2 \in V$;

2) $a + 0 = a$ для любого $a \in A$;

3) для любых двух точек $a, b \in A$ существует единственный вектор $v \in V$ такой, что $a + v = b$ (этот вектор обозначается через $\overline{ab}$).

Термин "аффинное пространство" часто используется применительно только к первому члену пары (A, V); в этом случае V называется векторным пространством, *ассоциированным* с данным аффинным пространством.

Размерностью аффинного пространства (A, V) называется размерность векторного пространства V.

Всякое векторное пространство V можно рассматривать как аффинное пространство, если положить $A = V$ и определить сложение точек и векторов как сложение в пространстве V

Аффинным подпространством, или *плоскостью*, в аффинном пространстве (A, V) называется пара (P, U), где U — подпространство в V, а P — такое непустое подмножество множества A, что:

1) $p + u \in P$ для любых $p \in P$, $u \in U$;

2) $\overline{pq} \in U$ для любых $p, q \in P$.

Пара (P, U) в этом случае сама является аффинным пространством.

Термин "аффинное подпространство", или "плоскость", часто применяется по отношению только к первому члену пары (P, U). В этом случае

подпространство U, однозначно определяемое множеством P, называется *направляющим подпространством* данного аффинного подпространства.

Одномерное аффинное подпространство называется *прямой*. Аффинное подпространство, размерность которого на единицу меньше размерности пространства, называется *гиперплоскостью*.

Если S — непустое подмножество аффинного пространства A, то наименьшая плоскость в A, содержащая S, называется *аффинной оболочкой* множества S и обозначается через $\langle S\rangle$. Множество из $k+1$ точек $a_0, a_1, \ldots$ $\ldots, a_k$ в аффинном пространстве A называется *аффинно независимым*, $\dim\langle a_0, a_1, \ldots, a_k\rangle = k$; в этом случае говорят также, что точки $a_0, a_1, \ldots, a_k$ находятся в *общем положении*.

Две плоскости (P_1, L_1), (P_2, L_2) в аффинном пространстве, не имеющие общих точек, называются *параллельными*, если $L_1 \subset L_2$ или $L_2 \subset L_1$, и *скрещивающимися*, если $L_1 \cap L_2 = \{0\}$. В общем случае число $\dim(L_1 \cap L_2)$ называется *степенью параллельности* данных плоскостей.

Системой аффинным координат в аффинном пространстве (A, V) называется набор $(a_0, e_1, \ldots, e_n)$, состоящий из точки a_0 (начала координат) и базиса $(e_1, \ldots, e_n)$ векторного пространства V. Координатами точки $a \in A$ относительно такой системы служат координаты вектора $\overline{a_0a_1}$ в базисе $(e_1, \ldots, e_n)$.

Аффинным отображением аффинного пространства (A, V) в аффинное пространство (B, W) называется пара (f, Df), состоящая из отображения множеств $f\colon A \to B$ и линейного отображения $Df\colon V \to W$, удовлетворяющего условию $f(a+v) = f(a) + Df(v)$ для любых $a \in A$, $v \in V$. Биективное аффинное отображение аффинного пространства в себя называется *аффинным преобразованием*. Часто термин "аффинное отображение" (или "преобразование") применяется по отношению к одному только первому члену пары (f, Df) — отображению f; линейное отображение Df в этом случае называется *линейной частью* или *дифференциалом* аффинного отображения f.

Все аффинные преобразования аффинного пространства образуют группу, называемую *аффинной группой* и обозначаемую через $\operatorname{Aff} A$.

Аффинное преобразование, дифференциал которого — тождественное отображение, называется *параллельным переносом*. Параллельные переносы образуют подгруппу в $\operatorname{Aff} A$, которая отождествляется с аддитивной группой векторного пространства V: каждому вектору $v \in V$ соответствует параллельный перенос $t_0\colon a \to a + v$.

Конфигурацией в аффинном пространстве A называется упорядоченный набор аффинных подпространств $\{P_1, \ldots, P_s\}$. Две конфигурации $\{P_1, \ldots, P_s\}$ и $\{Q_1, \ldots, Q_s\}$ в A называются *аффинно конгруэнтными*, если существует аффинное преобразование f, для которого $f(P_i) = Q_i$ при $i = 1, \ldots \sigma$.

Далее будем считать, что (A, V) — аффинное пространство над полем вещественных чисел.

Для любых точек $a, b \in A$, $a \neq b$, совокупность точек вида $\lambda a + (1-\lambda)b$, где $0 \leqslant \lambda \leqslant 1$, называется *отрезком*, соединяющим точки a и b. Непустое множество $M \subseteq A$ называется *выпуклым*, если вместе с любыми двумя точками оно содержит соединяющий их отрезок. *Размерностью* выпуклого множества называется размерность его аффинной оболочки. Выпуклое множество, аффинная оболочка которого совпадает со всем пространством, называется *телесным*.

Точка выпуклого множества M называется *внутренней*, если она принадлежит открытому ядру множества M в его аффинной оболочке, и *граничной* в противном случае. Точка выпуклого множества M называется *крайней*, если она не является внутренней точкой никакого отрезка, целиком лежащего в M.

Открытое ядро выпуклого множества M в пространство A обозначается через M°. (Если M не телесно, то $M^\circ = \varnothing$.)

Наименьшее выпуклое множество, содержащее данное непустое множество $S \subseteq A$, называется *выпуклой оболочкой* множества S и обозначается через $\operatorname{conv} S$. Выпуклая оболочка $n+1$ точек, находящихся в общем положении, называется n-мерным *симплексом*.

Для любой непостоянной аффинной линейной функции f на пространстве A множество, задаваемое неравенством $f(x) \geqslant 0$, выпукло и называется *полупространством*, ограничиваемым гиперплоскостью $\{x \mid f(x) = 0\}$. Каждая гиперплоскость ограничивает два полупространства. Говорят, что множество S *лежит по одну сторону от гиперплоскости* H, если оно содержится в одном из ограничиваемых ею полупространств; если при этом $S \cap H = \varnothing$, то говорят, что S лежит *строго по одну сторону от* H.

Гиперплоскость H, имеющая общую точку с замкнутым выпуклым множеством M, называется *опорной гиперплоскостью* этого множества, если M лежит по одну сторону от H. Непустое пересечение конечного числа полупространств называется *выпуклым многогранником*. Иначе говоря, выпуклый многогранник — это множество точек, координаты которых удовлетворяют некоторой совместной системе нестрогих линейных неравенств. Подмножество n-мерного аффинного пространства, задаваемого в подходящей системе аффинных координат неравенствами $0 \leqslant x_i \leqslant 1$ $(i = 1, \ldots, n)$, называется n-мерным *параллелепипедом*.

Подмножество выпуклого многогранника M, являющееся его пересечением с опорной гиперплоскостью, называется *гранью* многогранника M. Нульмерные грани называются *вершинами*, одномерные — *ребрами*. Всякая грань выпуклого многогранника также является выпуклым многогранником.

Подмножество K некоторого пространства V называется *выпуклым конусом*, если $x + y \in K$, $\quad \lambda x \in K$ для любых $x, y \in K$ и любого $\lambda > 0$.

Всякий выпуклый конус является выпуклым множеством в пространстве V, рассматриваемом как аффинное пространство.

Аффинное пространство (E, V) над полем вещественных чисел называется *евклидовым пространством*, если векторное пространство V наделено структурой евклидова векторного пространства. В евклидовом пространстве E вводится расстояние между двумя точками: если $a, b \in E$, то $\rho(a, b) = |\overline{ab}|$, где $|v| = \sqrt{(v, v)}$ — длина вектора $v \in V$; а также расстояние между двумя плоскостями $P, Q \subseteq E$:

$$\rho(P, Q) = \inf\{\rho(a, b) \mid a \in P, \quad b \in Q\}.$$

Угол между двумя плоскостями определяется как угол между их направляющими подпространствами. Плоскости, угол между которыми равен $\pi/2$, называется *перпендикулярными.*

Движением евклидова пространства называется аффинное преобразование, дифференциал которого является ортогональным оператором. Движение f называется *собственным*, если $\det Df = 1$. Движения сохраняют расстояния между точками. Все движения евклидова пространства E образуют группу, обозначаемую через $\operatorname{Isom} E$. Группа собственных движений обозначается через $\operatorname{Isom}_+ E$.

Две конфигурации $\{P_1, \ldots, P_s\}$ и $\{Q_1, \ldots, Q_s\}$ в евклидовом пространстве E называются *метрически конгруэнтными,* если существует движение f пространства E, при котором $f(P_i) = Q$, $(i = 1, \ldots, s)$.

§ II. Гипреповерхности второго порядка

Пусть (A, V) — аффинное пространство над полем K. *Квадратичной функцией* $Q\colon A \to K$ на A называется функция вида

$$Q(a_0 + x) = q(x) + l(x) + e,$$

где a_0 — некоторая точка аффинного пространства A, $q\colon V \to K$ — квадратичная функция, $l\colon V \to K$ — линейная функция, $c \in K$. Квадратичная функция q, не зависящая от выбора точки a_0, называется *квадратичной частью* функции Q. Линейная функция l называется линейной часть функции Q относительно точки a_0. *Гиперповерхностью* второго порядка в A, или *квадрикой*, называется множество вида

$$X = X_Q = \{a \in A \mid Q(a) = 0\}.$$

В аффинной системе координат $(a_0; e_1, \ldots, e_n\}$ квадратичная функция Q записывается в виде

$$Q(a_0 + x) = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} x_i x_j + 2 \sum_{i=1}^{n} b_i x_i + c,$$

где $a_{ij} = a_{ji}$. Символом A_0 обозначается матрица (a_{ij}) квадратичной функции q в базисе $(e_1, \ldots, e_n)$, а символом A_Q — матрица

$$A_Q = \left(\begin{array}{ccc|c} & & & b_1 \\ & A_q & & \vdots \\ & & & b_n \\ \hline b_1 & \ldots & b_n & c \end{array}\right).$$

Определители матриц A_Q и A_q обозначаются через Δ и δ соответственно. При этом A_Q, A_q, Δ и δ зависят от выбора системы координат $(a_0; e_1, \ldots$ $\ldots, e_n)$, однако ранги матриц A_Q и A_q уже не зависят от выбора системы координат. Квадрика называется *невырожденной*, если $\Delta \neq 0$, и *вырожденной*, если $\Delta = 0$.

Гиперплоскость

$$\sum_{i,j=1}^{n} (a_{ij}x_j^0 + b_i)(x_i - x_i^0) = 0$$

называется *касательной гиперплоскостью* к X_Q в точке $a = (x_1^0, \ldots, x_n^0) \in$ $\in X_Q$, если $\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j^0 + b_i \neq 0$ для некоторого i. Если это условие не выполнено, то точка a_0 называется *особой*.

Вектор $r = (r_1, \ldots, r_n)$ называется *вектором асимптотического направления*, если $q(r) = 0$.

Точка $a \in Q$ называется *центральной точкой* квадратичной функции Q (или квадратики X_Q), если линейная часть Q относительно a_0 равна нулю. При этом $Q(a_0 + x) = Q(a_0 - x)$ для всех $x \in L$. *Центром функции* Q (или квадрики X_Q) называется множество ее центральных точек.

Конус $\{a \in A \mid q(a - a_0) = 0\}$, где a_0 — центральная точка, не зависит от выбора этой точки и называется *асимптотическим конусом* квадрики X_Q.

Для любой квадратичной функции Q существует такая аффинная система координат в A, в которой Q принимает один из следующих видов:

а) если q невырожденная, то

$$Q(x_1, \ldots, x_n) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i^2 + c, \qquad \lambda_i, c \in K, \quad \lambda_i \neq 0;$$

б) если q вырожденная ранга r и центр Q непуст, то

$$Q(x_1, \ldots, x_n) = \sum_{i=1}^{r} \lambda_i x_i^2 + c, \qquad \lambda_i, c \in K, \quad \lambda_i \neq 0;$$

в) если q вырожденная ранга r и центр Q пуст,

$$Q(x_1, \ldots, x_n) = \sum_{i=1}^{r} \lambda_i x_i^2 + x_{r+1}.$$

Над полем вещественных чисел уравнение квадрики в некоторой аффинной системе координат имеет один из следующих видов:

$(\mathrm{I_{r,s}})\colon\ x_1^2+\ldots+x_s^2-x_{s+1}^2-\ldots-x_r^2=1,\quad 0\leqslant s\leqslant r\leqslant n;$

$(\mathrm{I'_{r,s}})\colon\ x_1^2+\ldots+x_s^2-x_{s+1}^2-\ldots-x_r^2=0,\quad 0\leqslant s\leqslant r\leqslant n,\ s\geqslant r/2;$

$(\mathrm{II_{r,s}})\colon\ x_1^2+\ldots+x_s^2-x_{s+1}^2-\ldots-x_r^2=2x_{r+1},\quad 0\leqslant s\leqslant r\leqslant n-1,\ s\geqslant r/2.$

§ III. Проективные пространства

Проективным пространством, ассоциированным с векторным пространством V над полем K, называется множество $P(V)$ одномерных подпространств в V. Элементы $P(V)$ называются *точками* проективного пространства. Проективное пространство обладает следующими структурами.

А) В $P(V)$ выделены подмножества, называемые *проективными подпространствами* или *плоскостями*. Подмножество называется *проективным подпространством*, если оно есть подмножество всех одномерных подпространств некоторого подпространства в V.

Б) Задано семейство инъективных отображений аффинных пространств в $P(V)$, называемых *аффинными картами*. Аффинная карта $\varphi\colon A\to P(V)$ строится из аффинной гиперплоскости A в V (рассматриваемой как аффинное пространство и не содержащей нуля). Каждой точке в A сопоставляется единственное одномерное подпространство в V, ее содержащее.

В) Выделено семейство биективных отображений пространств $P(V)$ в себя, называемых *проективными преобразованиями*. Проективное преобразование α — это отображение $\alpha\colon P(V)\to P(V)$, которое строится по невырожденному линейному оператору $\mathcal{A}\colon V\to V$ таким образом, что образ элемента из $P(V)$ при отображении α есть образ при отображении $\mathcal{A}$ одномерного подпространства, представляющего этот элемент.

Проективное преобразование переводит подпространства в подпространства и в композиции с аффинной картой дает снова аффинную карту. *Размерностью* пространства $P(V)$ называется число $\dim V-1$. Проективное пространство размерности n часто обозначают через $\mathbf{P}^n$. При рассмотрении аффинных карт часто отождествляют аффинное пространство A и его образ в $P(V)$. Координаты, заданные в некоторой аффинной карте, называются *неоднородными координатами* в проективном пространстве (они определены не на всем пространстве).

Если в пространстве V задана система координат (выбран базис), то, имея точку в $P(V)$, мы можем рассмотреть координаты любого вектора из соответствующего ей одномерного подпространства. Эти координаты определены с точностью до пропорциональности и называются *однородны-*

ми координатами точки проективного пространства.

Если в V задана система координат $x_0, x_1, \ldots, x_r$, то аффинная карта, определяемая гиперплоскостью с уравнением $x_i = 1$, называется i-й *координатной аффинной картой.*

Если q — квадратичная функция на V, то множество одномерных подпространств, содержащихся в конусе $q(x) = 0$, называется *квадрикой* в $P(V)$.

Для четырех различных точек p_1, p_2, p_3, p_4 проективной прямой $\mathbf{P}^1$ определено их *двойное отношение* $\delta(p_1, p_2, p_3, p_4)$, которое является элементом основного поля. Для его вычисления зададим на $\mathbf{P}^1$ произвольную систему однородных координат и обозначим через $\Delta(p_i, p_j)$ определитель матрицы 2-го порядка, составленный из координат точек p_i и p_j. Тогда

$$\delta(p_1, p_2, p_3, p_4) = \frac{\Delta(p_1, p_4)}{\Delta(p_3, p_4)} \cdot \frac{\Delta(p_3, p_2)}{\Delta(p_1, p_2)}.$$

Правая часть этой формулы не зависит ни от выбора системы координат, ни от выбора векторов, представляющих данные точки. В неоднородных координатах

$$\delta(p_1, p_2, p_3, p_4) = \frac{(x_4 - x_1)(x_2 - x_3)}{(x_4 - x_3)(x_2 - x_1},$$

где x_i — координата точки p_i.

Рассматривая некоторую аффинную карту и аффинную систему координат в этой карте, мы можем задавать подмножества в проективном пространстве уравнениями относительно этих неоднородных координат. Такие подмножества будут лежать внутри карты, но в некоторых случаях их можно дополнить и вне карты: подмножество карты, задаваемое линейными уравнениями (т.е. аффинное подпространство), однозначно дополняется до проективного подпространства; подмножество карты, являющееся аффинной квадрикой, однозначно дополняется до проективной квадрики. Такое дополнение подразумевается в некоторых задачах.

Точки проективного пространства, не принадлежащие заданной аффинной карте, называются *бесконечно удаленными* по отношению к этой карте.

§ IV. Тензоры

Тензором типа (p, q) или *p раз ковариантным и q раз контравариантным тензором* на векторном пространстве V называется функция на

$$\underbrace{V \times \ldots \times V}_{p \text{ раз}} \times \underbrace{V^* \times \ldots \times V^*}_{q \text{ раз}},$$

линейная по каждому из $p + q$ аргументов. Тензоры типа (p, q) образуют

векторное пространство $\mathbf{T}_p^q(V)$. Оно естественным образом отождествляется с *тензорным произведением*

$$\underbrace{V\otimes\ldots\otimes V}_{q\ \text{раз}}\otimes\underbrace{V^*\otimes\ldots\otimes V^*}_{p\ \text{раз}}.$$

Координаты тензора $T\in\mathbb{T}_p^q(V)$ (в каком-либо базисе пространства V) обозначаются через $t_{i_1\ldots i_p}^{j_1\ldots j_q}$.

Если $\operatorname{char}K=0$, то в пространстве $\mathbb{T}_0^q(V)$ определены линейные операторы Sym и Alt:

$$(\operatorname{Sym}T)(f_1,\ldots,f_q)=\frac{1}{q!}\sum_{\sigma\in S_q}T(f_{\sigma(1)},\ldots,f_{\sigma(q)}),$$

$$(\operatorname{Alt}T)(f_1,\ldots,f_q)=\frac{1}{q!}\sum_{\sigma\in S_q}(\operatorname{sgn}\sigma)T(f_{\sigma(1)},\ldots,f_{\sigma(q)}),$$

являющиеся проекторами на подпространства $S^q(V)$ и $\Lambda^q(V)$ симметрических и кососимметрических тензоров соответственно.

Элементы из $\Lambda^p(V)$ часто называется *p-векторами* (в том числе из $\Lambda^2(V)$ — *бивекторами*).

Пространство $S(V)=\bigoplus_{q=0}^{\infty}S^q(V)$ с операцией умножения $xy=\operatorname{Sym}(x\otimes y)$ является алгеброй, которая называется *симметрической алгеброй пространства* V. Пространство $\Lambda(V)=\bigoplus_{q=0}^{\infty}\Lambda^q(V)$ с операцией $x\wedge y=\operatorname{Alt}(x\otimes y)$ является алгеброй, которая называется *внешней алгеброй пространства* V или *алгеброй Грассмана.*

§ V. Элементы теории представлений

Для изложения основных определений и первоначальных результатов в теории представлений групп традиционно используется несколько разных способов. При дальнейшем развитии теории выясняются связи между различными вариантами определений и вырабатываются способы “перевода с одного языка на другой”. Мы не имеем в виду определенного способа первоначального изложения, считая целесообразным ознакомить изучающих с основными способами, принятыми в литературе, и дать возможность преподавателю найти задачи, использующие удобные ему варианты изложения.

Напомним в основных чертах эти основные подходы к построению теории представлений или варианты терминологии.

А. Терминология линейных представлений. *Линейным представлением* группы G на пространстве V называется гомоморфизм $\Phi\colon G\to\mathbf{GL}(V)$ группы G в группу невырожденных линейных операторов на V.

Размерность пространства V называется *размерностью* или *степенью представления. Гомоморфизмом представления* Φ группы G на пространстве V в представление Ψ группы G на пространстве W называется линейное отображение $\alpha : V \to W$, для которого $\alpha(\Phi(g)v) = \Psi(\alpha(v))$ при всех $g \in G$, $v \in V$. Если гомоморфизм α является изоморфизмом пространств, то представления Φ и Ψ называют *изоморфными.*

Подпространство U в пространстве V представления Φ группы G называют *инвариантным*, если $\Phi(g)U = U$ при всех $g \in G$. Представление ненулевой степени, не имеющее инвариантных подпространств, отличных от нуля и всего пространства, называют *неприводимым.*

Б. Терминология матричных представлений. *Матричным представлением* группы G степени n над полем F называется гомоморфизм $\rho : G \to \mathbf{GL}_n(F)$ группы G в группу обратимых матриц порядка n над полем F. Два матричных представления ρ и σ группы G одного и того же порядка n над F называют *эквивалентными* (*изоморфными*), если существует такая невырожденная матрица $C \in \mathbf{M}_n(F)$, что $\rho(g) = C^{-1}\sigma(g)C$ для всех $g \in G$.

Матричное представление называется *приводимым*, если оно эквивалентно представлению, в котором все матрицы имеют один и тот же “угол нулей”, т.е. имеют вид $\begin{pmatrix} A & C \\ 0 & B \end{pmatrix}$, где A и B — матрицы порядков r и s, одинаковых для всех $g \in G$.

В. Терминология линейных $\boldsymbol{G}$-пространств. Пусть G — группа, V — линейное пространство. Говорят, что на V задана структура линейного G-пространства, если на $G \times V$ определена операция со значениями в V, причём отображение $v \to g * v$ является линейным отображением пространства V в себя и $g_1 * (g_2 * v) = (g_1 g_2) * v$ при всех $g_1, g_2 \in G$, $v \in V$. Два G-пространства V и W называют изоморфными, если существует такой изоморфизмом пространств $\alpha : V \to W$, что $\alpha(g * v) = g \cdot \alpha(v)$ для всех $g \in G$, $v \in V$.

Подпространство U в G-пространстве V называют *инвариантным*, если $g * u \in U$ при всех $g \in G$, $u \in U$. Ненулевое G-пространство V называют *неприводимым*, если оно не имеет нетривиальных инвариантных подпространств.

Г. Терминология модулей над групповой алгеброй. Пространство V называют *модулем* над групповой алгеброй $F[G]$ или $F[G]$-модулем, если на $F[G] \times V$ определена операция $(a, v) \to a \cdot v$ со значениями в V, для которой $a_1(a_2 v) = (a_1 a_2) \cdot v$. Два $F[G]$-модуля V и W изоморфны, если существует линейное отображение α: $V \to W$, для которого $\alpha(a \cdot v) = a \cdot \alpha(v)$ при всех $a \in F[G]$, $v \in V$.

Подпространство U в $F[G]$-модуле V называют *подмодулем*, если $a \cdot u \in$ $\in U$ при всех $a \in F[G]$, $u \in U$, и ненулевой модуль V называют *простым* или *неприводимым*, если он не имеет нетривиальных подмодулей.

Отметим, что, имея структуру $F[G]$-модуля на V и рассматривая группу G как подмножество в $F[G]$ (суммы с одним ненулевым коэффициентом, равным 1), при ограничении операции на $G \times V$ мы получаем на V структуру G-пространства $(g, v) \to g \cdot v$.

Наоборот, имея на V структуру G-пространства, мы можем положить

$$\left(\left(\sum \alpha_g \cdot g\right), v\right) \to \sum \alpha_g (g * v),$$

и это превращает V в $F[G]$-модуль.

Если Φ — линейное представление группы G на V, то операция

$$(g, v) \to \Phi(g)v$$

задает на V структуру G-пространства.

Если V — G-пространство и $\Phi(g):\ v \to g * v$, то $\Phi(g)$ — линейный оператор на V, и легко показать, что $g \to \Phi(g)$ — линейное представление группы G на пространстве V.

Если имеется линейное представление группы G на n-мерном пространстве V, то, выбирая в V базис и сопоставляя каждому элементу $g \in G$ матрицу оператора $\Phi(g)$ в этом базисе, мы получаем отображение G в $\mathbf{GL}_n(F)$, которое оказывается матричным представлением группы G. Другой выбор базиса приводит к эквивалентному матричному представлению.

Если задано n-мерное матричное представление ρ группы G, то, сопоставляя каждому элементу $g \in G$ оператор умножения на матрицу $\rho(g)$ в пространстве F^n, мы получаем линейное представление группы G на пространстве F^n.

Нетрудно проверить, что указанные способы перехода от $F[G]$-модулей к G-пространствам, линейным и матричным представлениям и обратно переводят неприводимые объекты в неприводимые и изоморфные — в изоморфные.

Операция умножения в $F[G]$ задает на пространстве $V = F[G]$ структуру $F[G]$-модуля; соответствующее линейное представление группы G на V называют *регулярным представлением.* Мы можем также задавать регулярное представление, рассматривая пространство V с базисом (e_g), $g \in G$ и определяя отображение $R : G \to \mathbf{GL}(V)$ правилом $R(h)e_g = e_{hg}$ при всех $g, h \in G$. Базис (e_g) называется *каноническим базисом* пространства регулярного представления.

Приведем основные теоремы о представлениях групп.

Теорема 1. *Пусть G' — коммутант группы G и $\varphi : G \to G/G'$ — канонический гомоморфизм. Тогда формула $\psi \to \psi \circ \varphi$ устанавливает взаимно однозначное соответствие между множествами одномерных представлений групп G и G/G'.*

Теорема 2 (Машке). *Пусть группа G конечна и* $\operatorname{char} F$ *не делит* $|G|$. *Тогда всякое конечномерное представление группы G над полем F изоморфно прямой сумме неприводимых представлений.*

Теорема 3. *Пусть группа G конечна, поле F алгебраически замкнуто и* $\operatorname{char} F$ *не делит* $|G|$. *Тогда число различных неприводимых представлений группы G над полем F равно числу классов сопряженных элементов группы G, а сумма квадратов размерностей этих представлений равна порядку группы G.*

§ VI. Список определений

Приведем список основных понятий, использованных в задачнике.

Алгебра банахова — полная нормированная алгебра.

Алгебра Грассмана векторного пространства — внешняя алгебра пространства.

Алгебра групповая (группы G над полем F) — множество конечных формальных линейных комбинаций вида $\sum_g \alpha_g g$ ($g \in G$, $a_g \in F$) с естественным сложением и умножением на элементы поля F и операцией умножения

$$\alpha_g g \cdot \alpha_h h = \alpha_g \alpha_h gh,$$

распространяющейся на линейные комбинации по закону дистрибутивности.

Алгебра дифференциальных операторов — алгебра Вейля.

Алгебра нётерова (коммутативная) — коммутативная алгебра, в которой всякая строго возрастающая последовательность идеалов конечна.

Алгебра нормированная (над нормированном полем K) — алгебра с функцией $\|x\|$, $x \in A$, принимающей неотрицательные вещественные значения, причём:

а) $\|x\| \geqslant 0$ и $\|x\| = 0$ тогда и только тогда, когда $x = 0$;

б) $\|x + y\| \leqslant \|x\| + \|y\|$;

в) $\|\lambda x\| = |\lambda| \cdot \|x\|$, где $\lambda \in K$, $x \in A$;

г) $\|xy\| \leqslant \|x\| \cdot \|y\|$.

Алгебра полупростая — алгебра, не имеющая ненулевых двусторонних идеалов, состоящих из нильпотентных элементов; в коммутативном случае алгебра без нильпотентных элементов, отличных от 0.

Алгебра простая — алгебра, не имеющая двусторонних идеалов, отличных от 0 и всей алгебры.

Алгебра формальных степенных рядов (от переменного x над полем K) — множество формальных выражений вида $\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$ ($a_k \in K$)

с естественным сложением и умножением на элементы поля K и операцией умножения

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k \cdot \sum_{k=0}^{\infty} b_k x^k = \sum_{k=0}^{\infty} c_k x^k, \quad \text{где} \quad c_k = \sum_{\substack{i+j=k \\ i\geqslant 0,\ j\geqslant 0}} a_i b_j.$$

Алгебра центральная — алгебра, центр которой совпадает с $1 \cdot K$, где 1 — единица алгебры, K — ее основное поле.

Векторное пространство нормированное (над нормированном полем K) — векторное пространство с функцией $\|x\|$, принимающей неотрицательные вещественные значения, причём:

а) $\|x\| \geqslant 0$ и $\|x\| = 0$ тогда и только тогда, когда $x = 0$;

б) $\|x + y\| \leqslant \|x\| + \|y\|$;

в) $\|\lambda x\| = |\lambda| \cdot \|x\|$, где $\lambda \in K$, $x \in V$.

Вращение — движение, сохраняющее ориентацию пространства и имеющее неподвижную точку.

K-вложение — инъективный K-гомоморфизм.

Гомоморфизм унитарный — гомоморфизм колец (алгебр), при котором единица переходит в единицу.

K-гомоморфизм — гомоморфизм алгебр над полем K; термин употребляется в случае, когда алгебры рассматриваются одновременно над некоторым расширением поля K.

Группа делимая — абелева группа, в которой для любого элемента a и любого целого числа n уравнение $nx = a$ имеет решение.

Группа диэдра $\mathbf{D}_n$ — группа движений плоскости, отображающих правильный n-угольник на себя.

Группа кватернионов $\mathbf{Q}_8$ — множество элементов ± 1, $\pm i$, $\pm j$, $\pm k$ с умножением элементов, как в теле кватернионов.

Группа Клейна $\mathbf{V}_4$ — группа перестановок

$$\{e,\ (12)(34),\ (13)(24),\ (14)(23)\}$$

и всякая изоморфная ей группа.

Группа периодическая — группа, все элементы которой имеют конечный порядок.

Движение — отображение евклидова пространства в себя, сохраняющее расстояния между точками.

Действие группы на множестве — группа G действует на множестве M, если каждому элементу $g \in G$ поставлена в соответствие биекция $M \to M$ и $g_1 g_2(m)) = (g_1 g_2)(m)$ для любых $g_1, g_2 \in G$, $m \in M$.

Декремент перестановки — разность между степенью перестановки и числом циклов в её разложении на независимые циклы (с учетом циклов длины 1).

Делитель нуля в кольце — элемент a, для которого существует элемент $b \neq 0$ такой, что $ab = 0$ (левый делитель нуля).

Единицы матричные — квадратные матрицы E_{ij} $(i, j = 1, \ldots, n)$, у которых на пересечении i-й строки и j-го столбца стоит 1, а остальные элементы равны 0.

Идеал максимальный — идеал кольца (алгебры), не содержащийся строго ни в каком идеале, отличном от всего кольца (всей алгебры).

Идеал простой (коммутативного кольца) — идеал, факторкольцо (факторалгебра) по которому не содержит делителей нуля.

Идемпотент — элемент кольца, совпадающий со своим квадратом.

Идемпотенты ортогональные — идемпотенты, произведение которых равно нулю.

Кватернион — элемент тела кватернионов.

Кватернион чистый — кватернион, действительная часть которого равна 0.

Кольцо без делителей нуля — кольцо, не содержащее делителей нуля, отличных от 0.

Кольцо многочленов от некоммутирующих переменных $x_1, \ldots$ $\ldots, x_n$ (над кольцом A) — множество формальных выражений вида

$$\sum_{k_1 \ldots k_m} a_{k_1 \ldots k_m} x_{k_1} \ldots x_{k_m} \quad (a_{k_1 \ldots k_m} \in A)$$

с естественными операциями сложения и умножения одночленов

$$a_{k_1 \ldots k_m} x_{k_1} \ldots x_{k_m} \cdot b_{i_1 \ldots i_s} x_{i_1} \ldots x_{i_s} = a_{k_1 \ldots k_m} b_{i_1 \ldots i_s} x_{k_1} \ldots x_{k_m} x_{i_1} \ldots x_{i_s},$$

распространяемыми на суммы по закону дистрибутивности.

Кольцо нётерово (коммутативное) — коммутативное кольцо, в котором всякая строго возрастающая последовательность идеалов конечна.

Кольцо простое — кольцо с ненулевым умножением, не имеющее двусторонних идеалов, отличных от нулевого и самого кольца.

Кольцо целых гауссовых чисел — кольцо, состоящее из комплексных чисел $x + yi$ $(x, y \in \mathbb{Z})$.

Коммутант группы — подгруппа, порожденная всеми коммутаторами элементов группы.

Коммутатор элементов группы x *и* y — элемент группы $xyx^{-1}y^{-1}$.

Коммутатор кольца x *и* y — элемент кольца $xy - yx$.

Координаты барицентрические — координаты $\lambda_0, \lambda_1, \ldots, \lambda_n$ точки x аффинного пространства относительно системы точек $x_0, x_1, \ldots$ $\ldots, x_n$, находящихся в общем положении, определяющиеся равенством

$$x = \sum_{i=0}^{n} \lambda_i x_i, \qquad \text{где} \quad \sum_{i=0}^{n} \lambda_i = 1.$$

Коразмерность подпространства — разность между размерностью пространства и размерностью подпространства.

Корень (*комплексный*) *из* 1 — комплексное число, некоторая степень которого с ненулевым показателем равна 1.

Корень (*комплексный*) *из* 1 *первообразный степени* n — корень из 1, не являющийся корнем из 1 степени, меньшей n.

Матрица верхняя (*нижняя*) *треугольная* — матрица, у которой элементы, стоящие ниже (выше) главной диагонали, равны 0.

Матрица Грама (системы векторов $e_1, \ldots, e_n$ евклидова пространства) — матрица $((e_i, e_j))$ порядка n.

Матрица кососимметрическая — матрица A, для которой ${}^tA = -A$.

Матрица косоэрмитова — комплексная матрица, для которой ${}^tA = -\bar{A}$, где $\bar{A}$ — матрица, полученная из A заменой её элементов на комплексно сопряжённые.

Матрица нильпотентная — матрица, некоторая степень которой равна нулевой матрице (нильпотентный элемент кольца матриц).

Матрица нильтреугольная — верхняя (или нижняя) треугольная матрица с нулями на главной диагонали.

Матрица ортогональная — матрица A, для которой ${}^tA = A^{-1}$.

Матрица перестановки — матрица, у которой в каждой строке и в каждом столбце стоит ровно один элемент, равный 1, а остальные элементы равны 0.

Матрица периодическая — матрица, некоторая степень которой равна единичной матрице.

Матрица присоединённая — матрица, транспонированная к матрице, составленной из алгебраических дополнений элементов данной матрицы.

Матрица симметрическая — матрица A, для которой ${}^tA = A$.

Матрица треугольная — верхняя или нижняя треугольная матрица.

Матрица унимодулярная — матрица с определителем 1.

Матрица унитарная — комплексная матрица A, для которой ${}^t\bar{A} = A^{-1}$, где ${}^t\bar{A}$ — матрица, полученная из ${}^tA$ заменой её элементов на комплексно сопряжённые.

Матрица унитреугольная — треугольная матрица с единицами на главной диагонали.

Матрица элементарная — матрица вида $E+(\gamma-1)E_{ij}$, $\gamma\neq 0$ (матрица I типа), $E+\alpha E_{ij}$, $\alpha\neq 0$ (II типа); иногда элементарными называют также матрицы-перестановки.

Матрица эрмитова — комплексная матрица A, для которой ${}^tA=\bar{A}$, где $\bar{A}$ — матрица, полученная из A заменой её элементов на комплексно сопряжённые.

Многочлен круговой (деления круга) $\Phi_n(x)$ — многочлен

$$\prod_{k=1}^{\varphi(n)}(x-\varepsilon_k),$$

где $\varepsilon_1,\dots,\varepsilon_{\varphi(n)}$ — первообразные корни степени n из 1.

Многочлен минимальный линейного оператора — многочлен наименьшей степени, аннулирующий данный оператор; минимальный многочлен матрицы оператора.

Многочлен минимальный матрицы — многочлен наименьшей степени, аннулирующий данную матрицу.

Модуль неприводимый — ненулевой модуль, не имеющий подмодулей, отличных от нулевого и самого модуля.

Модуль приводимый — ненулевой модуль, не являющийся неприводимым.

Модуль унитарный — модуль, в котором единица кольца действует тождественно.

Модуль циклический — модуль, в котором существует такой элемент m_0, что для любого элемента m модуля M существует элемент кольца a такой, что $am_0=m$.

Нильрадикал кольца — наибольший (в смысле теоретико-множественного включения) двусторонний идеал кольца, состоящий из нильпотентных элементов.

Нормализатор подгруппы — наибольшая подгруппа, в которой данная подгруппа является нормальной.

Нормальное замыкание элемента группы — наименьшая нормальная подгруппа, содержащая данный элемент.

Оператор кососимметрический — линейный оператор $\mathcal{A}$, для которого $(\mathcal{A}x,y)=-(y,\mathcal{A}x)$ при любых векторах x и y (т.е. $\mathcal{A}^*=-\mathcal{A}$).

Оператор косоэрмитов — линейный оператор A в эрмитовом пространстве, для которого $(\mathcal{A}x,y)=-(x,A^*y)$ при любых векторах x и y (т.е. $\mathcal{A}^*=-\mathcal{A}$).

Оператор нормальный — линейный оператор в евклидовом или метрическом пространстве, перестановочный со своим сопряжённым оператором.

Оператор ортогональный — линейный оператор $\mathcal{A}$, сохраняющий скалярное произведение векторов ($(\mathcal{A}x,\ \mathcal{A}y) = (x, y)$ для любых векторов x и y) (т.е. $\mathcal{A}^* = \mathcal{A}^{-1}$).

Оператор полупростой — линейный оператор, у которого всякое инвариантное подпространство обладает инвариантным дополнительным подпространством.

Оператор самосопряжённый — линейный оператор в евклидовом или эрмитовом пространстве, для которого $(\mathcal{A}x, y) = (x, \mathcal{A}y)$ при любых векторах x и y (т.е. $\mathcal{A}^* = \mathcal{A}$).

Оператор симметрический — линейный оператор в евклидовом или эрмитовом пространстве, для которого $(\mathcal{A}x, y) = (x, \mathcal{A}y)$ при любых векторах x и y (т.е. $\mathcal{A}^* = \mathcal{A}$).

Оператор сопряженный (к оператору $\mathcal{A}$) — линейный оператор $\mathcal{A}^*$, для которого $(\mathcal{A}x, y) = (x, \mathcal{A}^* y)$.

Оператор унитарный — линейный оператор $\mathcal{A}$ в эрмитовом пространстве, сохраняющий скалярное произведение векторов $(\mathcal{A}x, \mathcal{A}y) = (x, y)$ для любых векторов x, y) (т.е. $\mathcal{A}^* = \mathcal{A}^{-1}$).

Оператор эрмитов — линейный оператор $\mathcal{A}$ в эрмитовом пространстве, для которого $(\mathcal{A}x, y) = (x, \mathcal{A}y)$ при любых векторах x и y (т.е. $\mathcal{A}^* = \mathcal{A}$).

Определитель Грама — определитель матрицы Грама.

Орбита элемента — множество образов элемента при действии всеми элементами группы.

Отражение (в пространстве U параллельно дополнительному подпространству V) — линейный оператор, ставящий каждому вектору $x = u + v$ ($u \in U$, $v \in V$) в соответствие вектор $u - v$.

Параллелепипед (со сторонами $a_1, \ldots, a_k$) — множество линейных комбинаций $\sum_{i=1}^{k} \lambda_i a_i$ ($0 \leqslant \lambda_i \leqslant 1$, $i = 1, \ldots, k$).

Перестановка — взаимно однозначное отображение конечного множества на себя; подстановка.

Период группы — наименьшее натуральное число n, для которого $x^n = e$ для любого элемента группы x.

Периодическая часть группы — множество элементов группы, имеющих конечный порядок.

Подгруппа максимальная — подгруппа, не содержащаяся строго ни в какой подгруппе, отличной от всей группы.

Подпространство дополнительное (к подпространству U) — подпространство V, для которого все пространство равно $U \oplus V$.

Подпространство вполне изотропное (относительно симметрической или полуторалинейной функции $f(x, y)$) — подпространство, на котором $f(x, y)$ принимает нулевое значение.

Поле разложения многочлена — наименьшее расщепляющее поле многочлена.

Поле расщепляющее многочлена — расширение поля коэффициентов многочлена, над которым он раскладывается в произведение линейных множителей.

Поле расщепляющее многочленов — расширение поля коэффициентов многочленов, над которым все данные многочлены раскладываются в произведение линейных множителей.

Пополнение метрического пространства — пополнение относительно последовательности Коши.

Проектирование (на подпространство U параллельно дополнительному подпространству V) — линейный оператор, ставящий каждому вектору $x = u + v$ ($u \in U$, $v \in V$) в соответствие вектор u.

Произведение полупрямое групп G и H — множество $G \times H$ с операцией

$$(x, y)(z, t) = (x \cdot \varphi(y)(z), yt),$$

где $\varphi : H \to \operatorname{Aut} G$ — некоторый гомоморфизм.

Символ Кронекера — $\delta_{ij} = 1$, $\delta_{ij} = 0$ при $i \neq j$ $(i, j = 1, \ldots, n)$.

След матрицы — сумма элементов матрицы, стоящих на главной диагонали.

След оператора — след матрицы данного оператора.

Тело кватернионов — векторное пространство над полем $\mathbb{R}$ с базисом $1, i, j, k$, где 1 — единица умножения, $i^2 = j^2 = k^2 = -1$, $ij = -ji = k$, $jk = -kj = i$, $ki = -ik = j$; алгебра обобщенных кватернионов при $\alpha = \beta = 1$.

Функция Мёбиуса — функция натурального числа n, определяемая равенством

$$\mu(n) = \begin{cases} 1 & \text{при } n = 1, \\ (-1)^r, & \text{если } n \text{ — произведение } r \text{ различных простых чисел,} \\ 0 & \text{в остальных случаях.} \end{cases}$$

Функция Эйлера — при $n = 1$ равна 1, при $n > 1$ равна числу натуральных чисел, меньших n и взаимно простых с n.

Центр группы (кольца) — множество элементов, перестановочных со всеми элементами группы (кольца).

Централизатор элемента группы — множество элементов группы, перестановочных с данным элементом.

Элемент нильпотентный кольца — элемент, некоторая степень которого равна 0.

Элементарные преобразования строк матрицы над кольцом — умножение строки на обратный элемент кольца (I тип), прибавление к строке другой строки, умноженной на элемент кольца (II тип).

p-группа — группа, все элементы которой имеют порядок вида p^n ($n \in \mathbb{N}$).

p-подгруппа силовская — максимальная подгруппа, являющаяся p-подгруппой.

§ VII. Список обозначений

${}^tA$ — транспонированная матрица для матрицы A.

$\hat{A}$ — присоединённая матрица для матрицы A.

$\mathcal{A}^*$ — сопряжённый оператор для линейного оператора $\mathcal{A}$.

$\mathbf{A}_n$ — знакопеременная группа степени n (группа четных перестановок на множестве $\{1, 2, \ldots, n\}$).

$|A|$ — число элементов множества A.

$[A, B]$ — коммутатор $AB - BA$ матриц A и B.

$\operatorname{Aut} G$ — группа автоморфизмов группы G.

Alt — оператор альтернирования в пространстве $\mathbf{T}_0^q(V)$.

(a) — идеал кольца, порождённый элементом a.

$\langle a \rangle$ — подгруппа (подкольцо, подалгебра, подпространство), порождённая элементом a.

$\langle a \rangle_n$ — циклическая группа порядка n с образующим элементом a.

$\arg z$ — аргумент комплексного числа z; считается, что $0 \leqslant \arg z < 2\pi$.

$\mathbb{C}$ — множество (поле, аддитивная группа) комплексных чисел.

$\mathbf{D}_n$ — группа диэдра (группа движений правильного n-угольника).

$\mathbf{D}_n(A)$ — множество диагональных матриц порядка n над кольцом A.

$\mathcal{D}$ — оператор дифференцирования в функциональных пространствах.

$\operatorname{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$ — диагональная матрица с элементами $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ на главной диагонали.

$\operatorname{End} A$ — кольцо эндоморфизмов абелевой группы A (кольца A).

e^A — сумма ряда Тейлора функции e^x при $x = A$ (A — матрица).

E_{ij} (матричная единица) — матрица, у которой элемент на пересечении i-й строки с j-м столбцом равен 1, а остальные элементы равны 0.

$\mathbb{F}_q$ — поле из q элементов.

G_a — стационарная подгруппа элемента $a \in M$ при действии группы G на множестве M.

G' — коммутант группы G.

$\mathbf{GL}(V)$ — группа невырожденных линейных операторов в векторном пространстве V.

$\mathbf{GL}_n(F)$ — группа невырожденных линейных операторов в n-мерном векторном пространстве над полем F, группа невырожденных матриц порядка n над полем F.

$\mathbf{GL}_n(q)$ — то же самое, что и $\mathbf{GL}_n(\mathbb{F}_q)$.

$\mathbb{H}$ — тело кватернионов.

$\mathrm{Hom}(A, B)$ — группа гомоморфизмов группы A в абелеву группу B.

K^* — группа обратимых элементов кольца K.

$K(a)$ — расширение поля K, полученное присоединением элемента a.

$F[G]$ — групповая алгебра группы G над полем K.

$K[x]$ — кольцо многочленов от переменного x с коэффициентами из кольца K.

$K[x]_n$ — множество многочленов из кольца $K[x]$ степени, не большей n.

$K(x)$ — поле рациональных функций от переменного x с коэффициентами из поля K.

$K[[x]]$ — кольцо формальных степенных рядов от переменного x с коэффициентами из кольца K.

$K[x_1, \ldots, x_n]$ — кольцо многочленов от переменных $x_1, \ldots, x_n$ с коэффициентами из кольца K.

$K\{x_1, \ldots, x_n\}$ — кольцо многочленов от некоммутирующих переменных $x_1, \ldots, x_n$ с коэффициентами из кольца K.

$L(V)$ — множество линейных операторов в векторном пространстве V.

$\ln A$ — сумма ряда Тейлора функции $\ln(1 - x)$ при $x = E - A$ (A — матрица).

$\mathbf{M}_n(K)$ — кольцо (алгебра) матриц порядка n над кольцом K.

$\mathbb{N}$ — множество натуральных чисел.

$N(A)$ — нильрадикал алгебры A.

$N(H)$ — нормализатор подгруппы H.

$\mathbf{N}_{A/K}(a)$ — норма элемента a алгебры A над полем K.

$n\mathbb{Z}$ — множество целых чисел, кратных числу n.

$\mathbf{O}_n(K)$ — группа ортогональных матриц порядка n над полем K.

$\mathbb{Q}$ — множество (поле, аддитивная группа) рациональных чисел.

$\mathbb{Q}_p$ — поле p-адических чисел.

$\mathbb{R}_+$ — множество (мультипликативная группа) положительных вещественных чисел.

$\mathrm{rk}\, A$ — ранг матрицы.

$\mathrm{rk}\, \mathcal{A}$ — ранг линейного оператора $\mathcal{A}$.

$\langle S \rangle$ — подгруппа (подкольцо, подалгебра, подпространство) с множеством порождающих S; аффинная оболочка множества S.

$\mathbf{S}_n$ — симметрическая группа степени n (группа перестановок множества $\{1, \ldots, n\}$).

$\mathbf{S}_X$ — группа взаимно однозначных отображений множества X на себя.

$\mathbf{SL}_n(K)$ — группа матриц с определителем 1 над полем K.

$\mathbf{SL}_n(q)$ — то же самое, что $\mathbf{SL}_n(\mathbb{F}_q)$.

$\mathbf{SO}_n(\mathbb{C})$ — группа ортогональных матриц с определителем 1 над полем K.

$\mathbf{SU}_n(\mathbb{C})$ — группа унитарных комплексных матриц с определителем 1.

$\mathbf{SU}_n$ — то же самое, что и $\mathbf{SU}_n(\mathbb{C})$.

$\mathbf{S}(V)$ — симметрическая алгебра векторного пространства V.

$\mathbf{S}^q(V)$ — q-я симметрическая степень векторного пространства V.

Sym — оператор суммирования в пространстве $\mathbb{T}_0^q(V)$.

$\mathbb{T}(V)$ — тензорная алгебра векторного пространства V.

$\mathbb{T}_p^q(V)$ — векторное пространство тензоров типа (p,q) на векторном пространстве V.

$\operatorname{tr} A$ — след матрицы A.

$\operatorname{tr} \mathcal{A}$ — след линейного оператора $\mathcal{A}$.

$\operatorname{tr}_{A|K}(a)$ — след элемента a алгебры A над полем K.

$\mathbf{U}$ — группа комплексных чисел с модулем 1.

$\mathbf{U}_n$ — группа комплексных корней степени n из 1.

$\mathbf{U}_{p^\infty}$ — группа комплексных корней степени p^n из 1 ($n \in \mathbb{N}$) (p — простое число).

U° — ортогональное дополнение к подмножеству U векторного пространства в сопряжённом пространстве.

$U^\perp$ — ортогональное дополнение к подмножеству U векторного пространства относительно заданной билинейной функции.

$\mathbf{UT}_n(K)$ — группа унитреугольных матриц порядка n над полем K.

$\mathbf{V}_4$ — группа Клейна.

V^* — векторное пространство, сопряжённое (двойственное) к пространству V.

$V(a_1, \ldots, a_k)$ — объем параллелепипеда со сторонами $a_1, \ldots, a_k$.

$x \wedge y$ — произведение элементов x, y в алгебре Грассмана векторного пространства.

$\mathbb{Z}$ — множество (кольцо, аддитивная группа) целых чисел; бесконечная циклическая группа.

$\mathbf{Z}_n$ — циклическая группа порядка n; кольцо вычетов по модулю n.

$\mathbb{Z}_p$ — кольцо целых p-адических чисел.

$\mathbb{Z}[i]$ — кольцо целых гауссовых чисел.

$\sqrt[n]{z}$ — множество комплексных корней степени n из числа $z \in \mathbb{C}$.

$\mu(n)$ — функция Мёбиуса.

$\mu(a)$ — минимальный многочлен алгебраического элемента a.

$\Lambda(V)$ — внешняя алгебра (алгебра Грассмана) векторного пространства V.

$\Phi_n(x)$ — многочлен деления круга (круговой многочлен) $\prod_{k=1}^{\varphi(n)}(x-\varepsilon_k)$, где ε_k — первообразный корень степени n из 1 $(k=1,\ldots,\varphi(n))$.

$\varphi(n)$ — функция Эйлера.

$\chi_{A|K}(a,x)$ — характеристический многочлен элемента a алгебры A над полем K.

1_X — тождественное отображение множества X.

2^X — множество всех подмножеств множества X.

Учебное издание

АРТАМОНОВ Вячеслав Александрович,
БАХТУРИН Юрий Александрович,
ВИНБЕРГ Эрнест Борисович,
ГОЛОД Евгений Соломонович,
ИСКОВСКИХ Василий Алексеевич,
КОСТРИКИН Алексей Иванович,
ЛАТЫШЕВ Виктор Николаевич,
МИХАЛЕВ Александр Васильевич,
МИШИНА Анна Петровна,
ОЛЬШАНСКИЙ Александр Юрьевич,
ПАНЧИШКИН Алексей Алексеевич,
ПРОСКУРЯКОВ Игорь Владимирович,
РУДАКОВ Алексей Николаевич,
СКОРНЯКОВ Лев Анатольевич,
ШМЕЛЬКИН Альфред Львович

СБОРНИК ЗАДАЧ ПО АЛГЕБРЕ

Под редакцией А.И. Кострикина

Редактор *Е.Ю. Ходан*
Оригинал-макет *Н.Н. Андреева*

ЛР № 071930 от 06.07.99. Подписано в печать 25.01.2001.
Формат 60 × 90/16. Бумага типографская. Печать офсетная.
Усл. печ. л. 29. Уч.-изд. л. 32. Тираж 3000 экз. Заказ №

Издательская фирма “Физико-математическая литература”
МАИК “Наука/Интерпериодика”
117864 Москва, ул. Профсоюзная, 90

Отпечатано с готовых диапозитивов в ПС “Полиграфист”
160001, г. Вологда, ул. Челюскинцев, 3

ISBN 5-9221-0020-3

